

# Takagi-Sugeno 퍼지 시스템에 대한 최적 제어기 설계 및 우주 비행체의 자세 제어 응용

## Design of the Optimal Controller for Takagi-Sugeno Fuzzy Systems and Its Application to Spacecraft Control

박연묵, 탁민제  
(Yonmook Park and Min-Jea Tahk)

**Abstract** : In this paper, a new design methodology for the optimal control of nonlinear systems described by the TS(Takagi-Sugeno) fuzzy model is proposed. First, a new theorem concerning the optimal stabilizing control of a general nonlinear dynamic system is proposed. Next, based on the proposed theorem and the inverse optimal approach, an optimal controller synthesis procedure for a TS fuzzy system is given. Also, it is shown that the optimal controller can be found by solving a linear matrix inequality problem. Finally, the proposed method is applied to the attitude control of a rigid spacecraft to demonstrate its validity.

**Keywords** : optimal control, Takagi-Sugeno fuzzy system, gain scheduling, linear matrix inequality, spacecraft attitude control

### I. 서론

Takagi와 Sugeno[1]가 퍼지 제어분야에 TS(Takagi-Sugeno) 퍼지 모델을 제안한 이후로 안정도를 보장하는 퍼지 제어기의 설계에 관한 여러 연구가 진행되어왔다 [2]-[6]. 이러한 연구들은 퍼지 제어에 대한 안정도 문제에 역점을 두었으며, 엄격한 안정도 증명을 갖는 퍼지 제어기 설계 방법론을 제공하였다. 안정도 문제 이외에 최적성(Optimality)은 어떠한 제어기 설계에 있어서도 중요한 사항으로, 퍼지 제어 분야에서는 최근에 몇몇 연구가들에 의해 최적 안정화 제어기에 관한 연구가 진행되었다[7][8]. 참고문헌 [7]에서는 고전적인 선형 이차(linear-quadratic) 최적 제어 기법[9]에 기반하여 주어진 비용 함수(cost function)를 최소화하는 Riccati 방정식을 유도하고, 이에 대한 정상 상태(steady state) 방정식을 수치적으로 풀어서 최적 제어기를 설계하였다. 그리고, 참고문헌 [8]에서는 역 최적 접근법(inverse optimal approach)[10]을 이용하여 최적 제어기를 설계하였다. 역 최적 접근법은 Kalman [11]에 의해 처음 제안되었으며, 최근에는 강인 비선형 제어기의 설계를 위해 참고문헌 [12]에서 개주하였다. 역 최적 접근법은 기존의 선형 이차 최적 제어 기법과는 달리 최적 제어기 설계를 위해 HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman) 방정식을 푸는 작업을 피하며, 안정화된 제어기를 먼저 설계한 후에 설계된 제어기가 어떤 비용 함수에 대해서 최적임을 보이는 것에 기반한다. 본 논문과 참고문헌 [8]에서 제안한 방법과의 차이점은, 본 논문에서는 일반적인 비선형 동적 시스템의 최적 안정화 제어에 관한 새로운 정리를 정립함으로써 최적 제어기 설계 절차를 개발하고 이에

대한 응용 예로써 쿼터니언(quaternion)에 의해 표현되는 강체인 우주 비행체(rigid spacecraft)의 자세 제어 문제를 고려하는 반면에, 참고문헌 [8]에서는 [10]에서 주어진 최적성 조건을 이용해 최적 제어기를 설계하였고 그 응용 예로써 3차원 Cayley-Rodrigues 벡터로 표현되는 강체인 우주 비행체의 자세 제어 문제를 고려하였다.

본 논문에서는 TS 퍼지 모델로 표현된 비선형 시스템에 대해 최적 안정화 제어기를 제공하는 새로운 설계 절차를 제안한다. 먼저, 일반적인 비선형 동적 시스템의 최적 안정화 제어에 관한 새로운 정리를 제안한다. 다음으로, TS 퍼지 시스템에 대해서 제안한 정리와 역 최적 접근법[10]에 기반한 최적 제어기 설계 절차를 보인다. 그리고, 최적 안정화 제어기의 매개 변수들이 선형행렬부등식(LMI: Linear Matrix Inequality) 문제를 풀어서 얻어질 수 있음을 보인다. LMI로 표현된 제어기 설계 문제의 형식화는 신뢰적이며 효율적인 convex 최적화 기법[13](예로써, LMI Control Toolbox[14])에 의해 풀릴 수 있으므로 매우 실질적인 가치를 지닌다. 마지막으로, 본 논문에서 제안한 설계 절차를 검증하기 위해서, 제안한 방법을 쿼터니언에 의해 표현되는 강체인 우주 비행체의 자세 제어 문제에 적용한다. 강체에 대한 최적 제어 문제는 우주 비행체와 항공기의 최적 제어를 목적으로 많은 학자들에 의해서 연구되어 왔으며, 최근에는 강체의 동역학(dynamics)과 운동학(kinematics)을 포함한 완전한(complete) 시스템에 대한 최적 자세 제어 문제가 연구되고 있다: 최적 제어기를 얻기 위해 참고문헌 [15]에서는 다항식 확장(polynomial expansion)을 이용하여 HJB 방정식의 해를 근사화하였다. 참고문헌 [16]에서는 비대칭 강체의 완전한 시스템에 대해 전역 점근적으로 안정한 궤환 제어기가 유도되었으며, 참고문헌 [17]에서는 강체의 동역학과 운동학 사이의 수동성에 관한 특성을 이용해서 대칭구조를 갖는 강체의 최적 조절 문제에 대한 해를 제공하였다. 그리고, 참고문헌 [8]과

접수일자 : 2001. 1. 30., 수정완료 : 2001. 4. 30.

박연묵, 탁민제 : 한국과학기술원 항공우주공학전공(ympark@fdcl.kaist.ac.kr/mjtahk@fdcl.kaist.ac.kr)

\* 본 연구는 한국 과학 재단(과제 번호 : 1999-2-305-004-3)에 의해 지원을 받았습니다.

[18]에서는 역 최적 접근법에 기반하여 3차원 Cayley-Rodrigues 벡터로 표현되는 강체인 우주 비행체에 대한 최적 제어를 유도하였다.

본 논문에서 고려하는 강체인 우주 비행체의 자세 운동에 관한 시스템 동역학은 본질적으로 종속 상호연결(cascade interconnection)되어 있다. 이러한 형태의 시스템에 대한 안정화 제어를 설계하기 위해서, 본 논문에서는 backstepping 기법[19]을 이용하여 시스템의 안정화 문제를 조절(regulation) 문제로 변경한다. 참고문헌 [18]의 연구 결과가 강체인 우주 비행체에 대해 새로운 최적 안정화 제어를 제공하고 있으나, 이 연구는 시스템의 매개변수를 정확히 알고 있어야 한다는 가정을 내재하고 있다. 그러나, 많은 실제 상황에 있어서 이러한 가정은 성립되지 않을 수 있다. 따라서, 이러한 실제적인 문제와 함께 성능에서의 최적성을 고려할 수 있는 다른 설계 방법이 필요하다. 이것이 본 논문에서 제안한 방법을 강체인 우주 비행체의 자세 제어에 적용한 가장 중요한 동기이다. 더욱이, 참고문헌 [8]과 [18]에서는 특이성(singularity)을 내재하고 있는 3차원 Cayley-Rodrigues 벡터로 표현된 강체인 우주 비행체의 자세 제어 문제를 고려하고 있으므로, 본 논문에서 고려하는 쿼터니언에 기반한 강체인 우주 비행체의 자세 제어 문제는 이러한 본질적인 문제를 해결할 수 있는 대안이라고 할 수 있다. 저자의 지식으로 본 연구의 가장 큰 공헌은 쿼터니언에 기반한 강체인 우주 비행체의 자세 안정화 문제를 TS 퍼지 제어 문제로 변경하고, 이 문제에 대해서 최적 안정화 제어에 관한 새로운 정리를 바탕으로 최적 안정화 제어를 설계한 것이라고 할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다 : 2장에서는 TS 퍼지 시스템에 대해서 설명한다. 3장에서는 비선형 시스템의 최적 안정화 제어에 관한 새로운 정리를 제안하며, 4장에서는 제안한 정리와 역 최적 접근법에 기반하여 TS 퍼지 시스템에 대한 최적 제어기 설계를 고려한다. 5장에서는 제안한 방법의 유용성을 보이고자 제안한 방법을 강체인 우주 비행체의 자세 제어 문제에 적용한다. 그리고, 6장에서 본 논문의 결론을 내린다.

**II. TS 퍼지 시스템**

Takagi와 Sugeno[1]에 의해 제안된 TS 퍼지 모델과 TS 퍼지 제어기는 각각 다음과 같은 퍼지 IF-THEN 규칙으로 주어진다 :

- 플랜트 규칙  $i$  : IF  $x_1(t)$  is  $M_{i1}$  and ... and  $x_n(t)$  is  $M_{in}$ ,
- THEN
- $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$ ,  $i = 1, \dots, r$ .
- 제어기 규칙  $i$  : IF  $x_1(t)$  is  $M_{i1}$  and ... and  $x_n(t)$  is  $M_{in}$ ,
- THEN
- $u(t) = -K_i x(t)$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

여기서,  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  과  $M_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $j = 1, \dots, n$  는 각각 상태 변수들과 퍼지 집합들이고,  $r$

은 IF-THEN 규칙의 갯수이다. 그리고,  $u(t) \in R^p$  는 입력 벡터이고  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $B_i \in R^{n \times p}$  이다. 퍼지 추론 방법에 의해서 TS 퍼지 모델과 TS 퍼지 제어기의 시간  $t$  에서의 상태 방정식은 각각 다음과 같다[3] :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \quad (1)$$

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) K_i x(t) \quad (2)$$

여기서,  $h_i$  는

$$h_i(x(t)) \triangleq \frac{\prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j(t))}{\sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j(t))}, \quad i = 1, \dots, r$$

으로 정의되는 정규화된 하중 함수들이고  $M_{ij}(x_j(t))$  는 퍼지 집합  $M_{ij}$  에서  $x_j$  의 소속 정도이다. 정규화된 하중 함수  $h_i$  는  $h_i(x(t)) \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, r$  과  $\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) = 1, \forall t \geq 0$  을 만족한다.

(1)과 (2)에서 보여지는 바와 같이, TS 퍼지 모델은  $r$  개의 국소(local) 선형 시스템 모델과 이와 연관된 정규화된 하중 함수로 표현되며, TS 퍼지 제어기는 각각의 국소 선형 시스템 모델에 대한 제어 이득  $K_i$  와 정규화된 하중 함수로 구성된다. 따라서, 시스템 (1)을 안정화시킬 수 있는 제어기 (2)를 설계하는 문제는  $r$  개의 선형 시스템을 안정화시키는 선형 제어기들을 내삽(interpolation)하는 이득 계획(gain scheduling) 문제임을 알 수 있으며, 궁극적으로 제어기 (2)의 매개 변수들  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  는 TS 퍼지 시스템 (1)의 안정도와 성능 요건들을 만족하도록 설계되어야 한다. 본 논문에서는 최적 제어 기법을 이용하여 시스템 (1)을 안정화시키고 동시에 시스템 (1)에 대해 최적의 성능을 야기하는 각 국소 선형 제어기의 매개 변수들  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  을 설계하는 문제를 고려한다.

**III. 비선형 시스템에 대한 새로운 최적 제어**

다음과 같은 일반적인 비선형 동적 시스템을 고려하자 :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3)$$

여기서,  $f: R^n \rightarrow R^n$  와  $g: R^n \rightarrow R^{n \times p}$  는 각각 유연한(smooth) 벡터와 행렬 값을 갖는 함수들이고,  $x(t) \in R^n$  와  $u(t) \in R^p$  는 각각 상태 및 입력 벡터이다. 최적 제어 이론에서 가장 중요한 문제 중 하나는 (3) 과 같은 비선형 시스템에 대해서 다음과 같은 특성들을 갖는 제한 제어 법칙  $u$  를 찾는 것이다 :

- $u$  가 평형점  $x = 0$  의 전역 점근적 안정을 달성한다.
- $u$  가 다음과 같은 비용 함수를 최소화한다.

$$J_{\text{cost}} = \int_0^{\infty} (l(x) + u^T R(x)u) dt \quad (4)$$

여기서,  $l(x) > 0$  이고  $R(x) = R^T(x) > 0, \forall x$  이다. 본 논문에서는 이 문제에 대한 해를 제공하고자 다음

과 같은 정리를 제안한다.

정리 1 : 시스템 (1)의 유연한 벡터 필드  $f: R^n \rightarrow R^n$  와  $g: R^n \rightarrow R^{n \times p}$  에 관한 유연한 스칼라(scalar) 함수  $V: R^n \rightarrow R$  의 Lie derivative를 각각  $L_f V(x)$  와  $L_g V(x)$  라고 정의하자(즉,  $L_f V(x) \triangleq (\frac{\partial V}{\partial x})f(x)$  이고  $L_g V(x) \triangleq (\frac{\partial V}{\partial x})g(x)$  이다).  $x$  에 대해서 연속 1차 미분 항을 갖는 방사상으로 유계되지 않은(radially unbounded) 양의 정부호 함수  $V(x)$  가 존재하고, 이 함수가 다음과 같은 HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman) 방정식

$$\begin{aligned}
 I(x) + 2L_f V(x) - (L_g V(x))R^{-1}(x)(L_g V(x))^T &= 0, \\
 V(0) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

을 만족하며,  $R(x) = R^T(x) > 0, \forall x$  을 갖는 폐환 제어

$$u = -\frac{1}{2}R^{-1}(x)(L_g V(x))^T$$

가 시스템 (3)에 대한 평형점  $x = 0$  의 전역 점근적 안정을 달성한다고 하자. 그러면 제어 법칙

$$u^* = 2u = -R^{-1}(x)(L_g V(x))^T \tag{6}$$

는  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  를 보장하는 전체  $u$  에 대해 비용 함수 (4)를 최소화하는 시스템 (3)에 대한 최적 전역 안정화 제어 법칙이다.

증명 :  $v \triangleq u + R^{-1}(x)(L_g V(x))^T$  를 정의하자.  $v$  를 비용 함수 (4)에 대입하고 HJB 방정식 (5)를 이용하면 다음과 같은 일련의 등식을 얻는다 :

$$\begin{aligned}
 J_{cost} &= \int_0^\infty (I(x) + v^T R(x)v - 2(L_g V(x))v \\
 &\quad + L_g V(x)R^{-1}(x)(L_g V(x))^T) dt \\
 &= \int_0^\infty (-2L_f V(x) + 2L_g V(x)R^{-1}(x)(L_g V(x))^T \\
 &\quad - 2L_g V(x)v) dt + \int_0^\infty v^T R(x)v dt \\
 &= \int_0^\infty (-2L_f V(x) - 2L_g V(x)u) dt \\
 &\quad + \int_0^\infty v^T R(x)v dt \\
 &= -2 \int_0^\infty \frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + g(x)u) dt \\
 &\quad + \int_0^\infty v^T R(x)v dt \\
 &= -2 \int_0^\infty \frac{dV}{dt} dt + \int_0^\infty v^T R(x)v dt \\
 &= 2V(x(0)) - 2 \lim_{T \rightarrow \infty} V(x(T)) \\
 &\quad + \int_0^\infty v^T R(x)v dt.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

여기서  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  을 달성하는  $u$  에 대해서 비용 함수 (4)를 최소화하므로,  $V(x(T))$  의 상한은 0 이 되어 다음을 얻을 수 있다 :

$$J_{cost} = 2V(x(0)) + \int_0^\infty v^T R(x)v dt. \tag{7}$$

명백하게, (7)의 최소 값은  $2V(x(0))$  이다. 이것은 (6)에 의해 주어진  $u^*$  가 최적임을 입증하는  $v \equiv 0$  에

대해서 성립한다. 이것으로 증명을 완성한다. ■

HJB 방정식을 푸는 것은 일반적으로 쉬운 작업이 아니다. 그러나, 만약 설계자가 함수  $I(x)$  를 나중에 선택한다면 최적화 문제를 더욱 쉽게 풀 수 있는데, 이것을 역 최적 접근법(inverse optimal approach)이라고 부른다. 이 방법을 이용하여 정리 1의 최적 제어 문제를 푸는 과정은 다음과 같다: 만약  $u^*$  가 (6)과 같이 표현되면 안정화 제어  $u$  는 시스템 (3)에 대해 최적 문제를 풀 수 있는데, 여기서  $V(x)$  는 방사상으로 유계되지 않은 양의 정부호 함수로  $\dot{V}(x)$  의 음의 정부호가 제어 법칙  $u = u^*/2$  를 가지고 달성된다. 즉,

$$\dot{V}(x)|_{u=\frac{1}{2}u^*} = L_f V(x) + \frac{1}{2}(L_g V(x))u^* < 0. \tag{8}$$

만약 함수  $I(x)$  를

$$\begin{aligned}
 I(x) &:= -2 \dot{V}(x)|_{u=\frac{1}{2}u^*} \\
 &= -2L_f V(x) + (L_g V(x))R^{-1}(x)(L_g V(x))^T > 0
 \end{aligned}$$

와 같이 취하면,  $V(x)$  는 HJB 방정식 (5)의 해가 된다. 더욱이, (8)의 결과를 가지고  $L_g V(x) \neq 0, \forall x \neq 0$  에 대해 다음을 보장 할 수 있다 :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x)|_{u=u^*} &= L_f V(x) + (L_g V(x))u^* \\
 &= \dot{V}(x)|_{u=\frac{1}{2}u^*} + \frac{1}{2}(L_g V(x))u^* \\
 &< \frac{1}{2}(L_g V(x))u^* \\
 &= -\frac{1}{2}L_g V(x)R^{-1}(x)(L_g V(x))^T \\
 &< 0.
 \end{aligned}$$

따라서, 위 결과로부터 다음 보조정리를 얻을 수 있다.

보조정리 1 : 만약

- 제어 법칙  $u^*$  가 시스템 (3)에 대해 평형점  $x = 0$  의 전역 점근적 안정을 달성하고
- 제어 법칙  $u^*$  가 다음과 같은 형태이고

$$u^* = 2u = -R^{-1}(x)(L_g V(x))^T \tag{9}$$

여기서,  $R(x) = R^T(x) > 0, \forall x$  이고  $V(x)$  는 방사상으로 유계되지 않은 양의 정부호 함수로

$$\dot{V}(x)|_{u=\frac{1}{2}u^*} = L_f V(x) + \frac{1}{2}(L_g V(x))u^* < 0$$

을 만족하면,  $u^*$  는 다음과 같은 비용 함수에 관해 시스템 (3)에 대한 최적 전역 안정화 제어 법칙이다.

$$J_{cost} = \int_0^\infty (I(x) + u^T R(x)u) dt$$

여기서

$$\begin{aligned}
 I(x) &:= -2 \dot{V}(x)|_{u=\frac{1}{2}u^*} \\
 &= -2L_f V(x) + (L_g V(x))R^{-1}(x)(L_g V(x))^T.
 \end{aligned}$$

증명 : 위 결과로부터 생략한다. ■

#### IV. TS 퍼지 시스템에 대한 최적 제어기 설계

이번 장에서는 3장에서 제안한 결과에 기초하여 TS 퍼

지 시스템에 대한 최적 제어기 설계 절차를 보인다. 다음과 같이 공통 입력 행렬을 갖는 TS 퍼지 시스템을 고려하자 :

$$\dot{x}(t) = \left\{ \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) A_i x(t) \right\} + B u(t). \quad (10)$$

그러면,  $f(x) \triangleq \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) A_i x(t)$  와  $g(x) \triangleq B$  를 가지고 (10)은 정규 형태(canonical form) (3)에 의해 표현되는 비선형 시스템의 한 예라고 할 수 있다. 따라서, 보조정리 1은 TS 퍼지 시스템 (10)에 대한 최적 전역 제어기  $u^*$  를 얻는데 사용될 수 있다. 먼저,  $V(x) = x^T X^{-1} x$ ,  $X = X^T > 0$  으로 정의되는 방사상으로 유계되지 않은 양의 정부호 함수  $V(x)$  를 고려하자. 만약  $R(x)$  를 항등행렬(identity matrix)로 취하면, 제어기  $u^*$  (9)는 다음과 같이 간략화 된다 :

$$\begin{aligned} u^* &= -(L_g V(x))^T = -[L_g(x^T X^{-1} x)]^T \\ &= -[2x^T X^{-1}(B)]^T = -2B^T X^{-1} x \quad (11) \\ &\triangleq -Kx. \end{aligned}$$

보조정리 1에 의해서, (11)로 주어지는 제어기  $u^*$  가 TS 퍼지 시스템 (10)에 대해 최적 전역 안정화 제어 법칙이 되기 위한 조건은 다음과 같다 :

$$\left\{ \begin{array}{l} X > 0, \\ \dot{V}(x)|_{u=\frac{1}{2}u^*} = L_f V(x) + \frac{1}{2}(L_g V(x)) u^* \\ \quad = x^T \left[ \sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i^T X^{-1} \right. \\ \quad \quad \left. + X^{-1} A_i) - 2X^{-1} B B^T X^{-1} \right] x \\ \quad < 0. \end{array} \right. \quad (12)$$

정규화된 하중 함수  $h_i$  는  $h_i(x) \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, r$  과  $\sum_{i=1}^r h_i(x) = 1$  을 만족하므로, 조건 (12)는 다음과 같이 표현된다 :

$$\left\{ \begin{array}{l} X > 0, \\ A_i^T X^{-1} + X^{-1} A_i - 2X^{-1} B B^T X^{-1} < 0, \quad i = 1, \dots, r. \end{array} \right. \quad (13)$$

결론적으로 (13)의 두 번째 부등식의 양변에  $X$  를 곱함으로써, 다음과 같이 TS 퍼지 시스템 (10)에 대해 최적 전역 안정화 제어기  $u^*$  를 제공하는 설계 절차를 얻을 수 있다 :

• TS 퍼지 시스템 (10)에 대한 최적 전역 안정화 제어기 설계 절차 :

i) 다음 LMI를 만족하는 행렬  $X = X^T \in R^{n \times n}$  을 구한다 :

$$\left\{ \begin{array}{l} X > 0, \\ A_i X + X A_i^T - 2B B^T < 0, \quad i = 1, \dots, r. \end{array} \right. \quad (14)$$

ii)  $K = 2B^T X^{-1}$  를 계산하여 다음과 같이 제어기  $u^*$  를 설계한다 :

$$u^* = -Kx. \quad (15)$$

언급 1 : 공통 입력 행렬을 갖지 않는 TS 퍼지 시스템을 고려하면, 상태 방정식 (1)은 다음과 같이 표현된다 :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left\{ \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) A_i x(t) \right\} \\ &\quad + \left\{ \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) B_i \right\} u(t). \end{aligned} \quad (16)$$

앞의 공통 입력 행렬을 갖는 경우와 유사한 과정을 거치면, 아래와 같이 TS 퍼지 시스템 (16)에 대해서 최적 전역 안정화 제어기  $u^*$  를 제공하는 설계 절차를 얻을 수 있다 :

• TS 퍼지 시스템 (16)에 대한 최적 전역 안정화 제어기 설계 절차 :

i) 다음 LMI를 만족하는 행렬  $X = X^T \in R^{n \times n}$  을 구한다 :

$$\left\{ \begin{array}{l} X > 0, \\ A_i X + X A_i^T - 2B B^T < 0, \quad i = 1, \dots, r, \\ \frac{1}{2} A_i X + \frac{1}{2} X A_i^T + \frac{1}{2} A_j X + \frac{1}{2} X A_j^T \\ \quad - B_i B_j^T - B_j B_i^T < 0, \quad 1 \leq i < j \leq r. \end{array} \right. \quad (17)$$

ii)  $K_i = 2B_i^T X^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, r$  를 계산하여 다음과 같이 제어기  $u^*$  를 설계한다 :

$$u^* = - \sum_{i=1}^r h_i(x) K_i x.$$

언급 2 : (14)와 (17)에서 보여지는 바와 같이, TS 퍼지 시스템 (10)과 (16)에 대한 최적 전역 안정화 제어기를 구하는 문제는 LMI 가능성(feasibility) 문제이다. 이 문제에 대한 해를 효율적으로 계산하고자 한다면, LMI Control Toolbox[14]의 “feasp” 함수를 사용할 수 있다.

**V. 예제**

이번 장에서는 본 논문에서 제안한 방법의 유용성을 보이고자 수치 예제를 다룬다. 수치 예제로써 다음과 같이 쿼터니언에 의해 표현되는 강체인 우주 비행체의 완전한 자세 운동을 고려한다 :

$$\dot{\omega} = J^{-1} S(\omega) J \omega + J^{-1} u, \quad (18.1)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} E(q) \omega, \quad (18.2)$$

여기서,  $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  는 동체-고정(body-fixed) 축에 대한 동체의 각 속도 벡터이고,  $q = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T \triangleq [q_0 \ q_v]^T$  는 쿼터니언으로  $q^T q = 1$  조건을 만족한다. 또한,  $\phi$  와  $\hat{e}$  를 각각 동체의 회전에 대한 Euler 각도와 Euler 축이라고 하면,  $q_0$  와  $q_v$  는 각각  $q_0 \triangleq \cos(\phi/2)$  과  $q_v \triangleq \hat{e} \sin(\phi/2)$  으로 정의된다. 그리고,  $J = J^T > 0$  는 동체의 관성(inertia) 행렬이고,  $S(\omega)$  는 반-대칭(skew-symmetric) 행렬로

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

이며,  $E(q)$  는 다음과 같이 정의되는데

$$E(q) = \begin{bmatrix} -q_v^T \\ q_0 I_3 + S(q_v) \end{bmatrix},$$

여기서  $I_3$  은  $3 \times 3$  항등 행렬이다.

시스템 (18)은 종속 상호연결 되어 있으므로, 제안한 방법을 적용하기 위해 backstepping 기법[19]을 이용하여 시스템의 안정화 문제를 조절 문제로 변경한다. 이 기법을 이용하면 다음 정리를 얻는다.

정리 2:  $\omega$  를 제어 입력으로 갖는 시스템 (18.2)을 고려하고 제어 법칙이

$$\omega_d = -k_1 q_v, \quad k_1 > 0 \quad (19)$$

이라고 하자. 그러면, (19)에 의해서 페루프 시스템은

$$\dot{q} = -\frac{1}{2} k_1 E(q) q_v \quad (20)$$

이 되며, 시스템 (20)은 전역 점근적으로 안정하다.

증명: 방사상으로 유계되지 않은 Lyapunov 함수  $V(q) = k_2 [(q_0 - 1)^2 + q_v^T q_v]$ ,  $k_2 > 0$  를 고려하자. 페루프 시스템 (20)의 궤적에 대해  $V$  의 시간에 대한 미분을 취하면,

$$\begin{aligned} \dot{V}(q) &= k_2 [2(q_0 - 1)\dot{q}_0 + 2 q_v^T \dot{q}_v] \\ &= -k_1 k_2 \|q_v\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서, 전역 점근 안정도는 LaSalle Invariance Principle[20]과 방사상으로 유계되지 않은  $V$  의 성질로부터 얻을 수 있다. 이것으로 증명을 완성한다. ■

이제 정리 2를 이용하여 시스템 (18)의 안정화 문제를 조절 문제로 변경한다. 먼저, 변수  $z$  를

$$z := \omega - \omega_d = \omega + k_1 q_v \quad (21)$$

와 같이 정의하자. 그러면, (21)에 의해 주어진  $z$  와  $q_v$  에 관한 방정식은 다음과 같이 주어진다:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \left\{ J^{-1} S(z - k_1 q_v) J + \frac{1}{2} k_1 S(q_v) + \frac{1}{2} k_1 q_0 I_3 \right\} z \\ &\quad - k_1 \left\{ J^{-1} S(z - k_1 q_v) J + \frac{1}{2} k_1 S(q_v) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} k_1 q_0 I_3 \right\} q_v + J^{-1} u, \\ \dot{q}_v &= \frac{1}{2} \{ S(q_v) + q_0 I_3 \} z - \frac{1}{2} k_1 \{ S(q_v) + q_0 I_3 \} q_v. \end{aligned} \quad (22)$$

다음으로,

$$\begin{aligned} x_1 \triangleq z_1, \quad x_2 \triangleq z_2, \quad x_3 \triangleq z_3, \quad x_4 \triangleq q_1, \quad x_5 \triangleq q_2, \\ x_6 \triangleq q_3, \quad x_z \triangleq [x_1 \ x_2 \ x_3]^T, \quad x_{q_v} \triangleq [x_4 \ x_5 \ x_6]^T, \end{aligned}$$

그리고

$$x \triangleq [x_z^T \ x_{q_v}^T]^T$$

를 정의하면, 시스템 (22)는 다음과 같이 표현된다:

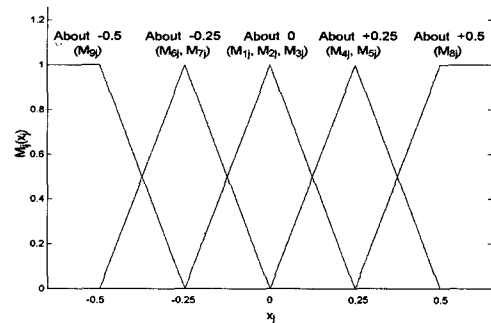
$$\dot{x}(t) = A(x(t)) x(t) + B u(t), \quad (23)$$

여기서  $A(x(t))$  와  $B$  는

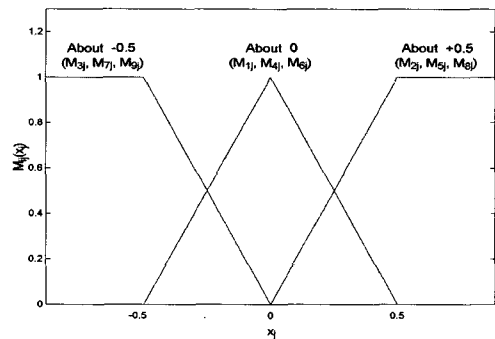
$$\begin{aligned} A(x(t)) &\triangleq \begin{bmatrix} J^{-1} S(x_z - k_1 x_{q_v}) J + \frac{1}{2} k_1 S(x_{q_v}) + \frac{1}{2} k_1 q_0 I_3 \\ \frac{1}{2} \{ S(x_{q_v}) + q_0 I_3 \} \\ -k_1 \left\{ J^{-1} S(x_z - k_1 x_{q_v}) J + \frac{1}{2} k_1 S(x_{q_v}) + \frac{1}{2} k_1 q_0 I_3 \right\} \\ -\frac{1}{2} k_1 \{ S(x_{q_v}) + q_0 I_3 \} \end{bmatrix}, \\ B &\triangleq \begin{bmatrix} J^{-1} \\ O_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이다. 수치 예를 위해서  $J = \text{diag}[10, 15, 20]$  ( $kg \cdot m^2$ )으로 가정하고  $k_1 = 0.2$  로 정한다. 이제 본 논문에서 제안한 방법을 시스템 (23)의 조절 문제에 적용하여 최적 제어를 구한다. 먼저, (23)의  $A(x(t))$  를  $[x_{z_i} \ x_{q_{v_j}}] = [0 \ 0]$ ,  $[0 \ 0.5]$ ,  $[0 \ -0.5]$ ,  $[0.25 \ 0]$ ,  $[0.25 \ 0.5]$ ,  $[-0.25 \ 0]$ ,  $[-0.25 \ -0.5]$ ,  $[0.5 \ 0.5]$ ,  $[-0.5 \ -0.5]$   $i = 1, \dots, 3$  와 같이 아홉 개 동작 점에 대해서 추출하면, 시스템 (23)에 대해 다음과 같은 TS 퍼지 모델을 얻는다:

- 시스템 (23)에 대한 플랜트 규칙  $i$  :
- IF  $x_1$  is  $M_{i1}$  and ... and  $x_6$  is  $M_{i6}$ ,
- THEN
- $\dot{x} = A_i x + B u, \quad i = 1, \dots, 9.$



(a)  $M_{ij}(x_j), \quad i = 1, \dots, 9, j = 1, \dots, 3.$



(b)  $M_{ij}(x_j), \quad i = 1, \dots, 9, j = 4, \dots, 6.$

그림 1. 퍼지 집합  $M_{ij}(x_j)$  의 소속 함수.

Fig. 1. Membership functions of the fuzzy sets  $M_{ij}(x_j)$ .

여기서 상태 행렬  $A_i$  는 위에서 고려한 아홉 개 동작 점을 (23)의  $A(x(t))$  에 대입하여 얻을 수 있고, 퍼지 집합  $M_{ij}$  의 소속 함수들은 그림 1에서 정의된다.

다음으로, 정규화된 하중 함수  $h_i(x(t))$  를

$$h_i(x(t)) \triangleq \frac{\prod_{j=1}^6 M_{ij}(x_j(t))}{\sum_{i=1}^9 \prod_{j=1}^6 M_{ij}(x_j(t))}, \quad i = 1, \dots, 9$$

와 같이 정의하면 시스템 (23)에 대한 TS 퍼지 모델은 다음과 같은 TS 퍼지 시스템이 된다 :

$$\dot{x}(t) = \left\{ \sum_{i=1}^9 h_i(x(t)) A_i x(t) \right\} + B u(t). \quad (24)$$

본 예제에서 고려하는 TS 퍼지 모델은 공통 입력 행렬을 가지므로, 시스템 (24)의 최적 제어를 구하기 위해서 TS 퍼지 시스템 (10)에 대한 최적 제어기 설계 절차를 적용할 수 있다. LMI Control Toolbox[14]의 "feasp" 함수를 이용하여 대각 행렬  $X = X^T > 0$  를 갖는 LMI 조건 (14)를 풀면

$$X = \text{diag}[0.0005, 0.0005, 0.0007, 0.0259, 0.0237, 0.0211]$$

를 얻을 수 있고,  $K = 2B^T X^{-1}$  를 계산하면

$$K = \begin{bmatrix} 363.7202 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 263.7180 & 0 & 0_3 \\ 0 & 0 & 137.0553 & 0 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

$$\triangleq [K_1 \quad 0_3]$$

결론적으로, TS 퍼지 시스템 (24)에 대한 최적 제어기는

$$u^*(t) = -K x(t) = -K_1 x_2(t) \quad (25)$$

이 된다. 본 논문에서 설계된 최적 제어기 (25)와 참고문헌 [8]의 제어기, 그리고 다음과 같이 주어지는 참고문헌 [18]의 최적 제어기

$$u^{**}(t) = -\lambda_{\max}^2(J) \left[ k_2 + \frac{3}{4} k_1 + \frac{9}{2k_1} \left( k_1^2 \left\| \frac{q_v}{q_0} \right\|^2 + \left\| \omega + k_1 \frac{q_v}{q_0} \right\|^2 \right) \right] \times J^{-1} \left( \omega + k_1 \frac{q_v}{q_0} \right) \quad (26)$$

와의 성능 비교를 위해서, 초기조건  $\omega(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\hat{e} = [0.4896 \ 0.2032 \ 0.8480]^T$ ,  $\phi = 2.4648 \text{ (rad)}$  에 대해서  $k_1 = 0.2$  와  $k_2 = 0.1$  을 갖는 제어기 (26)과 제안한 제어기 (25), 그리고 참고문헌 [8]에서 제안한 제어기를  $J = \text{diag}[10, 15, 20] \text{ (kg} \cdot \text{m}^2)$  을 갖는 시스템 (18)에 적용한다. 그러면 각 속도와 쿼터니언에 관한 모의 실험 결과가 각각 그림 2와 그림 3에서 보여진다. 또한, 제어 입력 (25)와 (26), 그리고 참고문헌 [8]의 제어기에 해당하는 제어 입력이 그림 4에서 보여진다. 그림 2-4에서 직선(—)은

본 논문에서 제안한 제어기 (25)를 이용한 궤적을 나타내며, 점선(---)과 일점 쇄선(- · -)은 각각 제어기 (26)과 참고문헌 [8]의 제어기를 이용한 궤적을 나타낸다.

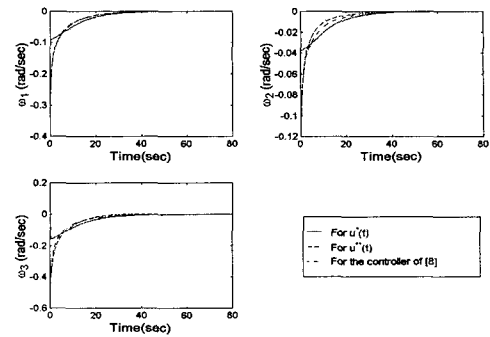


그림 2.  $u^*(t)$ 와  $u^{**}(t)$ , 그리고 참고문헌 [8]의 제어기에 대한 각 속도 응답 비교.  
Fig. 2. Comparison of angular velocity response for  $u^*(t)$ ,  $u^{**}(t)$ , and the controller of [8].

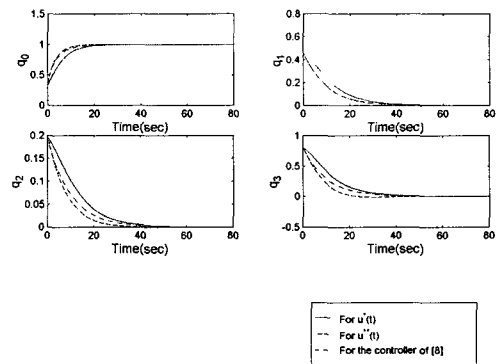


그림 3.  $u^*(t)$ 와  $u^{**}(t)$ , 그리고 참고문헌 [8]의 제어기에 대한 쿼터니언 응답 비교.  
Fig. 3. Comparison of the unit quaternion response for  $u^*(t)$ ,  $u^{**}(t)$ , and the controller of [8].

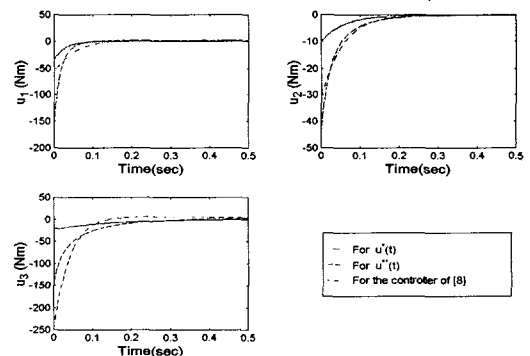


그림 4.  $u^*(t)$ 와  $u^{**}(t)$ , 그리고 참고문헌 [8]의 제어기에 대한 제어 입력 응답 비교.  
Fig. 4. Comparison of control input response for  $u^*(t)$ 와  $u^{**}(t)$ , and the controller of [8].

모의 실험 결과로부터, 본 논문에서 제안한 제어기  $u^*(t)$  (25)가 참고문헌 [18]의 제어기  $u^{**}(t)$  (26)와 참고문헌 [8]의 제어기에 비해서 월등히 적은 제어 입력을 가지고도 시스템의 평형 상태로의 거의 동일한 수렴율을 나타냄을 알 수 있다. 이 결과는 우주 비행체의 연료 소모 측면에서 본 논문에서 제안한 제어기가 월등히 우수함을 나타내며, 이로 인해서 장시간 우주 비행체의 임무가 가능해질 수 있다. 그리고, 이로 인해 얻을 수 있는 산업적 측면에서의 파급 효과로써는 저가격 및 장수명을 야기하는 우주 비행체의 구현을 통하여 통신, 탐사 등 우주 비행체를 이용하는 여러 산업 분야에서의 저렴한 서비스를 가능하게 하여 가격 경쟁력을 향상시키는 효과를 기대할 수 있다. 또한, 강체인 우주 비행체의 최적 자세 안정화 문제에 대해서 설계된 제어기를 적용하는 실제적인 문제에 있어서도, 참고문헌 [18]의 제어기  $u^{**}(t)$  (26)와 참고문헌 [8]의 제어기는 모두 3차원 Cayley-Rodrigues 벡터를 이용하므로 시스템의 특이성을 내재하고 있는 반면에, 본 논문에서 제안한 제어기는 이러한 단점을 야기하지 않으므로 본 논문에서 제안한 방법은 실제 적용에 있어서도 최근에 개발된 다른 두 방법에 비해서 큰 장점을 가지고 있음을 알 수 있다.

## VI. 결론

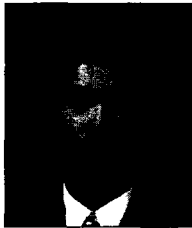
본 논문에서는 TS(Takagi-Sugeno) 퍼지 모델로 표현된 비선형 시스템의 최적 제어 문제를 고려하였고, 이 문제에 대해서 새롭게 유도된 최적 제어기 설계 방법론을 적용하였다. 먼저, 일반적인 비선형 동적 시스템의 최적 안정화 제어에 관한 새로운 정리를 제안하였다. 다음으로, 제안한 결과와 역 최적 접근법에 기반하여 TS 퍼지 시스템에 대한 최적 제어기 설계 과정을 유도하였다. 제안한 방법을 예증하기 위해 쿼터니언으로 표현되는 강체인 우주 비행체의 자세 제어 문제를 고려하였다. 제안한 최적 제어기 설계 과정은 본질적으로 간단한 선형행렬부등식 문제로 주어지므로, 이 문제를 상용 소프트웨어인 MATLAB을 이용하여 최적 제어기를 구하였다.

강체인 우주 비행체의 최적 자세 제어를 위해 최근에 개발된 다른 방법들과의 성능 비교를 통해서, 본 논문에서 제안한 제어기가 월등히 적은 제어 입력을 가지고도 거의 동일한 임무를 수행할 수 있음을 확인할 수 있었으며, 이로 인하여 예상되는 파급 효과로써는 저가격 및 장수명의 우주 비행체의 구현을 통하여 우주 비행체를 이용하는 여러 산업 분야에서의 저렴한 서비스를 기대할 수 있다. 또한, 최근에 개발된 다른 방법들에 비해서 본 논문에서 개발한 제어기 구조는 우주 비행체 시스템의 특이성을 야기하지 않으므로, 실제 제어기를 적용함에 있어서도 본 논문에서 제안한 방법이 월등히 우월함을 알 수 있다.

## 참고문헌

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 15, no. 1, pp. 116-132, 1985.
- [2] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control system," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, no. 2, pp. 135-156, 1992.
- [3] H. Wang, K. Tanaka, and M. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 1, pp. 14-23, 1996.
- [4] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. Wang, "Design of fuzzy control systems based on LMI stability conditions," *Proc. of the 35th Conf. Decision and Control*, pp. 598-603, 1996.
- [5] M. Thathachar and P. Viswanath, "On the stability of fuzzy systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 5, no. 1, pp. 145-151, 1997.
- [6] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 250-265, 1998.
- [7] S. J. Wu and C. T. Lin, "Optimal fuzzy controller design: local concept approach," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 8, no. 2, pp. 171-185, 2000.
- [8] Y. Park, M. J. Tahk, and J. Park, "Optimal stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems with application to spacecraft control," to appear in *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 24, no. 4, July-Aug., 2001.
- [9] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall, NJ, 1990.
- [10] R. Sepulchre, M. Janković, and P. V. Kokotović, *Constructive Nonlinear Control*, Springer-Verlag, NY, 1997.
- [11] R. E. Kalman, "When is a linear control system optimal?," *Transactions of the ASME Series D: Journal of Basic Engineering*, vol. 86, pp. 51-60, 1964.
- [12] R. A. Freeman and P. V. Kokotović, "Inverse optimality in robust stabilization," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 34, no. 4, pp. 1365-1391, 1996.
- [13] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics Series, vol. 15, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [14] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, MathWorks, Inc., Natick, MA, 1995.
- [15] C. K. Carrington and J. L. Junkins, "Optimal

- nonlinear feedback control for spacecraft attitude maneuvers," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 9, no. 1, pp. 99-107, 1986.
- [16] P. Tsiotras, "Stabilization and optimality results for the attitude control problem," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 19, no. 4, pp. 772-779, 1996.
- [17] P. Tsiotras, "Optimal regulation and passivity results for axisymmetric rigid bodies using two controls," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 20, no. 3, pp. 457-463, 1997.
- [18] M. Krstić and P. Tsiotras, "Inverse optimal stabilization of a rigid spacecraft," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 5, pp. 1042-1049, 1999.
- [19] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotović, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, Wiley, NY, 1995.
- [20] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 2nd ed., Prentice Hall, NJ, 1996.



#### 박연묵

1995년 고려대학교 제어계측공학과 졸업. 1995년~1997년 ROTC. 고려대학교 대학원 정보공학과 제어계측공학 석사(1999), 2000년~현재 한국과학기술원 항공우주공학전공 박사과정 재학 중. 관심분야는 지능 제어 및 최적 제어.

#### 탁민제

제어·자동화·시스템공학 논문지 제6권, 제12호, 참조.