

미소신호 안정도 해석 기술

남해곤* · 송성근* · 심관식**

(전남대 전기공학과*, 서남대 전자전기공학과**)

1. 서론

현대 전력산업은 '적은 투자로 더 많은 일을 수행'해야 하는 난제에 직면하고 있다[1]. 경제적 이유로 리액턴스 값이 큰 전력 기기를 사용하고, 발전원은 원거리에 위치하여 계통 리액턴스 값이 증가하고 안정도 마진이 감소되었다. 여기에다 부하가 지속적으로 증가하고 조류의 패턴이 바뀌는 데도 이를 뒷받침하여야 하는 송전선로는 환경과 재정상의 이유로 부하의 증가속도로 새로 건설하는 것이 어렵게 되었다. 따라서 최근 전력회사들은 기존 설비를 안정도한계에 가깝게 중부하로 운전하고자 하는 경향이 있고, 이로 인한 안정도마진의 감소를 고성능 여자기를 사용하여 보상하여 왔다. 계통의 중부하 운전과 고성능 여자기의 사용은 제동토크를 감소시켜 지속적인 저주파 진동이 유발하는 경향이 있고, 따라서 현대의 소위 '잘 개발된 (well-developed)' 전력계통에서는 저주파진동은 전압문제와 함께 현대 전력계통의 안전운전을 저해하고 송전네트워크의 전송능력을 제한하는 가장 심각한 요인이 되었다[1,2]. 현재 우리 나라의 전력계통도 점차 선진국에서처럼 과도안정도 문제와 함께 계통이 0.2-2 Hz의 저주파로 진동하는 미소신호안정도 문제와 저전압/전압붕괴로 대표되는 전압안정도 문제가 계통의 안전운전을 저해하는 가장 심각한 요인으로 작용할 전망이다.

전력산업의 구조개편은 전력산업의 공공성/안정성보다는 경제적 측면을 더 크게 강조하여 안정성은 더 열악해질 것으로 판단된다. 현재도 송전선로가 중부하로 운전되고 안전도가 우려되는 상황에서 전력을 입찰에 의해 결정하게 되면, 조류의 패턴은 예상할 수 없는 불확실성을 가지게 되고 계통의 안전도도 더욱더 위협받을 것으로 예상된다. 다행히 지금까지는 조류패턴이 경제급전에 의하여 결정되므로 예측이 가능하고 각종 안정도 문제를 일년에 몇 개의 부하조건에 검토하는 것으로 충분하였다. 또한 발전/송배전 시설이 한 전력회사에 의해 소유되고 운영되어 예상되는 네트워크상의 제약과 안정도문제를 극복하는 계획운전이 가능하였다. 그러나, 구조개편 후 발전/송전/배전 업무가 분리되어 소유되고 운영되면 네트워크상의 제약을 극복하는

계획운전이 쉽지 않고, 가능하더라도 많은 비용을 수반할 전망이다. 여기에 대한 대책으로, 최근 온라인 동적 안전도 평가 (dynamic security assessment, DSA)를 개발하고[1,2], 각종 안정도문제에 유연 송전시스템 (FACTS)과 같은 능동적 제어수단을 사용하는 연구가 활발히 진행중이다.

본 논문에서는 저주파진동의 기본 성격, 고유치 해석기법에 관하여 간단히 기술한다.

2. 일기무한모선계통의 미소신호안정도

간단한 모델을 사용하여 저주파진동을 해석하면 기본 개념과 상호작용을 쉽게 이해할 수 있다. 이 절에서는 일기무한모선(one machine infinite bus, OMIB) 계통을 사용하여 미소신호 안정도의 기본 특성과 고성능 여자기의 저주파진동에의 영향을 보인다.

2.1 발전기 고전모델

그림 1은 발전기를 가장 간단한 고전모델로 나타낸 OMIB 계통을 보여주고 있다. 발전기는 2차의 동요방정식만으로 나타내지고 터빈/여자기 등의 제어효과가 무시되므로 가장 단순한 모델이다.

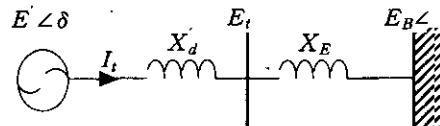


그림 1. 일기 무한모선 계통

고정자 저항을 포함한 모든 저항은 무시할 때, 전기적 토크는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_e = \frac{E' E_B}{X_T} \sin \delta \quad (1)$$

여기서 $X_T = X_d' + X_E$ 이다. 이 식을 선형화하면,

$$\Delta T_e = \frac{\partial T_e}{\partial \delta} \Delta \delta = -\frac{E' E_B}{X_T} \cos \delta_0 \Delta \delta \quad (2)$$

이 식으로부터 고전모델로 나타낸 전기적 토크는 위상각만의 함수이므로 동기화토크 성분임을 알 수 있고, 동기화토크 계수 K_S 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$K_S = \frac{E' E_B}{X_T} \cos \delta_0 \quad (3)$$

이 계통의 동요방정식을 미소변화에 대하여 per unit로 나타내면[3]

$$\Delta \dot{\omega}_r = \frac{1}{2H} (\Delta T_m - \Delta T_e - K_D \Delta \omega_r) \quad (4)$$

$$\dot{\delta} = \omega_0 \Delta \omega_r \quad (5)$$

위에서 ω_0 는 동기각속도, ω_r 은 pu값으로 나타낸 회전자의 각속도, K_D 는 제동토크 (damping torque) 계수이다. 미소신호안정도 해석에서는 미소변화에 대한 관계를 나타내므로, 앞으로 선형방정식이 명백한 경우는 기호 Δ 를 생략한다.

식 (4)-(5)의 동요방정식을 다시 정리하면

$$s^2 \delta + \frac{K_D}{2H} s \delta + \frac{K_S}{2H} \omega_0 \delta = \frac{\omega_0}{2H} T_m \quad (6)$$

이 방정식의 특성방정식과 고유값은

$$s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (7)$$

$$\lambda = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (8)$$

여기서 고유주파수와 제동비는

$$\omega_n = \sqrt{K_S \frac{\omega_0}{2H}}, \quad \zeta = \frac{K_D}{2\sqrt{2K_S H \omega_0}} \quad (9)$$

일반적으로 정상적인 전력계통에서 동기화토크 계수 K_S 는 큰 값을 가지는 반면에 제동토크계수 K_D 는 매우 작은 값을 가진다. 즉, ζ 는 그 크기가 작고 식 (8)에서 이 값을 무시하면 동요방정식의 고유값은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\lambda \cong -\frac{K_D}{4H} + j \sqrt{K_S \frac{\omega_0}{2H}} = \sigma + j \omega_n \quad (10)$$

발전기/터빈 축진동의 주파수는 고유진동주파수 ω_n 에 가깝고, 실수부 σ 는 보통 0에 가까운 값을 가지는 제동이 작은 자유진동에 가까운 특성을 가진다. 일반적인 계통에서 σ

는 음의 값을 가지어 저주파진동모드 λ 는 허수축에 가까운 s-평면의 좌반평면에 위치한다.

2.2 계자회로와 여자기의 영향

발전기 고전모델을 사용하면 축진동에 관련된 고유치를 계산하는데, 전기자 반작용과 여자기에 의한 발전기 공극의 자속변화가 전기적 토크에 미치는 영향이 무시된다. 정상적인 계통에서 동기화토크는 상당히 큰 값을 가지어 여자기/전기자반작용에 의한 동기화토크의 변동은 그리 크지 않으나, 제동토크는 작은 값을 가지므로 여자기에 의한 제동특성의 변화는 상대적으로 매우 크다. 따라서, 여자기/전기자반작용은 축진동의 제동특성에, 즉 고유치의 실수부에 큰 영향을 미친다고 할 수 있다. 일반적으로 전기적 토크 T_e 는 식 (11)처럼 발전기 내부각 δ 와 동상인 동기화토크 성분과 회전속도 ω_r 와 동상인 제동토크 성분으로 구성된다.

$$T_e(\delta, \omega_r) = K_S \Delta \delta + K_D \Delta \omega_r \quad (11)$$

여자기와 전기자반작용의 저주파진동에의 영향은 계자권선과 여자기의 동적 요소를 가장 간단한 모델로 표현한 그림 2의 선형모델로 설명이 가능하다[3].

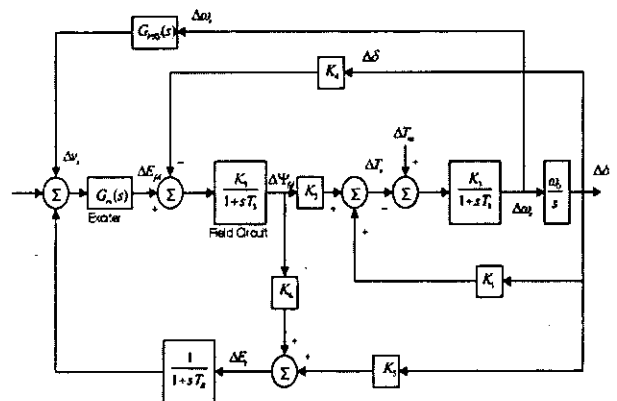


그림 2. AVR을 고려한 OMIB 계통 선형모델

그림에서 저주파진동에 결정적 영향을 주는 요소는 발전기 단자전압 E_t 을 결정하는 K_5 와 K_6 인데 그 관계는 다음과 같다.

$$\Delta E_t = K_5 \Delta \delta + K_6 \Delta \psi_{fd} \quad (12)$$

여기서 ψ_{fd} 는 계자권선의 자속쇄교량이다. ψ_{fd} 가 증가하면 단자전압은 상승하므로 K_6 는 항상 양의 값을 가진다. 전기자 반작용을 나타내는 상수 K_5 는 계통 운전조건과 외부 리액턴스 X_E 의 값에 따라 양 또는 음의 값을 가질 수 있다. K_5 가 양의 값을 가지면 동기화토크는 감소되고 제동토크는 증가되는데 [3], 정상적인 계통의 동기화 토크가 전기자반작용에 의한 토크의 감소에 비하여 크기 때문에 크

계 문제가 되지 않고 제동특성이 개선되므로 바람직한 결과라 할 수 있다.

이에 반하여 K_S 가 음의 값을 가지면 동기화토크는 증가되고 제동토크는 감소된다. 정상적인 계통에서 제동토크는 작은 값을 가지므로 전기자반작용에 의한 제동토크의 감소는 저주파진동의 제동특성에 결정적으로 나쁜 영향을 미칠 수 있다. K_S 가 가장 큰 음의 값을 가지는 조건은, 1) 발전기가 중부하로 운전되고, 2) 외부 리액턴스 값이 크고, 3) 전압조정기 (AVR)의 이득이 큰 경우이다. 이 조건은 현대 전력계통의 운전조건과 정확히 일치하며, 현대 전력계통에서 저주파진동 문제가 자주 발생하는 가장 근본적인 원인이다. 자세한 해석은 문헌 [3]에 기술되어 있다.

3. 미소신호안정도 해석을 위한 선형모델

미소신호안정도의 고유치 해석을 위해서는 선형상태방정식을 필요로 한다. 전력계통과 같은 대규모 계통의 상태행렬은 크기가 매우 크고 스파스하지 않기 때문에, 상태행렬을 구성하여 고유치해석을 하는 것은 많은 컴퓨터 기억용량을 필요로 하여 실용상 부적합하다. 따라서, 미소신호안정도 해석에서는 상태행렬을 직접 구성하지 않고 전력계통의 스파시티 특성을 유지하는 확대상태행렬의 간접적 구조로 표현한다.

발전기를 포함한 동적 전력 기기는 아래 식의 구조로 표현할 수 있다.

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i \Delta v \quad (13)$$

$$\Delta i_i = C_i x_i - Y_i \Delta v \quad (14)$$

여기서 x_i 는 각 기기의 상태변수벡터, Δi_i 는 기기로부터 계통에 주입되는 모선전류주입 벡터, 그리고 Δv 는 모선 전압벡터이다. 모든 기기에 대한 상태방정식을 통합하면 계통의 상태방정식은

$$\dot{x} = A_D x + B_D \Delta v + U_D u \quad (15)$$

$$\Delta i = C_D x - Y_D \Delta v \quad (16)$$

위에서 A_D , C_D , 그리고 Y_D 는 블록 (block) 대각행렬의 매우 단순한 형태를 취한다. 송전 네트워크의 마디 방정식은

$$\Delta i = Y_N \Delta v \quad (17)$$

식 (15)-(17)에서 Δi 을 소거하면 확대계통상태방정식으로 표현됨을 보일 수 있다. 즉,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_D & B_D \\ C_D & -Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Delta v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_D \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (18)$$

여기서

$$Y = Y_D + Y_N \quad (19)$$

식 (18)의 확대 상태방정식으로 나타낸 계통의 상태행렬은

$$A = A_D + B_D Y^{-1} C_D \quad (20)$$

4. 미소신호안정도의 고유치 해석

미소신호안정도의 해석에는 고유치 해석이 가장 많이 사용된다. 행렬의 모든 고유치 계산에는 수치적으로 매우 안정된 QR법이 널리 이용되어 왔다[4]. 그러나, 전력계통과 같은 대규모 시스템의 모든 고유치를 QR법으로 계산하는 것은 컴퓨터 기억용량의 제약과 과도한 계산시간으로 실용적으로 불가능하다. 설사 가능하더라도 미소신호안정도 해석에서는 지배적인 저주파진동 모드만을 계산하는 것으로 충분하기 때문에 효율적이지 못하다.

부분공간에서의 고유치해석 방법은 미소신호 안정도 해석에 광범위하게 응용되었으며 지난 약 20년간 많은 정교한 알고리즘이 개발되었다[5-11]. 이들 방법들은 다음과 같이 크게 두 가지로 분류된다.

- 1) 한번에 하나의 고유치를 계산
- 2) 한번에 여러 개의 고유치를 동시에 계산

한번에 하나의 고유치를 구하는 알고리즘에는 역반복법 (inverse iteration method)법과 AESOPS (Analysis of Essentially Spontaneous Oscillations in Power Systems) 법이 있다. 일반적으로, 이 방법은 한 개의 고유치를 계산 과정에서 얻어진 정보들이 다른 고유치를 계산하는데 전혀 이용되지 못하므로 여러 개의 고유치를 동시에 계산하는 방법에 비하여 비효율적이고, 수렴하는 저주파진동 모드가 초기치에 민감하게 변하여 동일한 고유치를 중복하여 계산하거나 전혀 계산하지 않을 가능성을 배제할 수 없다. 이에 반하여 '일반화된 Hessenberg process'의 범주에 속하는 Lanczos, Arnoldi, Hessenberg 법은 한번에 다수의 고유치를 계산하는 방법으로 Power법과 QR-법의 중간에 위치하고 고유치의 크기가 큰 순서대로 계산하는 특성이 있다 [4]. 현재 세계적으로 미소신호안정도 해석에 가장 널리 쓰이는 EPRI의 SSSP에 포함된 Modified Arnoldi Method (MAM)은 [7-8] 이 범주에 속한다.

4.1 한번에 한 개의 고유치를 계산하는 방법

4.1.1 역반복법

이 방법은 Power 법의 단순한 변형이다. 행렬 A 의 고유치가 아래와 같다고 가정하자.

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (21)$$



Power 법에서는 아래와 같은 단순한 행렬연산으로 지배적인 고유치 λ_1 과 그 고유벡터를 계산한다.

$$w^{k+1} = A z^k, z^{k+1} = w^{k+1} / \|w^{k+1}\|_\infty \quad (22)$$

$$\lambda^{k+1} = w_m^{k+1} / z_m^k \quad (23)$$

식 (23)에서 아래첨자 m 은 벡터 w 와 z 의 m 번째 요소로, m 은 z^k 의 요소 중에서 크기가 가장 큰 것이 선택된다. 이 방법은 일반적으로 선형으로 수렴하는데, 수렴속도는 $|\lambda_2/\lambda_1|$ 에 비례한다. 이 방법은 알고리즘이 매우 단순한 장점이 있는 반면에, $|\lambda_1| \approx |\lambda_2|$ 경우에 수렴속도가 매우 느리고 특히 실수행렬의 지배적 고유치가 복소수일 경우 $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ 이므로 수렴에 실패한다.

역반복법에서는 Power법의 단점을 극복하도록 식 (24)와 같이 행렬 A 를 역행렬변환 (fractional transformation)하여 Power법을 적용한다.

$$M = (A - qI)^{-1} \quad (24)$$

상태행렬 A 의 고유치 λ_A 와 역행렬 변환된 행렬 M 의 고유치 λ_M 사이의 관계는 식 (25)와 같다.

$$\lambda_M = \frac{1}{\lambda_A - q} \quad (25)$$

미소신호안정도에서 저주파진동 모드는 허수축 가까이 있기 때문에 복소수 이동점으로 $q = j\omega$ 를 사용하고, 이때 λ_A 와 λ_M 의 관계는 그림 3과 같다.

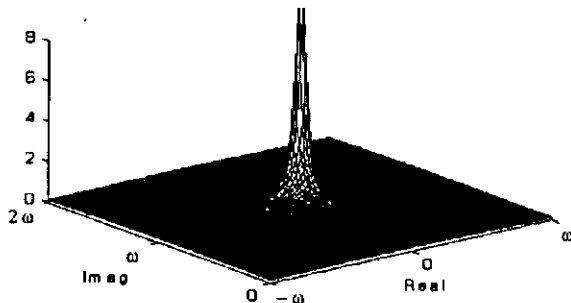


그림 3. 역행렬 변환된 행렬의 고유치

따라서 복소수 이동점 q 부근에 위치한 고유치는 그 크기가 확대되고 이동점으로부터 거리가 멀어질수록 크기가 급격히 감소하므로, 이 복소수 이동점 부근에 위치한 고유치를 매우 빠른 수렴속도로 계산하는 것이 가능하다. 역반복법에서 반복적으로 필요한 연산

$$y = (A - qI)^{-1} x \quad (26)$$

은 확대 상태행렬을 사용한 다음 대수방정식을 풀어 계산

한다.

$$\begin{bmatrix} A_D - qI & B_D \\ C_D & -Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

4.1.2 AESOPS 법

이 방법은 대규모 계통의 저주파진동을 해석할 수 있는 최초로 개발된 방법으로[5], 체계적인 수학적 접근보다는 공학적 직관에 기초하고 있다. 이 방법에서는 특정 발전기를 선택하고, 그 발전기의 기계적 토크에 발전기의 저주파진동 모드에 가까운 복소수 외란을 가하여 보정된 복소수 진동 모드를 계산한다. 이 과정은 시스템이 공진 상태에 이를 때까지 계속된다. 수렴된 복소수는 선택된 발전기에 지배적으로 작용하는 저주파진동 모드이다.

이 방법은 나중에 원래의 AESOPS의 접근 방법을 그대로 이용하되 필요한 중간계산을 식 (18)을 사용하여 좀더 체계적이고 효율적으로 한 것[3,7], 전달함수의 영점 (zero) 계산문제로 체계화한[6] 두 가지로 개선되었다. 여기서는 저면의 제약 상 첫 번째 방법만을 간략히 소개한다.

AESOPS 알고리즘은 외란이 가해지는 특정 발전기의 동요방정식으로부터 유도된다.

$$\begin{aligned} 2H \frac{\Delta\omega_r}{dt} &= \Delta T_m - \Delta T_e \\ &= \Delta T_m - (K_S \Delta\delta + K_D \Delta\omega_r) \end{aligned} \quad (28)$$

이 식을 Laplace 변환하면

$$2Hs \Delta\omega_r = \Delta T_m - (K_S(s) \frac{\Delta\omega_r}{s} + K_D(s) \Delta\omega_r) \quad (29)$$

이 식에서 동기화토크 계수 K_S 와 제동토크계수 K_D 는 진동주파수의 함수로 가정한다. 식 (28)을 정리하면

$$\Delta T_m = \left[2Hs + K_D(s) + \frac{K_S(s)}{s} \right] \Delta\omega_r \quad (30)$$

이 시스템의 특성 값은 다음 식의 영점으로 주어진다.

$$2Hs + K_D(s) + \frac{K_S(s)}{s} = 0 \quad (31)$$

다시 말하면 이 특성 값은 $\Delta\omega_r$ 이 0이 아니라면 ΔT_m 을 0으로 만드는 s 값이다. AESOPS 법에서는 이 원리를 식 (30)의 영점을 계산하는데 이용한다.

발전기에 작은 ΔT_m 을 가하면 계통의 고유치에 가까운 주파수에서 시스템 변수들은 매우 큰 값을 가진다. 계산상의 관점에서 시스템 변수들의 크기를 제한하는 것이 바람직하므로, AESOPS 법에서는 특정 발전기의 속도변화 $\Delta\omega_r$ 를 1.0 + j0.0로 고정하고 이 조건을 만족하는 ΔT_m 과 시

시스템변수의 값을 역으로 계산한다. 계산된 고유치가 시스템의 저주파진동모드에 접근하면 ΔT_m 의 값이 0에 접근하므로, ΔT_m 의 크기는 고유치의 정확도를 판별하는 기준으로 사용된다.

ΔT_m 의 영점은 Newton법을 사용하여 결정한다. 즉 n-번째 반복에서 새로운 s의 값은

$$s^{n+1} = s^n - \frac{\Delta T_m(s)}{\left(\frac{\partial \Delta T_m(s)}{\partial s}\right)} \Bigg|_{s=s_n} \quad (32)$$

식 (32)의 마지막 항의 분모는 식 (30)을 s에 관하여 편미분하여 얻는다. 즉,

$$\frac{\partial \Delta T_m}{\partial s} = \left[2H + \frac{\partial K_D(s)}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial K_S(s)}{\partial s} - \frac{K_S(s)}{s^2} \right] \Delta \omega_r \quad (33)$$

$K_D(s)$ 의 값은 일반적으로 작으므로 무시하면, 식 (31)에서

$$\frac{K_S(s)}{s^2} = 2H \quad (34)$$

이 식을 식 (32)에 대입하면

$$\frac{\partial \Delta T_m}{\partial s} = \left[4H + \frac{\partial K_D(s)}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial K_S(s)}{\partial s} \right] \Delta \omega_r \quad (35)$$

여기서 또한 $\frac{\partial K_D}{\partial s}$ 와 $\frac{\partial K_S}{\partial s}$ 도 $4H$ 에 비하여 작으므로 무시할 수 있다. 따라서,

$$\frac{\partial \Delta T_m}{\partial s} = 4H \Delta \omega_r \quad (36)$$

그러나 지역간 저주파진동 모드처럼 한 모드에 많은 발전기가 참여하면, $\frac{\partial K_D}{\partial s}$ 와 $\frac{\partial K_S}{\partial s}$ 가 $4H$ 에 비하여 작다는 가정이 성립되지 않을 수 있다. 이러한 경우를 대비하여 모든 발전기의 속도변화에 따른 운동에너지를 등가 관성으로 환산하여 특정 발전기의 관성계수 대신 사용한다. 즉,

$$H_e = \sum_{i=1}^{N_c} H_i |\Delta \omega_{ri}|^2 \quad (37)$$

여기서 N_c 는 발전기 수이다. $\Delta \omega_r = 1$ 로 설정하므로, 식 (32)의 Newton 법은 아래 식으로 요약된다.

$$s^{n+1} = s^n - \frac{\Delta T_m(s_n)}{4H_e} \quad (38)$$

위 식과 같이 Newton법을 수행하기 위해선 $\Delta T_m(s_n)$ 과

모든 발전기의 $\Delta \omega_{ri}$ 를 계산하여야 하는데, 이들 값은 식 (18)의 선형모델을 사용하여 계산한다. 상세한 과정은 문헌 [3]에 기술되어 있다.

4.2 일반화된 Hessenberg 법

4.2.1 Hessenberg process

Hessenberg 법은 크기가 $n \times n$ 인 행렬 A 를 상위 Hessenberg 행렬로 변환하는 과정을 통하여, 부분공간에서 행렬 A 의 고유치 중에서 관심이 있는 일부를 계산한다. 이를 위하여, n-개의 선형독립인 열벡터 z_i ($i=1, \dots, n$)로 구성되는 행렬 Z 가 주어질 때, 임의의 초기 Krylov 벡터 c_1 으로 부터 시작하여 나머지 Krylov 벡터 c_2, c_3, \dots, c_{n+1} 을 아래 식에 의해 순차적으로 반복 계산한다[4].

$$b_{r+1} = k_{r+1} c_{r+1} = A c_r - \sum_{i=1}^r h_{ir} c_i \quad (39)$$

여기서 k_{r+1} 은 b_{r+1} 를 정규화 시키는 인수이고, h_{ir} 는 c_{r+1} 이 z_1, z_2, \dots, z_r 에 직교한다는 조건을 사용하여 결정한다. 식 (39)를 행렬로 나타내면

$$A \cdot C = C \cdot H \quad (40)$$

이때 계산된 H 는 상위 (upper) Hessenberg 행렬의 구조이다. 또한 c_{r+1} 이 z_1, z_2, \dots, z_r 에 직교하는 조건은 다음 행렬식으로 간단히 표현할 수 있다.

$$Z^T \cdot C = L \quad (41)$$

여기서 L 은 하위삼각행렬 (lower triangular matrix)을 나타낸다.

만일 행렬 A 를 상위 Hessenberg 행렬 H 로 변환하는 과정에서, 행렬 H 의 m -번째 ($m \ll n$) 대각선요소의 바로 아래에 위치한 $h_{m+1,m} = k_{m+1}$ 의 값이 0 이면 $m \times m$ 크기의 Hessenberg 행렬 H_m 의 고유치는 행렬 H 와 행렬 A 의 고유치와 같게된다. 따라서 행렬 A 의 모든 고유치를 계산하지 않고 Z 의 m -차원 부분공간에서 m -개의 고유치를 구하는 것이 가능하다. 그러나, 실제로 $h_{m+1,m}$ 은 0에 가까우나 정확히 0이 되지 않으므로 식 (39)와(40)은 Z 의 m -차원 부분공간에서 다음과 같이 표현된다.

$$A \cdot C_m \approx C_m \cdot H_m \quad (42)$$

여기서 H_m 을 대각화하면

$$H_m \cdot P_m = P_m \cdot D, \quad X_m = C_m P_m \quad (43)$$

이와 같이 계산한 X_m 은 행렬 A 의 m -개의 근사 고유벡터



이고, P_m 은 H_m 의 고유벡터 행렬, 대각행렬 D 의 대각선 항은 H_m 의 고유치로 행렬 A 의 m -개의 고유치에 가까운 값을 가진다.

일반화된 Hessenberg법은 행렬 Z 를 선택하는 방법에 따라 Arnoldi, Lanczos, Hessenberg 법으로 분류된다[4]. Lanczos법에서는 직교조건으로 Krylov 행렬의 공액복소수를 취한다[4,9]

$$Z = C^*, \quad C^H C = D \quad (44)$$

여기서, 위첨자 *는 공액복소수, 위첨자 H는 행렬의 공액복소수를 취하고 전치 (conjugate transpose) 시킨 것을 나타낸다. 결과적으로 Lanczos법에서는 행렬 A 를 Hessenberg 행렬의 특수한 형태인 삼중대각 (tri-diagonal) 행렬로 변환하는데, 좌우 Krylov 벡터를 동시에 계산하여야 하므로 계산 양이 Arnoldi 법의 두 배이면서 수치적으로도 불안정하므로 사용되지 않는다. 따라서, 본 논문에서는 Lanczos법을 제외한 Arnoldi법과 Hessenberg법만을 기술한다.

4.2.2 수정된 Arnoldi법

EPRI의 SSSP에 포함된 Modified Arnoldi Method (MAM)에 사용된 방법이다. Arnoldi법에서는 직교조건으로 Krylov 행렬 자체를 취한다. 즉,

$$Z = C, \quad C^T C = D \quad (45)$$

따라서 모든 Krylov 벡터 c_1, c_2, \dots, c_n 은 서로 직교한다. 편의상 모든 Krylov 벡터의 크기를 1로 취하면 식 (45)의 직교조건은

$$c_i^H c_j = \begin{cases} 0, & \text{for } i \neq j \\ 1, & \text{for } i = j \end{cases} \quad (46)$$

이 조건하에서 Hessenberg 행렬의 r -번째 column은 식 (46)을 식 (39)에 적용하여 다음 식으로 계산됨을 쉽게 보일 수 있다.

$$h_{ir} = c_i^H A c_r \quad (47)$$

그러나 식 (39)과 (47)을 사용한 Arnoldi법은 수치적 상쇄 (cancellation)에 의해 식 (39)의 b_{r+1} 은 곧 매우 작아지고 Krylov 벡터의 직교성을 상실한다. 따라서, Arnoldi 법에서는 수치적 안정성을 확보하기 위하여 식 (39)에서 계산된 b_{r+1} 을 아래와 같이 수정하는 재직교화 과정이 필수적이다.

$$b_{r+1}' = k_{r+1} c_{r+1} = b_{r+1} - \sum_{i=1}^r \varepsilon_{ir} c_i \quad (48)$$

$$\varepsilon_{ir} = c_i^T b_{r+1} \quad (49)$$

4.2.3 Hessenberg법

Hessenberg법에서는 직교조건으로 Krylov 벡터와 무관한 단위행렬을 취한다[4,10-11]. 즉,

$$Z = I, \quad C = L \quad (50)$$

이 조건하에서 Hessenberg 행렬의 r -번째 column은 식 (39)를 사용하여 다음 식으로 계산됨을 쉽게 보일 수 있다.

$$h_{ir} = e_i^T (A c_r - \sum_{j=1}^{r-1} h_{ji} c_j) / e_i^T c_i \quad (51)$$

Hessenberg 법에서는 계산의 편의상 C 행렬의 대각요소를 모두 1이 되도록 k_{r+1} 한다. 이 조건하에서 r -번째 열벡터 c_r 은 1에서 $(r-1)$ -번째 행까지는 0이고 r -번째 행은 1의 값을 갖는 다음 구조가 된다.

$$c_r = [0, 0, \dots, 1, n_{r+1,r}, \dots, n_{n,r}]^T \quad (52)$$

Hessenberg법에서는 h_{ir} 을 식 (51)에 의해 계산하지 않고, 위 특성을 이용하여 r -번째 과정을 다음과 같은 매우 간단한 연산에 의하여 수행할 수 있다 [11].

- 1) $A c_r$ 을 계산한다.
- 2) 이 벡터에서 c_1 의 상수 배를 빼 첫 번째 요소의 값을 0으로 하고, 그 비율을 h_{1r} 값으로 취한다.
- 3) 그 다음 c_2 의 상수 배를 빼 두 번째 요소의 값을 0으로 하고, 그 비율을 h_{2r} 값으로 취한다. ..., c_r 의 상수 배를 빼 r -번째 요소의 값을 0으로 하여 식 (39)의 b_{r+1} 을 얻는다. 여기서 k_{r+1} 의 값으로 b_{r+1} 의 $(r+1)$ -번째 해의 값을 취하면 식 (52) 형태의 c_{r+1} 을 얻는다.

식 (51)에서 만약 $e_i^T c_i$ 값이 $i = 1, \dots, r$ 에 대하여 적어도 하나가 0이면 Hessenberg법은 실패한다. 따라서 Hesseberg법에서는 pivoting이 필수적이다. Pivoting에 관한 상세한 것은 문헌 [11]에 기술되어 있다.

Pivoting 기능을 포함한 Hessenberg법의 장점은 수치적 안정성이 QR법에 비교될 정도로 매우 좋아 재직교화과정이 필요하지 않고, 따라서 매우 효율적이다.

4.2.4 반복법에 의한 오차의 제어

Arnoldi법이나 Hessenberg법에서 행렬 A 의 고유치를 m -차원 부분공간으로 축약한 $m \times m$ 행렬 H_m 의 고유치로 계산하는 것은, k_{r+1} 이 정확히 0이 되지 않기 때문에 오차를 유발하고 오차의 크기는 k_{r+1} 의 크기에 좌우된다. 따라서, 오차를 제어하기 위하여 Arnoldi법 또는 Hessenberg법에서는 반복법을 사용한다.

λ_k 와 x_k 를 각각 m -차원 부분공간에서 계산한 상태행

렬 A 의 근사 고유치와 고유벡터라 하면, 이 값의 오차는 아래 유수벡터(residue vector)로 나타낼 수 있다.

$$r_k = A x_k - \lambda_k x_k = h_{m+1,m} c_{m+1} p_{km} \quad (53)$$

여기서 p_{km} 은 행렬 P_m 의 (m,k) 요소의 값이다. 정규화된 오차를 나타내는 유수(residue) norm은 식 (43)과 (53)을 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$\delta_k = \frac{\|r_k\|_2}{\|x_k\|_2} = \frac{|h_{m+1,m} p_{km}| \|c_{m+1}\|_2}{\|C_m \cdot p_k\|_2} \quad (54)$$

계산하고자 하는 고유치의 개수가 s ($s < m$)인 경우, 가장 나중에 계산된 고유치가 가장 느리게 수렴하는 특징이 있으므로 계산된 s -개의 고유치의 정확도를 검증하기 위해서는 s -번째 고유치의 유수 norm만을 검사하면 된다 [7-8].

만약 식 (54)로 계산된 s -번째 고유치의 오차 δ_s 가 허용 오차 ϵ 보다 크면, 반복법에서는 초기 Krylov 벡터 c_1 을 식 (55)와 같이 원하는 s -개의 고유치에 관련된 고유벡터를 강조하여 다시 산정하고 오차가 허용치 이내로 진입할 때까지 앞의 Arnoldi 또는 Hessenberg 법을 반복 적용한다.

$$c_1 = \alpha \sum_{k=1}^s \|r_k\|_2 x_k \quad (55)$$

위에서 α 는 초기벡터 c_1 을 정규화하기 위한 상수이며, 식 (55)에서 유수 벡터의 크기에 비례하는 가중치 $\|r_k\|_2$ 를 주는 이유는 유수 벡터의 크기가 크면 그에 해당하는 고유치/고유벡터의 오차가 큼을 의미하므로 초기벡터에 그 성분을 강조하여 다음 반복에서 그 성분의 오차를 줄이기 위한 것이다. 이 방법은 작은 크기의 m 값으로도 고유치를 원하는 정확도로 계산할 수 있는 장점이 있다.

Hessenberg 법의 반복에 필요한 초기벡터는 식 (53)을 식 (55)에 대입하면 아래 식으로 주다.

$$c_1 = \alpha h_{m+1,m} \|c_{m+1}\|_2 C_m \sum_{k=1}^s |p_{km}| p_k \quad (56)$$

오차의 제어는 Rayleigh quotient iteration (RQI)에 의해서도 가능하다[4,11].

4.2.5 수렴속도 개선을 위한 행렬의 변환

Hessenberg법과 Arnoldi법은 Power법과 같이 고유치의 크기가 큰 고유치를 우선적으로 계산하는 특성이 있다. 미소신호안정도 해석에서는 0.2~2 Hz 사이의 전기기계적 진동모드 중 제동특성이 불량한 모드, 즉 s -평면의 허수축 가까이 위치한 (지배적) 고유치만을 선택적으로 계산하는 것이 바람직하다. 따라서, 위 방법들을 이용하여 저주파 진동모드만을 선택적으로 구하기 위해서는 관심 영역에 존재하는 고유치들의 크기가 가장 커지도록 상태행렬을 미리

변환하여 (preconditioning) 사용여야 한다.

수정 Arnoldi법과 Hessenberg법에서는 식 (24)의 역행렬 변환에서 복소수 이동점으로 s -평면의 허수축의 한 점을 사용한다. 따라서 복소수 이동점 $j\omega$ 부근에 위치한 고유치는 그 크기가 확대되고 이동점으로부터 거리가 멀어질수록 크기가 급격히 감소하므로, 이 복소수 이동점 부근에 위치한 고유치만을 작은 크기의 Hessenberg 행렬로 계산할 수 있어 수렴속도가 빠르다. 그러나 이 변환은 연산을 복소수로 수행하여야 하는 부담에다 복소수 이동점 부근의 고유치만을 우선적으로 계산하므로 미소신호안정도 해석에서 필요한 모든 지배적 진동모드를 빠짐없이 계산하기 위해서는 복소수 이동점을 0.2 Hz에서 2 Hz까지 이동하면서 전 주파수대역을 탐색하여야 한다.

또 다른 행렬변환 방법으로는 식 (57)과 같은 Cayley (또는 S-변환)이 제안되었다 [9].

$$S = (A + hI)(A - hI)^{-1} \quad (57)$$

이 S-변환된 행렬의 고유치 λ_s 는

$$\lambda_s = \frac{\lambda_A + h}{\lambda_A - h} \quad (58)$$

λ_s 의 크기는 저주파진동 모드 λ_A 가 허수축에 있으면 크기가 1이고, λ_A 가 허수축으로부터 우반평면으로 이동할수록 커지고, 좌반평면으로 이동할수록 작아진다. 즉, 제동특성이 불량한 진동모드일수록 그 크기가 커져 Hessenberg법에 의해 우선적으로 계산되는 이상적인 특성이 있다. 또한 모든 행렬연산을 실수로 할 수 있는 것도 장점이다. 그러나 저자의 경험에 의하면, 허수축 가까이 위치한 모든 저주파진동모드의 λ_s 값이 거의 1에 가까운 비슷한 값을 가지기 때문에 Hessenberg 행렬 H_m 의 크기가 커지고 수렴속도가 느린 단점이 있다.

5. 한전계통의 미소신호 안정도

표 1은 2000년 침두부하와 2003년 비침두부하 한전계통의 지배적 진동모드를 Hessenberg법으로 계산한 결과를 보여주고 있다. 2000년에는 2개의 제동특성이 불량한 모드가 발견되었으나, 2003년에는 6개가 계산되었다. 2000년 계통에 대하여 EPRI의 MAM을 사용하여 계산한 결과도 Hessenberg법으로 계산한 결과와 거의 일치하여 Hessenberg법의 결과는 정확하다고 생각된다[11]. 사용된 계통 데이터는 한 시점에서 장기 예측한 수치로 실제의 계통조건과 차이가 있을 수 있으므로, 이 결과를 가지고 구체적인 미소신호안정도에 관한 결론을 내릴 수 없다. 그러나 앞으로 저주파진동 문제가 더 심각해질 수 있다는 것은 쉽게 예측이 가능하다.



표 1. 한전계통의 지배적 저주파진동모드

2000년 첨두부하	2003년 비첨두부하
-0.0415 + 4.3364i	0.2809 + j 4.9486
-0.0309 + 5.4118i	-0.0301 + j 5.0242
	-0.0967 + j 6.1075
	0.2562 + j 6.2574
	-0.0757 + j 7.7365
	-0.1040 + j 7.8274

6. 결 론

본 논문에서는 현대 전력계통에서 계통 리액턴스의 증가, 중부하 운전, 고성능 여자기의 사용으로 저주파진동 문제가 나타나는 원인을 보이고, 저주파진동을 해석하는 역반복법, AESOPS법, 수정 Arnoldi법, Hessenberg법 등의 알고리즘을 요약하여 소개하였다. 또한 한전계통에서도 저주파진동 문제가 존재할 가능성이 있음도 보였다.

참고문헌

- [1] C. W. Taylor, "The Future in On-line Security Assessment and Wide Area Stability Control," IEEE 2000 PES Winter Meeting, January 24-27, 2000, Singapore.
- [2] G. K. Morison, H. Hamadanizadeh and L. Wang, "Dynamic Security Assessment Tools," IEEE 1999 PES Summer Meeting, June 18-22, 1999, Edmonton.
- [3] P. Kundur, Power System Stability and Control, McGraw-Hill Book Company, New York, 1994.
- [4] J. H. Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, 1965, pp. 377-392.
- [5] EPRI, Phase II: Frequency Domain Analysis of Low Frequency Analysis Oscillations in Large Power System, Vol.2, Final Report EPRI EL-2348, 1982.
- [6] N. Martins, H. Pinto, L. Lima, "Efficient Methods for Finding Transfer Function Zeros of Power Systems", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 7, No. 3, pp. 1350-1361, August 1992.
- [7] D. Y. Wong, G. J. Rogers, B. Porreta, and P. Kundur, "Eigenvalue Analysis of Very Large Power Systems", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. PWRS-3, May 1988.
- [8] L. Wang, A. Semlyen, "Application of Sparse Eigenvalue Techniques to the Small Signal Stability Analysis of Large Power Systems", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. PWRS-5, No. 2, pp. 635-642, May 1990.

- [9] N. Uchida and T. Nagao, "A New Eigen-Analysis Method of Steady State Stability Studies for Large Power Systems: S Matrix Method", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. PWRS-3, No. 2, pp. 706-714, May 1988.
- [10] 남 해곤, 심관식, 문 채주, "Modal Analysis of Large Scale Power System Using Hessenberg Process", 대한전기학회 논문지, 42권, 10호, pp. 53-63, 1993.
- [11] 남 해곤, 송 성근, 심 관식, 문 채주, 김 동준, 문 영환, "대규모 전력계통의 미소신호 안정도 해석을 Hessenberg 법, 대한전기학회 논문지", 49A권, 4호, pp 168-176, 2000. 4.

저 자 소 개



남 해 곤 (南海鎧)

1950년 10월 16일생. 1975년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1980년 Univ. of Houston 졸업(석사). 1986년 Univ. of Texas at Austin 졸업(공학박사). 1975년-1978년 한국전력 원자력 건설부 근무. 1986년-1988년 한국전기연구소 근무. 1988년-현재 전남대 공대 전기공학과 부교수.



송 성 근 (宋成根)

1975년 9월 16일생. 1998년 전남대 공대 전기공학과 졸업. 2000년 동 대학원 졸업(석사). 현재 전남대 대학원 박사과정.



심 관 식 (沈冠植)

1965년 8월 24일생. 1991년 전남대 공대 전기공학과 졸업. 1994년 동 대학원 졸업(석사). 1997년 동 대학원 졸업(공학박사). 1997년-현재 서남대 전자전기공학과 전임 강사.