인과 2D 은닉 마르코프 모델
(Causal 2D Hidden Markov Model)

신 봉 기 †
(Bong-Kee Sin)

요 약 2D로 확장한 HMM은 다수 제안되었지만 엄밀한 의미에 있어서 2D HMM이라고 하기에 부족한 점이 많다. 본 논문에서는 기존의 랜덤 필드 모형이 아닌 새로운 2D HMM을 제안한다. 상하 및 좌우 방향의 causal chain 관계를 가정하고 완전한 격자 형성 조건을 두어 2D HMM의 평가, 매개 변수를 추정하는 알고리즘을 제시하였다. 각각의 알고리즘은 동적 프로그래밍과 최우 추정법에 근거한 것이다. 변수 추정 알고리즘은 반복적으로 이루어지며 국소 최적치에 수렴함을 보였다.

Abstract Although a number of variants of 2D HMM have been proposed in the literature, they are not HMM in a rigorous sense. Distinct from the prevalent but oversimplified Markov random field, the new proposed model is a hidden Markov mesh chain or a 2D HMM with the causality of top-down and left-right direction. With lattice constraints, the algorithms for model estimation and maximum likelihood estimation of model parameters are developed in theoretical perspective. The latter algorithm is carried iteratively, and shown to converge to and produce a local optimum parameter set.

1. 서 론

은닉 마르코프 모델(Hidden Markov Model, 이하 HMM)은 어떤 객체의 다양한 변이를 표현하는 통계적 모형의 하나로써 패턴 인식 분야에서 가장 널리 사용되는 모형 중의 하나이다. 그러나 HMM은 시계열과 같이 어떤 상대적 순서가 내재된 1D 신호에만 적합한 모델이다. 따라서 1D에서의 성공에 자극을 받아 2D에 맞는 HMM이나 또는 HMM을 적절히 변형한 형태를 연구하기 시작하였다.

역사적으로는 뒤늦게 최근에 나온 모델이지만 오히려 단순화된 통계적 모델은 Pseudo-2D HMM(이하 P2DHMM)이다 [1,2]. 이 것은 도식상으로 볼 때에만 2차원인 모형이며 실제로는 이단계 계층 구조의 일차원 모형이라고 할 수 있다. 실제로 P2DHM은 수직 1비트의 프레임의 열을 관찰 심볼 또는 벡터로 코딩한 1D HMM과 별로 차이가 없다 [3]. P2DHMM은 인쇄체 문자 영상과 같이 참조 모형에서 변형이 심하지 않은 경우 효과를 볼 수 있다. 그러나 비선형 모션 필드(optical flow)나 필기체 글자처럼 심한 비선형 변형의 경우에는 사용하기 어렵다 [4].

본격적인 2차원 영상 모형은 70년대 들어 응용되기 시작한 마르코프 랜덤 필드(Markov Random Field, 이하 MRF) 또는 Gibbs 랜덤 필드(Gibbs Random Field)이다. 잡영으로 손상된 영상의 복구 [5], 텍스쳐 모델링 [6] 등 영상 처리 분야에서 주로 활용되지만 영상 인식, 언어처리 등 고차 정보처리에 이르기까지 다양한 분야에서 널리 활용되어온 유명한 모델이 마르코프 랜덤 필드이다 [7, 8, 9]. Gibbs 랜덤 필드 [10], 메쉬(mesh) 랜덤 필드[11] 등의 용어가 사용되기도 하는 데서 짐작할 수 있듯이 다양한 변형의 모델과 다양한 방법의 매개변수 추정 방법이 제안되어있다 [12, 13, 14]. 그러나 이들 모델은 모두 랜덤 필드에 근거한 것이다. 따라서 잡영을 제거하는 것과 같은 국소 영역 작업에는 효과적이지만, 공간적인 비선형 변형을 모델링 하기에는 기본적인 소수의 매개 변수로는 벅차며 아무래도 무리가 따른다. 바로 이 점이 아직까지 MRF가 영상 복구, 텍스쳐 모델 등 하위 수준의 영상 처리에 국한된 이유라고 할 수 있다.

본 논문에서는 P2DHMM의 일축 시간 변형, MRF의 2D 국소 변이를 보다 일반화한 새로운 2D 변형 모형을 제안한다. 우선 2절에서 기존의 HMM을 확장한

† 정 회 원 : 부경대학교 전자컴퓨터정보통신공학부 교수
bkshin@dolphin.pknu.ac.kr
논문접수 : 1999년 11월 9일
심사완료 : 2000년 11월 9일

2DHMM 모형의 구성 일반을 정의하고 기존의 MRF 등과의 기본적 차이점을 언급하였다. 그리고 2D 모델의 계산의 효율을 위해서 causal chain 관계를 가정하고 완전한 격자 형성 조건을 두어 2DHMM의 평가 및 디코딩(decoding) 목적 함수를 정의하였다. 3절에서는 2DHMM의 매개 변수를 추정하는 EM 알고리즘을 수학적으로 유도하였다. 변수 추정 알고리즘은 반복적으로 이루어지며, 점진적으로 국소 최적치를 얻을 수 있음을 보장함을 수학적으로 보였다. 4절에서는 앞선 절에서 다루지 못한 내용을 중심으로 본 모델의 의미를 검토 분석하고 결론을 맺는다.

2. 2D 은닉 마르코프 모델

2.1 2D HMM의 정의

$\boldsymbol{L}=\{(i,j):1\le i\le M,1\le j\le N\}$ 을 $L=MN$개의 노드를 갖는 이차원 직사각형 격자이고, Λ를 L개의 상태를 격자구조로 배열한 은닉 마르코프 모델(HMM)이라고 하자. M,N 각각은 격자의 수직 및 수평 방향의 차원의 크기를 나타낸다. 앞으로 각 상태(site 또는 노드)를 열 우선순으로 $i=1,\ldots,L$ 로 표기하기로 한다.

격자 $\boldsymbol{L}$ 상에서 이웃은 어떤 노드(site)에 영향을 미칠 수 있는 다른 노드들의 집합을 말한다. 이웃 체계는 일반적으로 다음과 같이 정의한다: $\eta=\{\eta_i\subset \boldsymbol{L}: i\in \boldsymbol{L}\}$. 여기서 η_i는 노드 i의 이웃으로 『$i\notin\eta_i$이고 $j\in\eta_i$ iff $i\in\eta_j$』 를 만족한다.

이차원 격자 구조의 마르코프 모델의 명칭으로 이차원 마르코프 모델을 구별하여 마르코프 메쉬 모델(Markov Mesh Model)이 가장 적당하다고 생각된다. 하지만 일반적으로 실제 구현에 들어가서는 순서 제약을 가하는 것이 보통이므로 간단히 2D 마르코프 모델이라고 부르기로 한다. 이 것은 기존의 메쉬형 모델 외에 앞으로 언급될 2D 모델 일반을 포함하는 경우 원래 의미에 가장 잘 부합된다고 판단된다.

HMM의 경우 관찰은 또 하나의 통계적(stochastic) 과정으로 정의된다. 2D HMM의 Λ의 관찰 데이타 $\boldsymbol{X}=\{x_{uv}\in\Omega 1\le u\le U,1\le v\le V\}$ 는 $W=UV$개의 픽셀의 2차원 영상이다. $\Omega=\{1,2,\ldots,K\}$ 는 명암 또는 색의 값이다. 격자의 경우와 마찬가지로 비슷하게 각 픽셀도 $u=1,\ldots,W$ 와 같이 차례로 번호를 매기기로 한다.

부언하면, 2D 마르코프 모델의 각 노드는 이웃 노드를 조건부로 결정되며 이들 노드들의 메쉬 체인은 MRF를 구성한다. 2D HMM에서 관찰되는 영상 $\boldsymbol{X}$는 각 노드의 독립적인 관찰의 집합이라고 할 수 있다. 2D HMM가 공간적 변형을 모델링하는 능력은 노드 사이를 연결하는 전이의 형태에 따라 결정된다. 그리고 전이의 형태에 따라 모델의 종류가 결정된다.

2.2 2D HMM의 구분

HMM의 각 상태는 시각에 상관없이 이웃 상태를 조건부로 결정된다. 그러나 1D와 달리 2D에서는 특별한 순서가 없기에 문제점이 발생한다. 이웃의 정의와 노드간의 관계(relation)에 따라서 다음과 같은 세 가지의 극단적인 모델을 들 수 있다.

(1) $p(i|j)$, $i,j=1,\ldots,L$. 노드 i의 이웃은 $\eta_i\subseteq L$이다. 하부 격자 프로세스 구성에 제약이 없는 가장 일반적인 마르코프 모델로써 ergodic 모델이라고도 한다. 따라서 모델의 구조로 볼 때에는 1D 또는 2D와 같은 차원의 구별은 무의미하다. 동적 프로그래밍 알고리즘을 가정할 때 계산량은 $L^2W\sim N^6$로써 (비슷한 크기의 정방형 격자 및 영상을 가정했을 때) 복잡도가 너무 높아 그대로는 별로 실용성이 없다.

(2) $p(i|j)=p(j|i)$, $i,j=1,\ldots,L$이고 $i\neq j$. 부분적으로 대칭적인, 따라서 방향성이 없는 상태 전이를 갖는 noncausal 모델. Ergodic 모델과 마찬가지로 모든 $i=1,\ldots,L$ 에 대하여 $\sum_j p(j|i)=1$ 조건을 만족해야 한다. 그러나 일반적으로 이 확률 조건이 만족되는지 여부와 격자 전체로는 어떤 성질(behavior)을 보이는가 하는 점은 밝혀져 있지 않다. 이 점에 대해서는 아직 직접적으로 연구된 바가 없으며, 수학적 관점에서 흥미 있는 주제라고 판단된다. 이 모델은 $p(j|i)\neq p(j+d|j+d)$인 성질 때문에 아래 랜덤 필드 모델과 구분된다.

(3) $p(i|i\pm d)=p(i\pm d|i)$, $i=1,\ldots,L$. 이 모델은 전체적으로 균일한 특성을 지니는 필드 모델로서 MRF가 여기에 포함된다. 이 경우 노드간 전이는 필요 없고 단지 노드간 공간적 관계에 따른 상관관계(correlation, 예컨대, click potential)만 있을 뿐이다. 따라서 관찰 영상 데이타만으로 전체의 확률이 결정된다. 이 모형은 엄밀히 말해 HMM은 아니고 MRF에 불과하다. 모델의 확률 분포는 Gibbs 분포를 따른다 [10].

본 논문에서 제안한 2D HMM은 (1)번 부류에 속하고 계산의 복잡도를 크게 낮춰주는 현실적인 가정과 제약을 도입한 모형이다.

2.3 2D HMM의 격자 과정

시간을 배제한 순수한 공간에는 어떤 순서도 없기 때문에 causal model을 정당화하기가 어렵다. 하지만 계산량을 줄이기 위해서 다음과 같은 두 가지 가정을 도

입하였다. 격자를 구성하는데 있어서 (1) 노드간 전이를 제한하여 2차(order) 이웃 체계를 가정하였고 (2) 2D 공간의 경우 위에서 아래로, 왼쪽에서 오른쪽 방향의 causality가 있다고 가정하였다.

2D HMM의 노드 연결 구조는 일반적인 ergodic 모델과 같이 복잡도가 높은 구조(topology)보다 영상의 2D 평면 구조를 내포하는 그림 1과 같은 구조가 직관적으로 더 적 적절하다. 그림의 구조는 영상의 다양한 부분적 변형을 쉽게 표현할 수 있는 구조이다. 즉 2D에서 causality는

$$r_{hj}^{\downarrow} = p(q_u = j | q_{u-V} = h), \quad h \in \{j-N-1, j-N, j-N+1, j\}$$

$$s_{ij}^{\rightarrow} = p(q_u = j | q_{u-1} = i), \quad i \in \{j-N-1, j-1, j+N-1, j\}$$

로 표현된다. 여기서 $r_{hj}^{\downarrow}$는 노드 h에서 노드 j로의 수직방향 causality를, $s_{ij}^{\rightarrow}$는 노드 i에서 노드 j로의 수평방향 causality를 나타낸다.

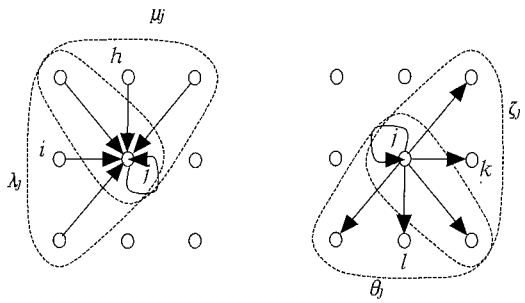
노드 j의 위에서 노드 j로 전이 가능한 입력 노드의 집합을 μ_j, 왼쪽에서 전이해 들어올 수 있는 노드의 집합을 λ_j, 그리고 노드 j에서 전이해 갈 수 있는 오른쪽 및 아래쪽 노드의 집합을 각각 ζ_j, θ_j 라고 하자. 그러면 다음과 같은 확률 조건을 만족한다.

$$\sum_{k \in \zeta_j} s_{jk}^{\rightarrow} = 1, \quad s_{ij}^{\rightarrow} \geq 0,$$

$$\sum_{l \in \theta_j} r_{jl}^{\downarrow} = 1, \quad r_{hj}^{\downarrow} \geq 0. \tag{1}$$

ζ_j와 θ_j는 노드 j에서 본 이웃, 즉 전이가 가능한 이웃이다.

2D 격자에서 위에서 아래로 그리고 좌에서 우로의 causality에 따라 마르코프 성질과 동적 프로그래밍 원리를 적용하면 다음과 같은 전진확률(forward probability)과 후진확률(backward probability)을 얻을 수 있다.



(a) (b)

그림 1 2D HMM의 노드 전이 구조 및 이웃; (a) 노드 j로의 이웃, μ_j와 λ_j, (b) 노드 j에서의 전이가 능한 이웃, ζ_j와 θ_j.

$$\alpha_u(j) = \mathrm{MAX}_{h \in \mu_j, i \in \lambda_j} \, s_{ij}^{\rightarrow} r_{hj}^{\downarrow} b_j(x_u) \alpha_{u-1}(i), \quad j = 1, \ldots, L, \; u = 1, \ldots, W \tag{2}$$

$$\beta_u(j) = \mathrm{MAX}_{k \in \zeta_j, l \in \theta_j} \, s_{jk}^{\rightarrow} r_{jl}^{\downarrow} b_k(x_{u+1}) \beta_{u+1}(k), \quad j = L, \ldots, 1, \; u = W, \ldots, 1 \tag{3}$$

전진 확률 $\alpha_u(i)$는 부분 격자 $L_{1,j} = s_1 s_2 \cdots s_j$에서 부분 영상 $X_{1,u} = x_1 x_2 \cdots x_u$를 관찰할 확률을 말한다. 후진 확률 $\beta_u(j)$는 현재 노드 j, 현재 관찰 데이타 x_u 이후 앞으로의 상태 전개를 계산하는 확률로써 부분 격자 $L_{j+1,L} = s_{j+1} s_{j+2} \cdots s_L$에서 나머지 관찰 데이타 $X_{u+1,W} = x_{u+1} x_{u+2} \cdots x_W$를 출력할 확률을 말한다. 초기 경계 조건은 아래와 같다.

$$\alpha_1(1) = b_1(x_1)$$

$$\alpha_u(j) = \mathrm{MAX}_{i \in \lambda_j} \, s_{ij}^{\rightarrow} b_j(x_u) \alpha_{u-1}(i), \quad j = 1, \ldots, N, \; u = 2, \ldots, V$$

$$\beta_W(L) = 1$$

$$\beta_u(j) = \mathrm{MAX}_{k \in \zeta_j} \, s_{jk}^{\rightarrow} b_k(x_{u+1}) \beta_{u+1}(k), \quad j = L, \ldots, L-N+1$$

$$u = W, \ldots, W-V+1$$

한편 노드간 연결 정보는

$$(\hat{h}, \hat{i})_u(j) = \mathrm{ARGMAX}_{h \in \mu_j, i \in \lambda_j} \, s_{ij}^{\rightarrow} r_{hj}^{\downarrow} b_j(x_u) \alpha_{u-1}(i),$$
$$j = i, \ldots, L, \; u = 1, \ldots, W$$

$$(\hat{k}, \hat{l})_u(j) = \mathrm{ARGMAX}_{k \in \zeta_j, l \in \theta_j} \, s_{jk}^{\rightarrow} r_{jl}^{\downarrow} b_k(x_{u+1}) \beta_{u+1}(k),$$
$$j = L, \ldots, 1, \; u = W, \ldots, 1 \tag{4}$$

로 정의된다. 여기서

$$Left(j) = \hat{i},$$
$$Up(j) = \hat{h},$$
$$Right(j) = \hat{k},$$
$$Down(j) = \hat{l}$$

이라고 하자. 그러면 위 (2), (3)의 계산결과로 완전한 격자가 이루어지기 위해서는

$$Left(\hat{h}) = Up(\hat{i}),$$
$$Down(\hat{k}) = Right(\hat{l}) \tag{5}$$

와

$$\alpha_u(j) = \mathrm{MAX}_{h \in \mu_j} \, r_{hj}^{\downarrow} b_j(x_u) \alpha_{u-1}(R_h),$$
$$j = 1, N+1, 2N+1, \ldots, (M-1)N+1,$$
$$u = V+1, 2V+1, \ldots, (U-1)V+1$$

$$\beta_u(j) = \mathrm{MAX}_{l \in \theta_j} \, r_{jl}^{\downarrow} b_k(x_{u+1}) \beta_{u+1}(L_l),$$
$$j = L, \; L-N, \; j-2N, \ldots, \; N \tag{6}$$
$$u = W-V, \; W-2V, \ldots, \; V$$

의 두 조건을 만족해야 한다. 여기서 $R_h = Right^{N-1}(h)$, $L_l = Left^{N-1}(l)$로써 각각 격자상에서 h의 최우단, l의 최좌단 노드를 가리키며, 자연수 n에 대하여 아래와 같은 합성함수로 정의된다.

$$Right^n(x) = Right(Right^{n-1}(x))$$

$$Left^n(x) = Left(Left^{n-1}(x))$$

위 식 (5), (6)은 격자 형성을 위해 만족해야 하는 격자 형성 조건(lattice constraint)이다.

이제 (2), (3) 식의 전진 확률과 후진 확률을 이용하면

$$P(X|\Lambda) = \max_j \alpha_u(j)\left[\prod_{k=1}^{V-1} r_{h_k j_k}^{\downarrow}\right]\beta_u(j) \quad (7)$$

여기서 빈틈없이 완전한 격자 구성을 위하여

$h_k = q_{u-V+k} = Right(h_{k-1})$ 그리고 $h_0 = h$,

$j_k = q_{u+k} = Right(j_{k-1})$ 그리고 $j_0 = j$

을 만족해야 한다.

2.4 비교

기존의 HMM에서는 전진 확률을 모든 상태 전이 경로 확률의 합으로 정의한다. 마르코프 체인의 경우 임의의 상태를 중심으로 전진 확률과 후진 확률을 간단히 표현할 수 있으나 2차원 메쉬 구조의 격자에서는 상태 하나로 2차원 평면을 나누지 못한다. 따라서 만약 식 (2)와 (3)을

$$\alpha_u(j) = \sum_{h \in \mu_j, i \in \lambda_j} s_{ij}^{\rightarrow} r_{hj}^{\downarrow} b_j(x_u)\alpha_{u-1}(i),$$

$$\beta_u(j) = \sum_{k \in \zeta_j, l \in \theta_j} s_{jk}^{\rightarrow} r_{jl}^{\downarrow} b_k(x_{u+1})\beta_{u+1}(k)$$

와 같이 정의하면 격자 형성 조건을 적용할 수가 없어진다. 그러면 식 (7)에 대응하는 모델 평가 함수를 정의할 수 없게 되고, 나아가 모델 최적화를 위한 기준 함수를 정의할 수 없다. 앞 소절의 격자 형성 조건은 이러한 맥락에서 도입된 것이다.

한편 2D HMM의 두 종류의 상태 전이를 제한하면 pseudo 2D HMM(P2DSHMM)을 유도할 수 있다. 예컨대 2DHMM의 수직 전이 이웃을

$\mu_j = \{j-N, j\}$,

와 같이 물리적으로 제한하여 보자. 그러면 2D 모델의 각 수직 배열 상태는 격자의 열에 대응되며 개념적으로 하나의 대상태(superstate) S_n 을 정의한다. 그리고 대상태 S_n는 하나의 출력 분포 함수 $b_v(x)$로 수직 프레임 $X_v = x_{1,v}...x_{U,v}$, $v = 1,...,V$, 를 모델링한다:

$$P(X_v|S_v = Q(\cdot, v), \Lambda) = \sum_{Q(\cdot,v)=q_{1,v},...,q_{U,v}} \prod_u r_{q_{u-1,v}q_{u,v}}^{\downarrow} b_v(x_{uv})$$

그리고 수직 프레임 사이의 수평 전이 확률 변수 $s_{q_{t-1}q_t}^{\rightarrow}$에 따른 상관 관계를 조건부로 서로 독립이라고 가정하면 본 논문의 2D HMM은 P2DHMM이 된다. 다시 말해서 P2DHMM은 2D HMM의 수직 천이를 2D HMM 모델에서 동일한 수직열 내의 상태간 전이로 제한하고, 동일한 열 내의 출력 분포는 결합(tying) 되어 있으며, 각 수직 프레임 사이에는 조건부 독립이고 수평 전이 확률을 대상태 사이의 전이 확률 하나로 대치하여 만든, 아주 단순화한 2D HMM에 불과한 것이다.

2.5 모델 디코딩

관찰 영상 X는 HMM의 정의에 따라 마르코프 성질이 없으므로 MRF가 아니며 하부 마르코프 메쉬를 조건부로 한 독립적 과정으로 정의한다. 2D 마르코프 모델의 각 노드는 이웃 노드를 조건부로 결정되지만 위치종속적이므로 노드들의 메쉬 체인도 역시 MRF와 구별된다.

2D HMM Λ에서 디코딩 문제는 관찰 영상 X에 대해 최대 우도의 하부 마르코프 메쉬 체인 L^*을 찾는 것이다. L^*은 하나의 완전한 격자이다. 그런데 앞 절에서 이미 격자 조건을 적용하여 식 (2)와 같이 전진 확률 함수를 정의하였으므로 그 결과가 곧 디코딩 결과가 된다. 따라서 메쉬 체인은 전진 계산 과정 후 (4)를 이용하여 격자 역추적만 하면 얻을 수 있다.

3. 매개 변수 추정

2D HMM Λ에서 격자를 L이라고 하자. 관찰 이미지 X에 대한 모델 우도는

$$P(X|\Lambda) = \sum_L P(X, L|\Lambda)$$

로 주어진다. 오른쪽 항의 이미지와 격자의 결합 확률은 다음과 같다.

$$P(X, L|\Lambda) = \prod_{u=1}^{W} [s_{q_{u-1}q_u}^{\rightarrow} r_{q_{u-1}q_u}^{\downarrow} b_{q_u}(x_u)] \quad (8)$$

위 식에 log를 취하면

$$\log P(X, L|\Lambda) = \sum_{u=1}^{W} (\log s_{q_{u-1}q_u}^{\rightarrow} + \log r_{q_{u-1}q_u}^{\downarrow} + \log b_{q_u}(x_u)). \quad (9)$$

그러면 2D HMM Λ의 Q-함수는 아래와 같이 전개할 수 있다[15].

$$\begin{aligned} Q(\Lambda, \bar{\Lambda}) &= \frac{1}{P(X|\Lambda)} \sum_L P(X, L|\Lambda) \log P(X, L|\bar{\Lambda}) \\ &= \frac{1}{P} \sum_{L=q_1 q_2 \ldots q_W} P(X, L|\Lambda) \times \sum_{u=1}^{W} (\log \bar{s} + \log \bar{r} + \log \bar{b}) \\ &= \frac{1}{P} \sum_i \sum_j \sum_u P(X, q_{u-1} = i, q_u = j|\Lambda) \log \bar{s} \\ &+ \frac{1}{P} \sum_h \sum_j \sum_u P(X, q_{u-V} = h, q_u = j|\Lambda) \log \bar{r} \\ &+ \frac{1}{P} \sum_j \sum_k \sum_{u: x_u = k} P(X, q_u = j|\Lambda) \log \bar{b} \end{aligned} \quad (10)$$

마지막 식을 다시 쓰면

$$Q(\Lambda, \bar{\Lambda}) = \sum_h \sum_j c_{hj} \log \bar{r}_{hj} + \sum_i \sum_j d_{ij} \log \bar{s}_{ij} + \sum_j \sum_k e_{jk} \log \bar{b}_j(x_k) \quad (11)$$

여기서

$$c_{hj} = \frac{\sum_u P(X, q_{u-V} = h, q_u = j|\Lambda)}{P(X|\Lambda)}$$

$$d_{ij} = \frac{\sum_u P(X, q_{u-1} = i, q_u = j|\Lambda)}{P(X|\Lambda)}$$

$$e_{jk}=\frac{\sum_{u:x_u=k}P(X,q_u=j|\Lambda)}{\sum_u P(X,q_u=j|\Lambda)}$$

이다. 결과적으로 매개변수의 추정식은 다음과 같다.

$$\overline{s_{ij}}=\frac{\sum_u P(X,q_{u-1}=i,q_u=j|\Lambda)}{\sum_j\sum_u P(X,q_{u-1}=i,q_u=j|\Lambda)} \quad (12)$$

$$\overline{r_{kj}}=\frac{\sum_u P(X,q_{u-v}=h,q_u=j|\Lambda)}{\sum_j\sum_u P(X,q_{u-v}=h,q_u=j|\Lambda)} \quad (13)$$

$$\overline{b_{jk}}=\frac{\sum_{u:x_u=k}P(X,q_u=j|\Lambda)}{\sum_k\sum_{u:x_u=k}P(X,q_u=j|\Lambda)}=\frac{\sum_{u:x_u=k}P(X,q_u=j|\Lambda)}{\sum_u P(X,q_u=j|\Lambda)} \quad (14)$$

EM 알고리즘의 Q-함수는 $\overline{\Lambda}$의 함수로 간주하였다. 위 함수는 1D HMM에 비해 매개 변수가 늘어났지만 기본적으로 1D 경우의 Q-함수와 다르지 않다. 따라서 위 알고리즘은 수렴한다고 말할 수 있다.

[정리 1] $Q(\Lambda,\overline{\Lambda})\geq Q(\Lambda,\Lambda)$ 이면 $P(X|\overline{\Lambda})\geq P(X|\Lambda)$ 이다. 등호는 $P(X|\overline{\Lambda})=P(X|\Lambda)$일 때 성립한다.

증명: log 함수의 concavity에 따라 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\log\frac{P(X|\overline{\Lambda})}{P(X|\Lambda)}=\log\left[\sum_L\frac{P(X,L|\overline{\Lambda})}{P(X|\Lambda)}\right]$$

$$=\log\left[\sum_L\frac{P(X,L|\Lambda)}{P(X|\Lambda)}\frac{P(X,L|\overline{\Lambda})}{P(X,L|\Lambda)}\right]$$

$$\geq\sum_L\frac{P(X,L|\Lambda)}{P(X|\Lambda)}\log\frac{P(X,L|\overline{\Lambda})}{P(X,L|\Lambda)}$$

$$=Q(\Lambda,\overline{\Lambda})-Q(\Lambda,\Lambda) \quad (13)$$

위에서 부등식은 Jensen의 부등식을 적용한 것이다. λ가 $P(X|\Lambda)$의 극점이면 $\overline{\Lambda}$를 변수로 하는 Q-함수의 극점이며 그 역도 성립한다. 위 식에 따르면 새로이 추정한 모델의 변수 $\overline{\Lambda}$가 우항을 양으로 하는 경우 모델의 확률 $P(X|\Lambda)$가 증가하며, Λ가 극점이 아닌 경우 반드시 증가한다 [15].

Baum 등은 행한 1차원 통계적 마르코프 체인에 대한 위 정리를 아래와 같은 두 개의 proposition을 통해 증명하였다. 본 논문에서는 거의 유사한 증명은 생략하고 간단한 해석만을 덧붙이기로 한다.

[Proposition 1] $P(X|\Lambda)$는 Λ의 연속함수이고, 변환 $T(\Lambda)$는 모든 고정점 Λ에 대해 $\overline{\Lambda}$의 함수 $Q(\Lambda,\overline{\Lambda})$의 극점을 정의하는 $\Lambda\to\Lambda$ 연속 사상이라고 하자. 그러면 T의 모든 고정점은 P의 고정점이며, ($T(\Lambda)\neq\Lambda$ 인 경우) $P(T(\Lambda))>P(\Lambda)$일 때 $T^n(\Lambda_0)$, $\Lambda_0\in\Lambda$, 의 모든 극한점(limit point)은 T의 고정점이다.

참고로 위 의미를 간단히 표현하면 다음과 같다: $Q(\Lambda,\overline{\Lambda})$ 가 증가하면 $P(X|\overline{\Lambda})$도 증가한다. 즉

$$Q(\Lambda,\overline{\Lambda})\geq Q(\Lambda,\Lambda)\ \rightarrow\ P(X|\overline{\Lambda})\geq P(X|\Lambda).$$

또한 위 식에서 등호의 경우는 아래와 같은 성질을 만족하는 극점을 정의한다.

[Proposition 2] Λ가 $P(X|\Lambda)$의 극점이면 $\overline{\Lambda}$의 함수 $Q(\Lambda,\overline{\Lambda})$의 극점이 되며, 그 역도 성립한다. 즉, 모든 확률 변수 Λ_i 에 대해

$$\frac{\partial P(X|\Lambda)}{\partial\Lambda_i}=\frac{\partial Q(\Lambda,\overline{\Lambda})}{\partial\overline{\Lambda_i}}\Big|_{\overline{\Lambda}=\Lambda}$$

를 만족한다.

2D HMM의 매개변수 추정 알고리즘은 또 다른 방법으로 증명 및 유도가 가능하다. 예컨대, 주어진 샘플 X에 대해 평가 확률 $P(X|\Lambda)$을 최대로 하는 문제는 Lagrange 방법에 의한 constrained optimization 문제로 생각하여 풀 수 있다. 이 때 $P(X|\Lambda)$ 대신 $\log P(X|\Lambda)$ 를 사용하여

$$Q=\log P(X|\Lambda)+\sum_{i=1}^{N}\varkappa_h(1-\sum_{j=1}^{N}r_{hj})+\sum_{i=1}^{N}\theta_i(1-\sum_{j}^{N}s_{ij})+\sum_{k=1}^{N}\nu_k(1-\sum_{k=1}^{N}b_j(k))$$

와 같은 Lagrange 함수를 정의하면 된다. 위 식에서 $\varkappa_h$, θ_i, ν_k는 Lagrange multiplier이다. 또한 $P(X|\Lambda)$ 대신에 앞에서 정의한 Baum의 Q 함수를 사용하여도 된다.

4. 토의 및 결론

일차원 시계열 데이타와 2차원 영상의 본질적 차이는 이미 언급한 바와 같이 실제 신호에 내재된 순서의 유무이다. 물론 시간을 하나의 축으로 볼 때 고전 역학처럼 시계열 데이타도 전후의 관계가 바뀌어도 표면적으로 전혀 하자가 없는 것은 사실이다. 하지만 시간을 되돌릴 수 없는 현실에서 시계열 데이타의 순서는 하나의 본질이라고 할 수 있다.

이차원 영상의 모델로 널리 쓰여 온 MRF는 국소적 상태간 전이 확률 대신 전역적 균질성(homogeneity) 조건에 기반한 clique potential 매개변수로 기술된다. 본 논문에 제안된 2D HMM은 단순한 필드 모델이 아니라 확률적 마르코프 메쉬 체인 프로세스로서 본질적 차이점을 갖고 있다. 순차적 정보의 선후 관계를 가정할 때 단지 하나의 사건만이 직전에 선행하는 것이 아니라, 한 개의 차원이 늘어나 두 개의 사건이 동시에 선행하는 구조를 갖는다. 만약 순서가 없다면 1차 이웃 또는 2차 이웃 등의 상태가 조건이 될 것이다. 그러 나 두 경우 모두 두 개 이상의 상태 전이가 동시에 존재하기 때문에 이차원 모델과 구별이 된다. 이에 따라 본 논문의 2D HMM은 보다 엄밀한 의미에서 1D HMM을 2D로 확장한 모델이라고 할 수 있다. 2D HMM은 기존의 1D

HMM, P2DHMM 또는 MRF보다 이차원 영상의 비선형 국소 변형을 간단히, 자연스럽게 모델링할 수 있는 구조가 주요한 장점 중의 하나이다. 그리고 2D HMM을 유도하기 위하여 가정한 causality는 이미 2D 영상 모델로 자주 언급된 조건이며, 격자 형성 조건은 직관에 따르는 당연한 귀결의 하나이다.

한편 2D HMM의 구조에서 노드 전이의 범위를 2차 이웃으로 제한함으로써 계산량을 대폭 줄일 수 있다. 관찰 이미지의 크기가 $L=MN$ 이고 모델의 크기가 $W=UV$ 라고 하자. Ergodic 모델의 경우 $O(L^2W)=O(M^2N^2UV)$ 정도의 비현실적인 계산량이 필요하다. 그러나 제안된 모델 구조로 설계할 경우 $O(LW)=O(MNUV)$의 훨씬 낮은 복잡도로 낮출 수 있다. 물론 이 정도로도 적은 양은 아니지만 모델의 크기(dimension)가 작다면 여러 가지 영상 해석 문제에 충분히 활용할 수 있는 수준이다.

본 논문에 기술한 2D HMM은 기존의 HMMRF 또는 메쉬 MRF와는 기본적인 가정에서부터 다르다. 이전의 필드형 모델은 다양한 국소 변형과 변이를 모델링하기에는 너무 단순하다. 그러나 본 논문에 제안된 2D HMM은, 물론 충분한 샘플에서 반복 재추정 과정을 거쳐야 하지만, 이미지 영역 전체에 독립적인 매개변수로 보다 강력한 모델링 능력을 끌어낼 수 있다. 2D HMM는 MRF 보다 심도 있는 분석 작업이 요구되는, 예컨대 인쇄체 필기 영상의 비교 및 분석, 비선형 모션 필드의 해석, 영상의 이해 등에 유용하게 활용할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] O. Agazzi and S. Kuo, "Pseudo two-dimensional hidden Markov models for document recognition," *AT&T Technical Journal*, vol. 72, no. 5, Sep. 1993.

[2] G. Saon, "Cursive word recognition using a random field based hidden Markov model," *Int'l J. Doc. Aanal. and Recog.*, vol. 1, no. 4, pp. 199-208, 1999.

[3] W. Cho, S. Lee and J. Kim, "Modeling and recognition of cursive words with hidden Markov models," *Pattern recognition*, vol. 28, no. 12, pp. 1941-1953, 1995.

[4] B.-K. Sin and J. H. Kim, "Ligature modeling for online cursive script recognition," *IEEE Trans PAMI*, vol. 19, no. 6, June 1997.

[5] S. Geman and D. Geman, "Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images," *IEEE Trans. PAMI*, vol. PAMI-6, no. 6, Nov. 1984.

[6] C. Acuna, "Texture modeling using Gibbs distributions," *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, vol. 54, no. 3, pp. 210-222, May 1992.

[7] D. Pickard, "A Curious Binary Lattice Process," *J. Applied Probability*, vol. 14, pp. 717-731, 1977.

[8] J. Woods, "Two-Dimensional Discrete Markovian Fields," *IEEE Trans. Info. Theory*, vol. IT-18, no. 2, March 1972.

[9] A. Jain, "Advances in Mathematical Models for Image processing," *Proc. IEEE*, vol. 69, pp. 502-528, 1981.

[10] F. Spitzer, "Markov random field and Gibbs ensembles," *Amer. Math. Mon.*, vol. 78, pp. 142-154, 1971.

[11] L. Kanal, "Markov Mesh Models," *Computer Graphics and Image Processing*, vol. 12, pp. 371-375, 1980.

[12] S. Lakshmanan and H. Derin, "Simultaneous Parameter Estimation and Segmentation of Gibbs Random Fields Using Simulated Annealing," *IEEE Trans. PAMI*, vol. 11, no. 8, Aug. 1980.

[13] Y. Zhao, X. Zhuang, L. Atlas and L. Anderson, "Parameter Estimation and Restoration of Noisy Images Using Gibbs Distributions in Hidden Markov Models," *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, vol. 54, no. 3, pp. 187-197, May 1992.

[14] J. Zhang, "The Mean Field Theory in EM Procedures for Blind Markov Random Field Image Restoration," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 2, no. 1, pp. 27-40, Jan. 1993.

[15] L. Baum and J. Eagon, "An inequality with applications to statistical estimation for probabilistic functions of a Markov process and to a models for ecology," *Bull. Ann. Math. Stat.*, vol. 73, pp. 360-363, 1967.

신 봉 기

1985년 서울대학교 자원공학 학사. 1987년 한국과학기술원 전산학 석사. 1995년 한국과학기술원 전산학 박사. 1987년 ~ 1999년 한국통신 멀티미디어연구소. 1999년 ~ 현재 부경대학교 전자컴퓨터정보통신공학부 전임강사. 관심분야는 인공지능, 패턴인식, 지능형 에이전트, 정보검색.