

매립토공량 계산식에 관한 연구

이 용 희* · 문 두 열**

A Study on the Reclamation Earthwork Calculation Formula

Y. H. Lee · D. Y. Mun

Key Words : 토공량(Earthwork), 사다리꼴법칙(Trapezoidal rule), 정확도(Accuracy), 점고법(Spot height method), 최소제곱법(Least square method), 절토량(Volume of a pit excavation)

Abstract

The calculation of earthwork plays a major role in plan or design of many civil engineering projects, and thus it has become very important to advanced the accuracy of earthwork calculation. Current methods used for estimating the volume of pit excavation assumes that the ground profile between the grid points is linear(trapezoidal rule), or nonlinear(simpson's formulas). In this paper the spot height method, least square method, and chamber formulas, Chen and Lin method are compared with the volumes of the pits in these examples. As a result of this study, algorithm of chen and Lin method by spline method should provide a better accuracy than the spot height method, least square method, chamber formulas. The Chen and Lin formulas can be used for estimating the excavation volume of a pit divide into a grid with unequal intervals. From the characteristics of the cubic spline polynomial, the modeling curve of the Chen and Lin method is smooth and matches the ground profile well. Generally speaking, the nonlinear profile formulas provide better accuracy than the linear profile formulas. The mathematical model mentioned make an offer maximum accuracy in estimating the volume of a pit excavation.

* 정희원, 양산대학 토목과 조교수

** 정희원, 동의대학교 토목·도시공학부 교수

1. 서론

1.1 연구목적 및 방법

고속도로, 운하, 철도, 흙댐, 관로 등과 같은 대규모의 건설공사나 항만공사의 埋立土工量 규모를 결정할 때土工작업은 총공사비의 상당한 비중을 차지하므로 경제적인 시공과 비용절감을 위하여 토공량 계산은 가능한 정확하게 계산되어야 한다. 특히, 요즈음과 같이 토취장의 확보가 어려워 공사의 차질이 예상되는 여건 속에서 실제지형과 부합되는 이론식의 결정은 매우 중요한 사안이다. 특히 산악지나 저수지, 호수, 해안·해변지역 같이 지형의 형상이 직선이 아니고 불규칙한 곡선지형의 면·체적계산은 그 경계식에 대한 數式가정을 합리적이고도 체계적으로 정립할 필요가 있다.

토공량결정에 대한 연구는 1980년대 초까지의 연구는 지형의 횡단면의 표면곡률을 선형으로 가정하여 사다리꼴법칙, 배형거법, 삼각형법, 좌표법, 횡단면법 등으로 각 구간의 면적을 계산한 후 양단면평균법이나 각주공식, 중앙단면법 등으로 구하였다. 1990년도 이후에는 지형경계를 곡률로 가정하여 각각 한방향으로 2차, 3차식 그리고 1차와 2차의 조합식으로 하여 면적을 구하는 동시에 계산식이 약간 복잡하여지지만 지형의 적자단면을 양방향으로 동시에 2, 3차식을 적용하여 면·체적식을 유도하는 연구가 주류를 이루었다. 그런데 수치표고모형을 위한 컴퓨터의 보급과 계산기능의 발달에도 불구하고 토공량 계산방법은 舊방법인 사다리꼴법칙이나 좌표법, 등간격의 심프슨법칙으로만 면·체적을 구하고 있다. 그리고 지금까지는 각 이론식의 검정방법으로 절대값에 가까운 최확값을 구할수 없어서 지거간격을 아주 작게 取하는 방법이나 미리 정해진 2~3차식의 수학적 곡선을 면적 적분하거나, 모형수조 속에 표준사를 넣어서 기준 값으로 취하여 검산하는 방법 등 별 다른 방안이 없었다.

따라서 본 연구에서는 불규칙적이고 변화가 심한 지형표면의 전체 경계식을 선형과 비선형으로 분리

하여 계산식을 유도하기로 한다. 그리고 수치시물레이션에 의한 4가지의 실험대상지형을 만들어 간격을 달리한 후, ①점고법 ②Chamber법 ③Chen과 Lin법 ④ 최소제곱법을 적용한 후 각 식의 특징을 비교한다. 아울러 신속하고도 간편한 적용을 위하여 MATLAB과 DELPHI에 의하여 컴퓨터 프로그래밍 하였으며, 또한 각 이론식들의 결과에 대한 정확도를 검정하기 위한 실험지형의 최확값을 지금까지 연구와는 달리 x, y 함수식에 의한 3차원의 증적분에 의한 수학적 절대값을 구하여 비교함으로써 이론식의 검정을 보다 정확하게 비교할 수 있도록 하였다.

1.2 연구의 연혁

토공량계산에서 가장 중요한 것은 실제 지형표면의 형상과 부합되는 경계식의 결정인데 1980년도 이전에는 주로 1차 선형식에 기초로한 사다리꼴법칙이나 좌표법이 주된 방법이었다. 지형표면의 비선형 해석은 1983년 Amed가 변곡점을 고려한 2차포물선과 1차직선을 혼합한 면적식을 제시하였고¹⁾ 그밖에 불규칙한 지형의 해석은 1983년 Hoffman²⁾, 1984년 Wolf³⁾, Wheatly⁴⁾, 1985년 Wong⁵⁾의 연구가 있었고, 1987년 M.E.L. Hassan은 보간다항식에 의해 Simpson 제 2법칙을 해석하여 사다리꼴 법칙과 면적계산을 비교하였다.⁶⁾ 1988년 Easa는 Lagrange 다항식에 의한 Simpson 제 1법칙을 유도한 후 다시 부등간격에 적용이 용이하도록 응용하였다. 그리고 실제 수치 예를 들었는데 구간을 짝수구간으로 나누어 변곡점을 고려한 부등간격의 면적계산을 하였으며, 짝수구간이외 나머지 남은 1구간의 경계식은 미분식으로 스무싱하여 구하였다.⁷⁾ 1989년 D.W. Chambers는 등간격의 Easa법칙을 이용하여 중·횡단 경계식을 보간다항식에 의한 심프슨법칙을 유도한 후 x, y 방향으로 구간이 2개면 심프슨1법칙, 3개면 심프슨2법칙에 의한 각 방향에 증적분으로 이들의 비선형 부등간격에 의한 점고법으로 토공량을 구하였다.⁸⁾ 1991년 Easa는 원추형의 체적계산식을 유도하였고, 양단면평균법의 결점은 절·성토단면의

양단의 면적차이가 크면 큰 오차를 수반한다고 하였으며 그리고 Chen과 Lin은 3차 Spline보간다항식을 이용하여 절토량을 구하는 식을 개발하였고, 수학적 증적분에 의한 2종류의 모형지형을 개발하여 확고한 절대값을 기준으로 하여 점고법과 Chamber법과의 정확도를 비교분석 하였다.⁹⁾ 국내의 1980년대 중반부터 1990년대 말까지 토공량계산에 대한 직접적인 이론에 대한 연구보다 과거의 단순한 식 즉, 좌표법, 양단면평균법, 심프슨 1, 2법칙을 초연구(예측모델연구, 초구장의 규모 결정, 도로의 최적노선선정, 수치 표고모형의 정확도비교 등)의 결과비교를 위하여 간단히 이용하는 수준에 불과하였다.¹⁰⁾⁻¹⁶⁾

2. 수치해석에 의한 토공량 계산

2.1. 선형 점고법

두 연속점 f_0 와 f_1 을 지나는 1차 다항식의 면적은

$$A = \frac{h}{2} (f_0 + f_1) \quad (2.1)$$

이며 단위 격자의 토공량(체적)을 계산하기 위해 적분하면 다음 식과 같다.

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy dx \quad (2.2)$$

식(2.2)에서 y 에 대한 적분을 하면

$$V = \frac{h}{2} \left[\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_0) dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1) dx \right] \quad (2.3)$$

이 되고, 다시 x 에 대한 적분을 하여 토공량(체적)을 구하면 식(2.4)와 같다.

$$V = \frac{h^2}{4} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_1, y_1)] \quad (2.4)$$

여기서 $f(x_i, y_j)$ 를 f_{ij} 로 놓으면

$$V = \frac{h^2}{4} [(f_{00} + f_{01} + f_{10} + f_{11})] \text{ 이 된다.}$$

격자 간격이 m 과 n 일 때 전체 토공량(체적) V 는

$$V = \frac{h^2}{4} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} f_{ij} \quad (2.5)$$

이 되고, 여기서 a_{ij} 는 아래의 행렬과 같다

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \dots & 4 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & \dots & 4 & 2 \\ 1 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Chamber법

1988년 Easa의 등간격식을 응용하였는데 지형을 사각형블록으로 놓고 변곡점을 고려하여 부등간격으로 x 와 y 축에 평행하게 각각 m 과 n 간격으로 나눈다. 다시 말해 x 축을 따라 가로폭 길이 h_0, h_1, \dots, h_{m-1} 과 y 축을 따라 세로폭 길이 k_0, k_1, \dots, k_{n-1} 를 최대 최소점을 고려하여 격자를 일정 크기로 나눈다.

2.2.1 격자간격이 2×2 일 경우 체적(V)

가로축(x)의 격자간격을 h_0 와 h_1 라하고 세로축(y)의 격자간격을 k_0 와 k_1 이면 표고높이 즉, 절토고를 $f(x, y)$ 로 놓고 증적분으로 체적을 구한다.

이것은 x, y 양방향에 대해 지거의 수가 3개씩이므로 2차식 각각 놓고 적분한다.

$$V_1 = \int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} f(x, y) dy dx \quad (2.6)$$

그리고 경계식을 부등간격의 심프슨 제1법칙을 적용하여 적분하면 다음과 같다.

$$V_1 = \frac{(k_0 + k_1)}{6} \frac{(h_0 + h_1)}{6} \left\{ \frac{(2k_0 - k_1)}{k_0} \right.$$

$$\left[\frac{(2h_0 - h_1)}{h_0} f_{00} + \frac{(h_0 + h_1)^2}{h_0 h_1} f_{10} + \frac{(2h_1 - h_0)}{h_1} f_{20} \right] \\ + \frac{(k_0 + k_1)^2}{k_0 k_1} \left[\frac{(2h_0 - h_1)}{h_0} f_{01} + \frac{(h_0 + h_1)^2}{h_0 h_1} f_{11} \right. \\ \left. + \frac{(2h_1 - h_0)}{h_1} f_{21} \right] + \frac{(2k_1 - k_0)}{k_1} \left[\frac{(2h_0 - h_1)}{h_0} f_{02} \right. \\ \left. + \frac{(h_0 + h_1)^2}{h_0 h_1} f_{12} + \frac{(2h_1 - h_0)}{h_1} f_{22} \right] \quad (2.7)$$

이것을 일반식으로 나타내면 식(2.8)과 같다.

$$V_1 = \frac{(k_0 + k_1)(h_0 + h_1)}{6} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_{i,j} c_{i,j} \quad (2.8)$$

여기서,

$$a_0 = \frac{(2h_0 - h_1)}{h_0}, \quad a_1 = \frac{(2h_0 - h_1)^2}{h_0 h_1}, \\ a_2 = \frac{(2h_0 - h_1)}{h_1} \text{ 이고, } c_0 = \frac{(2k_0 - k_1)}{k_0}, \\ c_1 = \frac{(2k_0 - k_1)^2}{k_0 k_1}, \quad c_2 = \frac{(2k_0 - k_1)}{k_1} \text{ 이다.}$$

2.2.2 격자간격 가로(3)×세로(2)의 체적(V)

$$V_2 = \int_{x_0}^{x_3} \int_{y_0}^{y_2} f(x, y) dy dx \quad (2.9)$$

그리고 가로축은 지거의 수가 4개이므로 부등간격의 심프슨2법칙, 세로축의 경계선은 부등간격의 심프슨 제1법칙으로 가정하여 적분하면 다음과 같다.

$$V_2 = \frac{(k_0 + k_1)}{6} \frac{(h_0 + h_1 + h_2)}{12} \left\{ \frac{(2k_0 - k_1)}{k_0} \right. \\ \left[\frac{(3h_0^2 - h_1^2 + h_2^2 + 2h_0 h_1 - 2h_0 h_2)}{h_0(h_0 + h_1)} f_{00} \right. \\ \left. + \frac{(h_0 + h_1 + h_2)^2 (h_0 + h_1 - h_2)}{h_0 h_1 (h_0 + h_1)} f_{10} \right. \\ \left. + \frac{(h_0 + h_1 + h_2)^2 (h_1 + h_2 - h_0)}{h_0 h_1 (h_0 + h_1)} f_{20} \right. \\ \left. + \frac{(k_0 + k_1)^2}{k_0} \left[\frac{(3h_0^2 - h_1^2 + h_2^2 + 2h_0 h_1 - 2h_0 h_2)}{h_0(h_0 + h_1)} f_{01} \right. \right. \\ \left. + \frac{(h_0 + h_1 + h_2)^2 (h_0 + h_1 - h_2)}{h_0 h_1 (h_0 + h_1)} f_{11} \right. \\ \left. + \frac{(h_0 + h_1 + h_2)^2 (h_1 + h_2 - h_0)}{h_0 h_1 (h_0 + h_1)} f_{21} \right. \\ \left. + \frac{(2k_1 - k_0)}{k_1} \left[\frac{(3h_0^2 - h_1^2 + h_2^2 + 2h_0 h_1 - 2h_0 h_2)}{h_0(h_0 + h_1)} f_{02} \right. \right. \\ \left. + \frac{(h_0 + h_1 + h_2)^2 (h_0 + h_1 - h_2)}{h_0 h_1 (h_0 + h_1)} f_{12} \right. \\ \left. + \frac{(h_0 + h_1 + h_2)^2 (h_1 + h_2 - h_0)}{h_1 h_2 (h_0 + h_1)} f_{22} \right. \\ \left. + \frac{(h_0^2 - h_1^2 + 3h_2^2 - 2h_0 h_2 + 2h_1 h_2)}{h_2 (h_1 + h_2)} f_{32} \right] \quad (2.10)$$

위의 식을 간단히 놓으면 다음 식과 같다.

$$V_2 = \frac{(k_0 + k_1)(h_0 + h_1 + h_2)}{72} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 b_{i,j} c_{i,j} \quad (2.10)$$

$$b_0 = \frac{(3h_0^2 - h_1^2 - h_2^2 + 2h_0 h_1 - 2h_0 h_2)}{h_0(h_0 + h_1)}, \\ b_1 = \frac{(h_0 + h_1 + h_2)^2 (h_0 + h_1 - h_2)}{h_0 h_1 (h_1 + h_2)}, \\ b_2 = \frac{(h_0 + h_1 + h_2)^2 (h_1 + h_2 - h_0)}{h_1 h_2 (h_0 + h_1)}, \\ b_3 = \frac{(h_0^2 - h_1^2 + 3h_2^2 - 2h_0 h_2 + 2h_1 h_2)}{h_2 (h_1 + h_2)}$$

2.2.3 격자간격 가로(2)×세로(3)의 체적(V)

이것은 x방향에 관한 경계식은 부등간격의 심프슨 1법칙, y방향은 부등간격의 심프슨 2법칙으로 가정하여 각각 적분한다.

$$V_3 = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_3} f(x, y) dy dx \quad (2.11)$$

일반식은 다음과 같다.

$$V_3 = \frac{(k_0 + k_1 + k_2)(h_0 + h_1)}{72} \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^2 a_i d_i f_{ij} \quad (2.12)$$

$$d_0 = \frac{(3k_0^2 - k_1^2 + k_2^2 + 2k_0k_1 - 2k_0k_2)}{k_0(k_0 + k_1)}$$

$$d_1 = \frac{(k_0 + k_1 + k_2)^2(k_0 + k_1 - h_2)}{k_0k_1(k_1 + k_2)}$$

$$d_2 = \frac{(k_0 + k_1 + k_2)^2(k_1 + k_2 - k_0)}{k_1k_2(k_0 + k_1)}$$

$$d_3 = \frac{(k_2^2 - k_1^2 + 3k_2^2 - 2k_0k_2 + 2k_1k_2)}{k_2(k_1 + k_2)}$$

2.2.4 격자간격 가로(3)×세로(3)의 체적(V)

이것은 x, y방향에 관한 경계식은 모두 심프슨 2법칙으로 가정하여 각각 적분한다.

$$V_4 = \int_{x_0}^{x_3} \int_{y_0}^{y_3} f(x, y) dy dx \quad (2.13)$$

일반식은 다음과 같다.

$$V_4 = \frac{(k_0 + k_1 + k_2)(h_0 + h_1 + h_2)}{144} \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^2 b_i d_i f_{ij}$$

여기서 b_i와 d_i는 위의 식과 같다.

2.3 Chen과 Lin법

2.3.1 3차 spline 면적식

간격(x_j, x_{j+1})에서 3차 spline 다항식 S_j(x)는 다음과 같다. 면적A_j는 이것을 적분하면 된다.

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) - c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

$$A_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} [a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3] dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} d_j(x - x_j)^3 dx \quad (2.14)$$

위의 식을 이용하면 곡선 ab아래의 x축(x₀, x_n)에서 빗금친 면적을 계산하면 아래와 같다.

$$A = \int_{x_0}^{x_n} S(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} A_j \quad (2.15)$$

위 식은 3차 spline 면적식이다.

2.3.2 3차 spline 체적식

위에서 다시 m(x)과 n(y)간격으로 나누고 교점(x_i, y_j)에서 절토 깊이가 f_{ij}이다. 간격[(x_i, y₀), (x_i, y_n)]에서 앞의 3차 spline 다항식을 이용하면 x방향에서 3차 다항식 S_{i,0}, S_{i,1},..., S_{i,n-1}을 유도할 수 있다.

이들 3차 spline 다항식은 (S_{i,j})_{j=0}ⁿ⁻¹로 나타낼 수 있다.

$$(S_{i,j})_{j=0}^{n-1} = a_{i,j} + b_{i,j}(y - y_j) + c_{i,j}(y - y_j)^2 + d_{i,j}(y - y_j)^3 \quad (2.16)$$

마찬가지로 (S_{i,j})_{i=0}^m, _{j=0}ⁿ⁻¹로 표시되는 x = x₀, x₁,...,과 x = x_m방향에서(m+1) × n 3차 spline 다항식을 얻을 수 있다.

위의 식을 이용하여 점 f_{0,k}, f_{1,k},..., f_{m,k}와 간격[(x₀, y_k), (x_m, y_k)]에서 기선 y = y_k(z=0)을 통과하는 곡선사이의 면적을 계산하기 위한 식 A_{y_k}는

$$A_{y_k} = \int_{x_0}^{x_m} (S_{i,j})_{i=0}^{m-1}(x) dx \quad (2.17)$$

이다. 마찬가지로 점 f_{0,k+1}, f_{1,k+1},..., f_{m,k+1}와 간격[(x₀, y_{k+1}), (x_m, y_{k+1})]에서 기선 y = y_{k+1}(z=0)을 통과하는 곡선사이의 면적 A_{y_{k+1}}은

$$A_{y_{k+1}} = \int_{x_0}^{x_m} (S_{i,k+1})_{i=0}^{m-1}(x) dx \quad (2.18)$$

이다. 이들 두 평행선 $y = y_k$ 와 $y = y_{k+1}$ 사이의 거리가 매우 작다고 가정하면 즉, $\Delta y = y_{k+1} - y_k$ 가 0에 가깝다면 A_{y_k} 와 $A_{y_{k+1}}$ 사이의 절토량을 계산하기 위하여 아래와 같이 양단면법을 이용하는 것이 합리적이다.

$$V = \frac{(A_{y_k} + A_{y_{k+1}})\Delta y}{2} \quad (2.19)$$

절토량을 계산하기 위한 식은

$V = \sum V_k$ 이 되고 식은 3차 spline 체적식으로 정의된다.

2.4 최소제곱

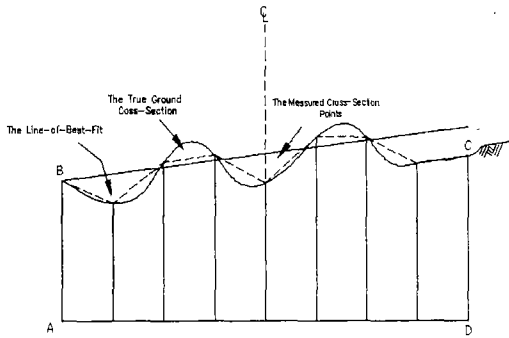


Fig. 1 Actual ground cross section

Fig.1에서 선 LR을 단면 점들의 최적선이라 하면 LR의 방정식은 $y=ax+b$ 로 계수 a, b를 결정하면 단면의 표고 y를 구할 수 있다. 매개변수 a, b를 계산하기 위한 일반 방정식은 다음과 같다.

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (2.20)$$

$$b = \frac{-\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (2.21)$$

위의 방정식에서 매개변수 a와 b의 값은 단면마다 표고자료가 다르므로 달라진다. 만약 그림에서 x좌표의 M점에서 표고자료를 Y_{M1} 라 하면 최적직선식에 의하여 이것은 새로운 점 Y_{M2} 로 교체될 수 있다. Y_{M2} 의 방정식은

$$Y_{M2} = aX_M + b \quad (2.22)$$

가 된다. 여기서 X_M 은 단면점 M의 x좌표이다. 동일단면 상의 다른점의 표고는

식(2.22)를 이용하여 이 점의 x좌표를 결정하여 구한다.

3. 실험 및 고찰

본 연구의 실험을 위한 대상지형은 지금까지의 방법과는 달리 절대값에 가까운 정확도를 구하기 위하여 아래의 수학적 함수식(Z)에 의한 표고자료로서 전체의 모형지형을 만든다. 또한, 앞의 이론식에 대한 정확한 비교를 위하여 직접 중적분에 의하여 실제의 총절토량을 구하여 정확도의 기준으로 하였다. 여기서 실험1,2의 지형은 굴곡 없이 진행하다가 지형 끝에서 갑자기 상승(절벽)하는 지형이다.

3.1 실험 1

가로축(x) 전체길이가 120m 이고 세로축(y)이 90m인 경우, 표1과 같이 불규칙적으로 격자를 나누었으며 단면아래의 함수식(Z)에 의하여 표고자료를 구하고 전체의 절토량(V)을 구하였다.

$$Z = F(x, y) = \frac{\sqrt{400 + y^2}}{y}$$

$$V = \int_1^{91} \int_1^{121} \left(\frac{\sqrt{400 + y^2}}{y} \right) dx dy = 17, 109.13 \text{ m}^3$$

격자간격을 다르게 하여 case1(5×6: x간격은 15m, 25m, 10m, 40m, 30m 그리고 y간격은 각15m),

case2(5×6: x간격은 24m, 그리고 y간격은 10m, 20m, 10m, 30m, 10m, 10m), case3(5×6: x간격은 15m, 25m, 10m, 40m, 30m,, 그리고 y간격은 10m, 20m, 10m, 30m, 10m, 10m)으로서 3가지 지형의 경우에 대하여 각 방법을 적용한다.

3.2 실험 2

실험2에서는 아래의 함수식에 의하여 표고를 구하며 간격을 달리하여 토공량을 계산하였다.

Table 1 Heights data of x, y interval for numerical example 1, case1

| y \ x | 1m | 16m | 41m | 51m | 91m | 121m |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1m | 20.02 | 20.02 | 20.02 | 20.02 | 20.02 | 20.02 |
| 16m | 1.60 | 1.60 | 1.60 | 1.60 | 1.60 | 1.60 |
| 31m | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 |
| 46m | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 |
| 61m | 1.05 | 1.05 | 1.05 | 1.05 | 1.05 | 1.05 |
| 76m | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.03 |
| 91m | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 |

Table 2 Heights data of x, y interval for numerical example 1, case2

| y \ x | 1m | 25m | 49m | 73m | 97m | 121m |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1m | 20.02 | 20.02 | 20.02 | 20.02 | 20.02 | 20.02 |
| 11m | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 |
| 31m | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 |
| 41m | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 |
| 71m | 1.04 | 1.04 | 1.04 | 1.04 | 1.04 | 1.04 |
| 81m | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.03 |
| 91m | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 |

Table 3 Heights data of x, y interval for numerical example 1, case3

| y \ x | 1m | 16m | 41m | 51m | 91m | 121m |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1m | 20.02 | 20.02 | 20.02 | 20.02 | 20.02 | 20.02 |
| 11m | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 |
| 31m | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 |
| 41m | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 |
| 71m | 1.04 | 1.04 | 1.04 | 1.04 | 1.04 | 1.04 |
| 81m | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.03 |
| 91m | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 |

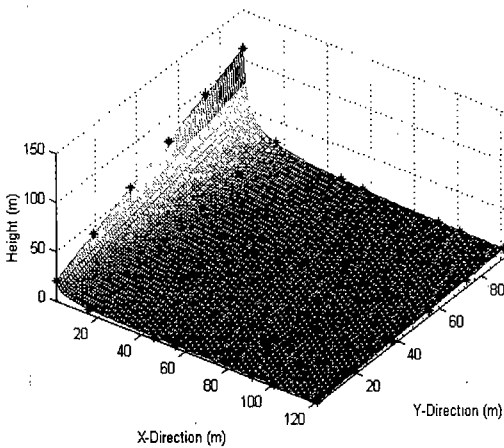


Fig. 2 Digital terrain model of

$$Z = F(x, y) = \frac{\sqrt{400 + y^2}}{y}$$

$$Z = F(x, y) = \frac{(20 + y)}{\sqrt{x}}$$

여기서 x와 y의 범위는 $1 \leq x \leq 121$, $1 \leq y \leq 91$ 이고, x와 y의 간격은 부등간격이다.

$$V = \int_1^{91} \int_1^{121} \frac{20 + y}{\sqrt{x}} dx dy = 118,800.00 \text{ m}^3$$

격자간격을 다르게 하여 case1(6×5: x는 각 20m, y간격은 각 25m, 10m, 30m, 15m, 10m), case2(6×5 : x는 각 15m, 30m, 10m, 35m, 10m, 20m y간격은 각 18m), case3(6×5 : x간격은 각 15m, 30m, 10m, 35m, 10m, 20m, 그리고 y간격은 각 25m, 10m, 30m,

Table 4 Heights data of x, y interval for numerical example 2, case1

| y \ x | 1m | 21m | 41m | 61m | 81m | 101m | 121m |
|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1m | 21.00 | 4.58 | 3.28 | 2.69 | 2.33 | 2.09 | 1.91 |
| 26m | 46.00 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 |
| 36m | 56.00 | 12.22 | 8.75 | 7.17 | 6.22 | 5.57 | 5.09 |
| 66m | 86.00 | 18.77 | 13.43 | 11.01 | 9.56 | 8.56 | 7.82 |
| 81m | 101.00 | 22.04 | 15.77 | 12.93 | 11.22 | 10.05 | 9.18 |
| 91m | 111.00 | 24.22 | 17.34 | 14.21 | 12.33 | 11.05 | 10.09 |

Table 6 Heights data of x, y interval for numerical example 2, case3

| y \ x | 1m | 16m | 46m | 56m | 91m | 101m | 121m |
|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1m | 21.00 | 5.25 | 3.10 | 2.81 | 2.20 | 2.09 | 1.91 |
| 26m | 46.00 | 11.50 | 6.78 | 6.15 | 4.82 | 4.58 | 4.18 |
| 36m | 56.00 | 14.00 | 8.26 | 7.48 | 5.87 | 5.57 | 5.09 |
| 66m | 86.00 | 21.50 | 12.68 | 11.49 | 9.02 | 8.56 | 7.82 |
| 81m | 101.00 | 25.25 | 14.89 | 13.50 | 10.59 | 10.05 | 9.18 |
| 91m | 111.00 | 27.75 | 16.37 | 14.83 | 11.64 | 11.05 | 10.09 |

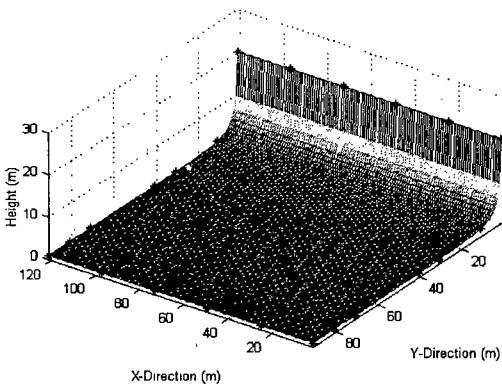


Fig. 3 Digital terrain model of

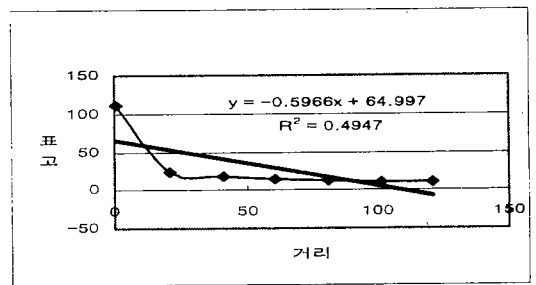
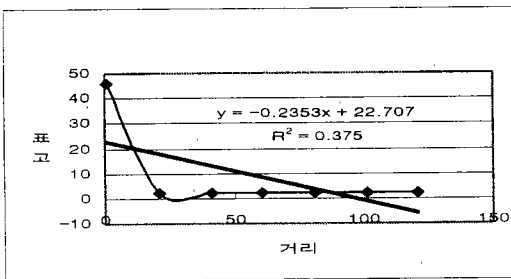
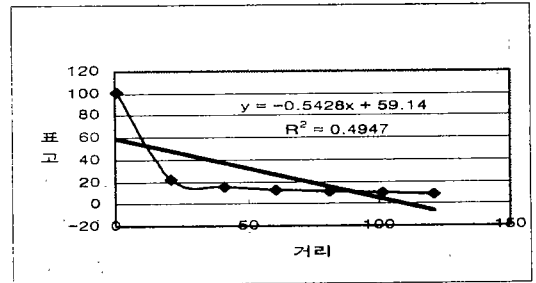
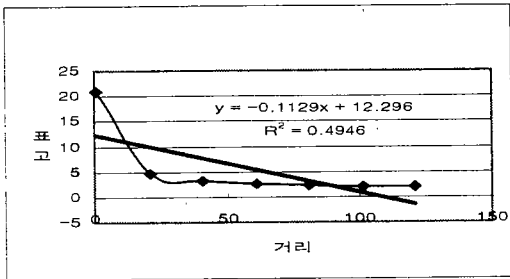
$$Z = F(x, y) = \frac{(20 + y)}{\sqrt{x}}$$

Table 5 Heights data of x, y interval for numerical example 2, case2

| y \ x | 1m | 16m | 46m | 56m | 91m | 101m | 121m |
|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1m | 21.00 | 5.25 | 3.10 | 2.81 | 2.20 | 2.09 | 1.91 |
| 19m | 39.00 | 9.75 | 5.75 | 5.21 | 4.09 | 3.88 | 3.55 |
| 37m | 57.00 | 14.25 | 8.40 | 7.62 | 5.98 | 5.67 | 5.18 |
| 55m | 75.00 | 18.75 | 11.05 | 10.02 | 7.86 | 7.46 | 6.82 |
| 73m | 93.00 | 23.25 | 13.71 | 12.43 | 9.75 | 9.25 | 8.45 |
| 91m | 111.00 | 27.75 | 16.37 | 14.83 | 11.64 | 11.05 | 10.09 |

Table 7 Earthwork errors of case1,2,3 for numerical example1, 2

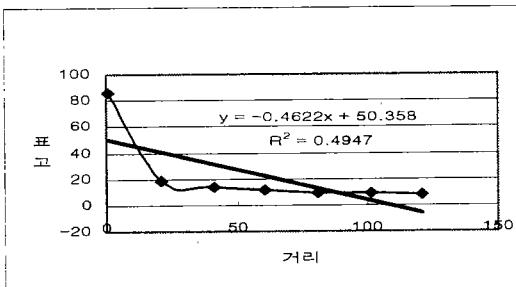
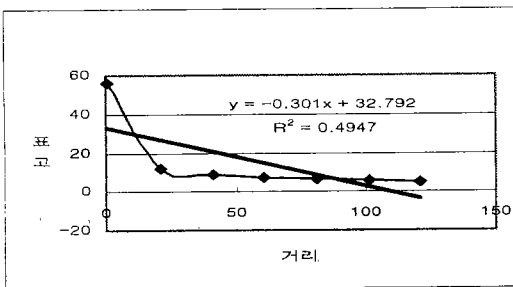
| 적용예 | | 실험1 | | |
|------------------------|----------------------|------------|------------|------------|
| 실제토공량(m ³) | | 17,109.13 | | |
| | | case1 | case2 | case3 |
| 점고법 | 토공량(m ³) | 29,664.00 | 24,906.00 | 24,018.00 |
| | 오차(%) | 73.381 | 45.571 | 40.381 |
| Chambers법 | 토공량(m ³) | 28,017.84 | 18,925.67 | 20,765.66 |
| | 오차(%) | 63.760 | 10.617 | 21.371 |
| Chen과 Lin법 | 토공량(m ³) | 26,178.85 | 18,076.02 | 18,076.02 |
| | 오차(%) | 53.011 | 5.651 | 5.651 |
| 최소자승법 | 토공량(m ³) | 29,817.00 | 24,519.00 | 24,519.00 |
| | 오차(%) | 74.280 | 43.310 | 43.310 |
| 적용예 | | 실험2 | | |
| 실제토공량(m ³) | | 118,800.00 | | |
| | | case1 | case2 | case3 |
| 점고법 | 토공량(m ³) | 149,009.30 | 141,614.50 | 141,613.80 |
| | 오차(%) | 25.429 | 19.204 | 19.204 |
| Chambers법 | 토공량(m ³) | 153,560.50 | 122,819.80 | 137,153.80 |
| | 오차(%) | 29.251 | 3.384 | 15.449 |
| Chen과 Lin법 | 토공량(m ³) | 139,567.80 | 122,008.90 | 121,859.90 |
| | 오차(%) | 17.481 | 2.701 | 2.576 |
| 최소자승법 | 토공량(m ³) | 178,025.76 | 190,359.50 | 190,374.40 |
| | 오차(%) | 49.850 | 60.240 | 60.250 |



(a)

(c)

Fig. 4 Line of best fit for cross section of numerical example 2, case1



(b)

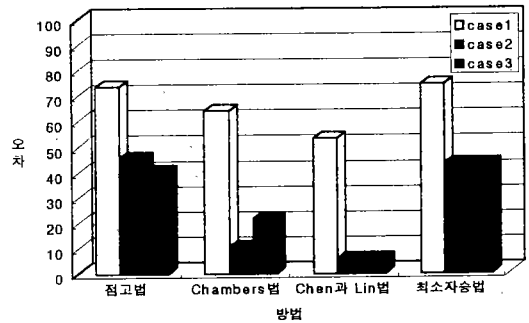


Fig. 5 Earthwork errors of case1,2,3 for numerical example1

15m, 10m)으로서 3가지 지형의 경우에 대하여 각 방법을 적용한다.

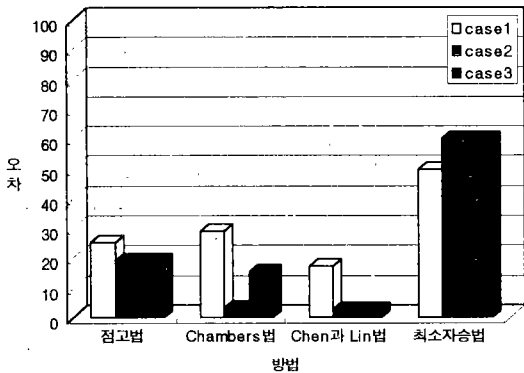


Fig. 6 Earthwork errors of case1,2,3 for numerical example 2

Fig.5와 6에서 나타난 것처럼 실험1과 2의 지형의 형태는 수평에 가깝게 진행되다가 끝점에서만 갑자기 심하게 융기하는 지형이다. 실험1의 case1은 spline방법에 의한 Chen과 Lin법이 가장 정확하였으며 그 다음 경계를 2, 3차식으로 가정한 Chamber법, 그 다음 점고법과 최소제곱법順 이었다. 가장 정확한 Chen과 Lin법과 가장 오차가 큰 최소제곱법과의 오차 차이는 21%나 되었다. 실험1의 case2는 역시 Chen과 Lin법이 가장 정확하였으며 Chamber법-최소제곱법-점고법順 이었다. 가장 정확한 Chen과 Lin법과 가장 오차가 큰 점고법과의 오차 차이는 무려 40%나 되었다. 실험1의 case3은 역시 Chen과 Lin법이 가장 정확하였으며 Chamber법-점고법-최소제곱법順 이었다. 가장 정확한 Chen과 Lin법과 가장 오차가 큰 최소제곱법과의 오차의 차이는 38%나 되었다. 실험2의 case1은 Chen과 Lin법이 가장 정확하였으며 점고법-Chamber법-최소제곱법順 이었다. 가장 정확한 Chen과 Lin법과 가장 오차가 큰 최소제곱법과의 오차의 차이는 32%나 되었다. 실험2의 case2는 Chen과 Lin법이 가장 정확하였으며 Chamber법-점고법-최소제곱법順 이었다. 가장 정확한 Chen과 Lin법과 가장 오차가 큰 최소제곱법과의 오차의 차이는 무려57%나 되었다. 실험2의 case3은 Chen과 Lin법이 가장 정확하였으며 Chamber법

-점고법-최소제곱법順 이었다. 가장 정확한 Chen과 Lin법과 가장 오차가 큰 최소제곱법과의 오차의 차이는 58%나 되었다.

최소제곱법의 오차가 대체로 큰 편인데 이것은 표고가 갑자기 급격히 변하는 지형에서는 최소제곱법의 체적식이 변화율에 민감하게 대처하지 못하기 때문에 생기는 결과이다.

그런데 case1에서는 원래지형이 1차 직선이므로 곡선식의 보간법을 적용하여도 별로 효과가 없으므로 오차를 더 이상 줄일 수가 없었다. 또한, 제시된 방법을 적용할 때 굴곡이 급격하게 변하는 지역에서는 격자간격(표고자료)을 줄여서 오차를 줄여야 하며 그 예로 크기가 15×30으로 넓게 취하였기 때문에 case2(24×10)와 case3(30×10)보다 오차가 더 크게 나타났다.

이상에서 경계식을 1차 식으로 가정하는 점고법과 최소제곱법은 이론상 오차를 많이 내포할 수 있으므로 Chamber법, Chen과 Lin법처럼 2, 3차 곡선식에 의한 보간법 적용 식이 정확도가 높으며 효율적임을 알 수 있었다.

4. 결 론

지금까지 경계식을 1차 식에서 고차식으로 가정하여 수치적분한 토공량 계산식의 정확도 비교를 하여본 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 점고법, Chamber법, Chen과 Lin법, 최소제곱법을 신속하고도 간편하게 적용하기 위하여 컴퓨터 프로그래밍 하였다. 그리고 이론식의 올바른 검정을 위하여 지형의 형태와 확인용 기준 토공량을 주어진 수학적식으로 절대값에 가깝도록 인위적으로 구할 수 있으므로 앞으로 토공량식의 결과 비교를 더욱 정확하게 할 수 있도록 하였다.

2. 실험1의 지형에서 spline 보간법에 의한 Chen과 Lin법은 Chamber법 보다 약 5~10%, 점고법 보다 약 20~35%, 최소제곱법 보다 약 21~38%가 더 정확하였고, 실험2의 지형은 Chen과 Lin법이

Chamber법 보다 약 0.7%~13%, 점고법보다 약 8%~17%, 최소제곱법보다 약 32~58%가 더 정확하였다. 따라서 경계식을 1차 식으로 가정하는 점고법과 최소제곱법은 현장상황을 신속히 대처할 수 없고, 수식의 이론상 오차를 많이 내포할 수 있으므로 Chamber법, Chen과 Lin법처럼 2, 3차 곡선식에 의한 보간법 적용식이 정확도가 높으며 효율적임을 알 수 있었다

3. 지형의 변화가 1차 직선(수평)으로 진행되는 평탄한 지역에서는 spline보간법의 장점을 살리기 위하여 지형끝점에서 갑자기 융기하는 돌출된 지형에서는 격자점 간격을 가능한 좁게 취하여 표고자료를 구하여 계산해야 Chen과 Lin법 그리고 제시된 방법의 정확도를 향상시킬 수 있음을 알았다.

참고문헌

- 1) F.A., Ahmed, Area computation using salient boundary points, J.Surveying Engrg., ASCE, 109(1), 1983, pp. 54~63.
- 2) Hoffman, L. D., Applied Calculus. McGraw-Hill, New York, N.Y., 1983, pp. 265~268.
- 3) Binker, R. C., and Wolf, P. R., Elementary Surveying. Harper and row, New York, N.Y., 1984, pp. 245~254.
- 4) Gerald, C. F., and Wheatly, P. O., Applied Numerical Analysis. Addison-Wesley, Menlo Park, Calif., 1984, pp. 248~256.
- 5) Schmidt, M. O., and Wong, K. W., Fundamentals of Surveying. PWS, Boston, Mass., 1985, pp. 377~385.
- 6) I.M., El Hassan, Irregular boundary area computation by simpson's 3/8 rule, J.Surveying Engrg., ASCE, 113(3), 1987, pp. 127~132.
- 7) S.M., Easa, Area of irregular region with unequal intervals, J.Surveying Engrg., ASCE, 114(2), 1988, pp. 50~58.
- 8) D.W., Chambers, Estimating pit excavation volume using unequal intervals, J.Surveying Engrg., ASCE, 115(4), 1989, pp. 390~401.
- 9) Chen, C. S., Lin, H. C., Estimating pit-excavation volume using cubic spline volume formula, J. Surveying Engrg., ASCE, 117(2), 1991, pp. 51~66.
- 10) 오창수, "수치지형 모델에 의한 토공량계산 정확도의 예측모델에 관한 연구", 한국측지학회지, 제 5권, 제1호, 1987, pp.49~58.
- 11) 조영호, "수치지형 모델을 이용한 도로의 토공량산정에 관한 연구", 한국측지학회지, 제7권, 제2호, 1989, pp.7~19.
- 12) 유복모, 박운용, 권현, 문두열, "수치지형모형에 있어서 지형의 분석과 조합보간법의 적용에 관한 연구", 한국측지학회지, 제8권, 제2호, 1990, pp.53~61.
- 13) 유복모, 조기성, 박성규, "사진측량을 이용한 초구장 기본계획에 관한 연구", 한국측지학회지, 제 8 권, 제1호, 1990, pp.31~40.
- 14) 유복모, 윤용택, 이현직, "사진측량을 이용한 토공량 결정에 관한 연구", 한국측지학회지, 제 8 권, 제1호, 1990, pp.41~50.
- 15) 정영동, "수치지형모형의 정확도 향상을 위한 보간법 적용", 단국대학교 대학원박사학위 논문, 1991.
- 16) 이용희, 문두열, "海岸埋立을 위한 土工量 算定에 관한 研究", 한국항만학회지, 제11권, 제2호, 1997.