

# 상단 등온조건을 갖는 이차원 슬랩에서의 경계위치 역추정을 위한 유한요소 정식화

김선경\* · 허 훈\*\* · 이우일†

(2000년 10월 12일 접수, 2001년 4월 3일 심사완료)

## A Finite Element Formulation for the Inverse Estimation of an Isothermal Boundary in Two-Dimensional Slab

Sun Kyoung Kim, Hoon Hurh and Woo Il Lee

**Key Words :** Boundary Location(경계위치), Inverse Heat Transfer Problem(역열전달문제), Finite Element Method(유한요소법)

### Abstract

A dependable boundary reconstruction technique is proposed. The finite element method is used for the analysis of the direct heat conduction problem to realize the deformable grid system. An appropriate strategy for grid update is suggested. A complete sensitivity analysis is performed to obtain the derivatives required for restoration of the optimal boundary. With the result of the sensitivity analysis, the unknown boundary is sought using the sequential quadratic programming. The method is applied to reconstruction of boundaries with sinusoidal, step, and cavity form. The overall performance of the proposed method is examined by comparison between the estimated the exact boundaries.

### 1. 서론

최근에 이르러 열공학 여러분야에 걸쳐 역해석이 널리 이용되고 있다. 특히, 역열전달문제(inverse heat conduction problem)는 가장 깊이 연구되는 문제 중 하나이다. 역열전달 문제는 표면에서의 경계조건이나,<sup>(1,2)</sup> 열적 물성치,<sup>(3)</sup> 그리고 자유경계위치를<sup>(4)</sup> 측정된 온도로부터 산정하는 것을 목적으로 한다. 본 연구는 경계위치를 추정하는 신뢰할만하고 안정된 기법을 제시하고자 한다. 열적 경계조건이 한쪽 경계에서 중첩되어 적용되었을 경우 일부 경계의 위치가 정확히 알려져 있지 않을지라도 역해석을 통해 미지의 경계의 위치를 완전하게 복원하여 낼 수 있다. 중첩적용되는 경계에서는 대류열전달 경계조건(Robin condition) 의

에 표면에서의 측정온도를 가정한다.

이 문제를 해석함으로써, 적외선열화상 측정 결과를 비파괴 검사에 적용할 수 있으며, 적외선 열화상을 이용하여 내부의 결함이나 공동의 위치를 찾아낼 수 있다. 뿐만 아니라, 고체표면의 부식 형상을 추정할 수도 있다.<sup>(5,6)</sup> Hsieh 등은 일반적으로 적용가능한 해석적 방법을 제시한 바 있다.<sup>(4)</sup>

본 연구에서는 정상상태 온도분포를 가지는 2차원 판재에 대하여 해석을 수행하였다. 유한요소법을 이용하여 경계위치의 두께 방향으로의 변형을 고려할 수 있는 이산화방법을 제시하였다. 이러한 역해석을 위해서는 경계위치에 따른 감도해석방법이 중요하다. 본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 경계위치 복원 문제를 푸는데 필요한 감도계수를 구하는 방법을 제시하였다. 이와 같은 역해석을 위해서는 최적화문제로의 접근이 타당하며, 효율적이며 신뢰할만한 최적화기법의 적용이 필수적이다. 본 연구에서는 연속이차계획법을 이용하여 최적화과정을 구현하였다. 최적화과정에서 경계위치가 변하게 되면, 그에 따라 동시에 격자계를 변경하여야 한다. 이와 관련된 구체적인 방

\* 회원, 서울대학교 대학원  
\*\* 서울대학교 대학원 기계공학부  
† 책임저자, 회원, 서울대학교 공과대학 기계항공공학부  
E-mail : wilee@snu.ac.kr  
TEL : (02)880-7116 FAX : (02)886-0631

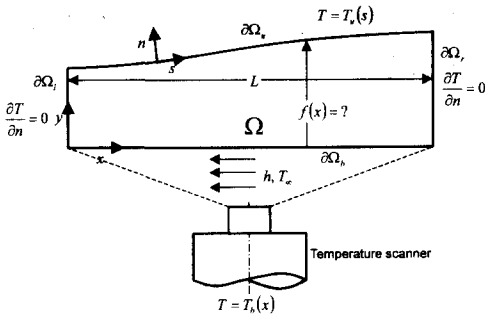


Fig. 1 Overview of the inverse problem

법을 제시하고, 이를 정식화하였다. 제안된 방법을 이용하여, 실제의 경계위치 추정해석을 수행하였고, 이 결과를 원래의 경계와 비교하여, 방법의 타당성을 검증하였다.

## 2. 문제정의

여기서는 문제를 명시하고 관련된 유한요소법을 이용한 온도장을 계산하기 위한 직접문제의 수치적 정식화방법이 기술되었다. 그리고, 그 결과를 이용하여 역해석 수행을 통한 감도해석방법이 제시되었다.

### 2.1 직접문제

직교좌표계에서 Fig. 1에 보인 바와 같은 2차원 영역을 생각해 보자. 열적 등방성 및 균질성과 정상상태 온도분포를 가정한다. 윗면의 위치  $f(x)$ 는 알려져 있지 않으며 역해석을 통해 구하여야 하나, 직접문제에서는 일단 안다고 가정한다. 아래 면에서는 대류열전달 조건이 적용되며 동시에 표면온도는 알려져있다. Fig. 1에 보이듯이  $\Omega$ 는 해석영역의 내부를 나타내며,  $\partial\Omega_l$ ,  $\partial\Omega_r$ ,  $\partial\Omega_u$ , 과  $\partial\Omega_b$ 는 각각 좌, 우, 상, 하 경계의 영역을 가리킨다. 지배방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0, \text{ in } \Omega \tag{1a}$$

여기서  $k$ 는 열전도계수이다.

$$\frac{\partial T(0, y)}{\partial x} = 0, \text{ on } \partial\Omega_l \tag{1b}$$

$$\frac{\partial T(L, y)}{\partial x} = 0, \text{ on } \partial\Omega_r \tag{1c}$$

$$T = T_u(s), \text{ on } \partial\Omega_u \tag{1d}$$

위식에서  $s$ 는 경계에 부착된 좌표계에서 경계

표면에서의 위치를 나타내는 변수이다.

$$-k \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = h[T_\infty - T(x, 0)], \text{ on } \partial\Omega_b \tag{1e}$$

$T_\infty$ 는 주변온도이며  $h$ 는 대류열전달 계수이다.

### 2.2 역문제

여분의 경계조건, 즉 측정된 온도를 이용하여 경계의 위치  $f(x)$ 가 역해석을 통해 결정될 수 있다. 이때 역문제는 다음의 식을 만족하는  $f(x)$ 를 찾는 것으로 기술된다.

$$T(x, 0) = Y(x), \text{ on } \partial\Omega_b \tag{2}$$

그러나, 이와 같은 측정온도의 직접적용은 측정에 오차가 개입될 경우 예상치 못한 해의 진동을 일으킬 수 있다. 따라서, 측정오차에 민감하지않은 기법이 요구된다. 주어진 경계위치  $f(x)$ 에 대해 온도분포는 직접문제의 해를 구함으로써 얻어지는데, 측정된 온도와 계산된 온도의 일치 정도를 적절한 함수로 표현하고, 이를 원하는 정도로 최적화한다면 안정된 방법으로 경계위치를 추정할 수 있을 것이다. 표면 온도  $Y(x)$ 는 적절한 측정방법(예컨대, 바닥면에서의 적외선 열화상)으로부터 얻어진다. 계산된 온도  $T(x, y)$ 는 앞의 직접문제의 해로부터 얻어진다. 이때 측정된 온도와 계산된 온도의 일치정도는 아래와 같은 수식에 의해 표현될 수 있다.

$$J = \sum_{k=1}^N [T_k - Y_k]^2 \tag{3}$$

여기서  $N$ 은 측정온도의 총수이며 바닥면의 격자점 수  $N_x$ 와 일치한다. 그리고,  $T_k$ 와  $Y_k$ 는 각각  $T_k = T(x_k, 0)$ 와  $Y_k = Y(x_k)$ 로 정의된다. 그밖에,  $x_k$ 는 아래면의  $k$ 번째 격자점에서의  $x$ 좌표값이다. 만약 일정한 오차수준을 가정한다면, 아래와 같은 표현을 받아들일 수 있다.

$$T_k - Y_k \cong \sigma \tag{4}$$

여기서  $\sigma$ 는 측정온도의 표준편차이다. 이로부터, 아래의 식을 만족하는 경우 원하는 해가 얻어진 것으로 간주할 수 있다.

$$J \leq \sigma^2 N \tag{5}$$

위의 조건이 만족될 경우 측정온도와 계산온도는 통계적 일치가 이루어진 것으로 볼 수 있다. 이제, 위의 조건을 만족시킬 수 있는 해를 찾기 위한 수치적 기법을 제시하고자 한다. 이를 위해서는 감도해석을 위한 정식화가 필요하게 된다. 감도해석은 기존의 유한요소해석기법의 바탕 위에서 이루어지게 된다.

### 3. 정식화

본절에서는, 감도해석을 토대로하는 최적화방법을 제안하였으며, 그 결과로서 경계위치를 복원하는 수치적 방법을 기술하였다.

#### 3.1 직접문제의 유한요소 정식화

앞에 기술된 정상상태 열전도방정식은 아래와 같은 전형적인 Galerkin 유한요소법으로 정식화 될 수 있다<sup>(7)</sup>. 정식화 및 계산상의 편의를 위하여, 좌표계 변환을 도입한다. 이것은 요소 내부 좌표계 영역  $\tilde{\Omega}_e : (\xi, \eta)$  와 물리 좌표계 영역  $\Omega_e : (x, y)$  의 매핑 관계를 설정하는 다음과 같은 식들에 의해 표현된다.

$$x(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{N_x} x_j \tilde{\psi}_j(\xi, \eta) \quad (6a)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{N_y} y_j \tilde{\psi}_j(\xi, \eta) \quad (6b)$$

여기서  $\tilde{\psi}_j$  는 사각형요소의 쌍일차(bilinear) 형상 함수이다. 그리고, 위의 식들을 미분하면 다음을 얻는다. 그리고  $i$  와  $j$  는 국소격자번호이다.

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^{N_x} x_k \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^{N_x} x_k \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \eta} \quad (7a)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^{N_y} y_k \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^{N_y} y_k \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \eta} \quad (7b)$$

다음 위의 결과를 이용하면 아래의 관계가 얻어진다.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{D} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{D} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (8a)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{D} \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{D} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (8b)$$

여기서  $D$  는 이 변환의 Jacobian 이며 다음의 식으로 표현된다.

$$D = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (9)$$

형상함수  $\psi_j^e$  의 미분을 얻기 위해 연쇄법칙을 적용한다.

$$\frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (10a)$$

$$\frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (10b)$$

위에서 얻은 식들을 이용하여, 물리좌표계에서의

형상함수의 미분을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} = \frac{1}{D} \left[ \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \xi} \sum_{k=1}^{N_x} y_k \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \eta} \sum_{k=1}^{N_x} y_k \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \xi} \right] \quad (11a)$$

$$\frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} = \frac{1}{D} \left[ -\frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \xi} \sum_{k=1}^{N_x} x_k \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \eta} \sum_{k=1}^{N_x} x_k \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \xi} \right] \quad (11b)$$

이때, 요소  $e$  에 대해 강성행렬  $k_{ij}^e$  은 약형(weak form)으로 다음과 같이 주어진다.<sup>(7)</sup>

$$k_{ij}^e = \int_{\Omega_e} k \left( \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right) dx dy \quad (12)$$

아래면의 경계조건에 의해 강성행렬에 아래와 같은 항이 더해져야 한다.

$$p_{ij}^e = \int_{\alpha \Omega_e} h \psi_i^e \psi_j^e dx \quad (13)$$

또한 부하벡터에 참여하는 항은 아래와 같다.

$$b_i^e = \int_{\alpha \Omega_e} h T_{\infty} \psi_i^e dx \quad (14)$$

위의 결과를 이용하여 전체 강성행렬 및 부하벡터를 조립하면 다음과 같다.

$$K_{rs} = \sum_e (k_{ij}^e + p_{ij}^e) \quad (15a)$$

$$B_s = \sum_e b_i^e \quad (15b)$$

여기서  $r$  과  $s$  는 전체격자계서의 격자번호이고,  $r$  과  $s$  의  $i$  와  $j$  와의 관계는 내재적으로 주어진다. 좌측면과 우측면은 단열조건이 적용되고, 윗면에서는 온도조건(Dirichlet condition)이 부과되어 있다. 다른 면들의 경계조건도 적용하고나면 결과적으로 아래와 같은 최종적인 선형방정식이 얻어진다.

$$[K_{rs}] [T_r] = [B_s] \quad (16)$$

#### 3.2 미지의 경계형상의 표현

경계의 형상은 해의 안정성을 위하여, cubic-spline 곡선으로 근사하고자 한다. Spline 곡선을 이용한 역열전도 해석은 이미 기존의 연구에서 자세히 다루어진 바 있다.<sup>(2)</sup> 이때, 경계의 형상은 아래의 식으로 표현된다.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{I=R} f_i \phi_i(x) \quad (17)$$

여기서  $\phi_i(x)$  와  $f_i$  는 각각 사용된 cubic-spline 기저 함수와 해당하는 계수이고  $R$  은 사용된 함수의 수이다. 본 연구에서의 역해석에서의 미지수는  $f_i$  가 된다.

3.3 격자계 갱신 방법

격자계는 구조화된 유한요소  $x$  방향으로  $N_x$  개  $y$  방향으로  $N_y$  개의 격자점들에 의해 구성된다. 그런데,  $y$  좌표값들은 경계위치  $f(x)$ 에 따라 전체적으로 변동하게 되며, 이를 유한요소 정식화에 적절히 결부시키는 것이 감도 해석에 필요하다. 따라서, 식 (13)에 사용된  $y_k$  값들과 경계위치  $f(x)$ 의 관계식이 필요하게 된다. 이때, Fig. 2 에서 볼 수 있듯이, 좌측으로부터  $i$  번째 줄의  $x$  좌표의 위치가  $x_i$  일 때 그에 해당하는 윗면 경계위치는  $f(x_i)$ 로 나타낼 수 있다. 그밖에, 요소  $e$  안에서  $k$  번째 격자점이  $x$  방향으로  $i$  번째  $y$  방향으로  $j$  번째 줄에 위치한다는 것을 안다면, 아래와 같은 식에 의해 좌표값을 결정할 수 있다.

$$y_k = f(x_i) \left( \frac{j-1}{N_y-1} \right)^\omega \tag{18}$$

여기서  $\omega$  는 윗면 방향으로 격자계 밀도를 조절하는 인자이다. 이제, 위식을 미분하여 아래의 관계를 얻는다.

$$\frac{\partial y_k}{\partial f_i} = \phi_i(x_i) \left( \frac{j-1}{N_y-1} \right)^\omega \tag{19}$$

위의 결과는 감도해석에 관계된 모든 미분 값들을 얻는 데 있어 필수적이다.

3.4 감도해석

계산측면에서, 효과적인 감도계수의 산정은 본 해석의 실용성에 있어 중요하다. 따라서, 관련된 미분 값들은 요소단위로 구하여 조립하게 된다. 먼저, 국소 강성행렬의 1 차 미분부터 계산한다. 편의상  $\frac{\partial \psi_k}{\partial x} \equiv \psi_{k,x}$  과 같은 표현을 사용한다. 식 (12)을  $f_i$  에 대해 미분하면, 다음의 식이 얻어진다.

$$\frac{\partial k_{ij}^e}{\partial f_i} = \int_{\Omega_e} k \left[ \begin{array}{l} \psi_{i,x}^e \frac{\partial \psi_{j,x}^e}{\partial f_i} + \psi_{j,x}^e \frac{\partial \psi_{i,x}^e}{\partial f_i} \\ + \psi_{i,y}^e \frac{\partial \psi_{j,y}^e}{\partial f_i} + \psi_{j,y}^e \frac{\partial \psi_{i,y}^e}{\partial f_i} \end{array} \right] dx dy \tag{20}$$

위의 식을 계산하기 위해서는  $\frac{\partial \psi_{j,x}^e}{\partial f_i}$  과  $\frac{\partial \psi_{j,y}^e}{\partial f_i}$  이 필요한데, 식 (11)을  $f_i$  에 대해 미분하고,  $\frac{\partial x_k}{\partial f_i} = 0$  을 이용하면 아래와 같이 얻어진다.

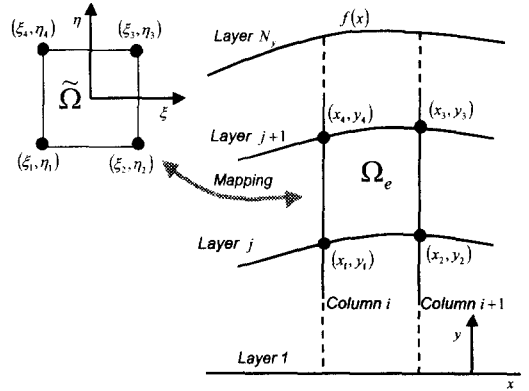


Fig. 2 Overview of the inverse problem

$$\frac{\partial \psi_{j,x}}{\partial f_i} = -\frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial f_i} \psi_{j,x} + \frac{1}{D} \left[ \tilde{\psi}_{j,\xi} \sum_{k=1}^{N_x} \frac{\partial y_k}{\partial f_i} \tilde{\psi}_{k,\eta} - \tilde{\psi}_{j,\eta} \sum_{k=1}^{N_x} \frac{\partial y_k}{\partial f_i} \tilde{\psi}_{k,\xi} \right] \tag{21a}$$

$$\frac{\partial \psi_{j,y}}{\partial f_i} = -\frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial f_i} \psi_{j,y} \tag{21b}$$

여기서  $\frac{\partial D}{\partial f_i}$  는 아래와 같이 표현된다.

$$\frac{\partial D}{\partial f_i} = \frac{\partial y}{\partial \eta} \sum_{k=1}^{N_x} \frac{\partial y_k}{\partial f_i} \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \sum_{k=1}^{N_x} \frac{\partial y_k}{\partial f_i} \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \xi} \tag{22}$$

식 (15) 또한  $f_i$  에 관해 미분하면 바닥면에서는  $\frac{\partial p_{ij}^e}{\partial f_i} = 0$  이 자명하므로, 다음의 식이 간단히 얻어진다.

$$\frac{\partial K_{rs}}{\partial f_i} = \sum_e \frac{\partial k_{ij}^e}{\partial f_i} \tag{23}$$

위의 결과를 이용하여  $\frac{\partial T_s}{\partial f_i}$  로 정의되는 감도계수를 다음의 선형방정식을 이용하여 구할 수 있다.

$$[K_{rs}] \left[ \frac{\partial T_s}{\partial f_i} \right] = - \left[ \frac{\partial K_{rs}}{\partial f_i} \right] [T_s] \tag{24}$$

이제, 식 (20)를  $f_j$  에 대해 미분하여, 국소강성행렬  $k_{ij}^e$  에 대한 2 차미분 즉, Hessian 행렬을 구하고자 한다.

$$\frac{\partial k_{ij}^e}{\partial f_i \partial f_j} = \int_{\Omega} k \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\partial \psi_{i,x}^e}{\partial f_j} \frac{\partial \psi_{j,x}^e}{\partial f_i} + \psi_{i,x}^e \frac{\partial^2 \psi_{j,x}^e}{\partial f_i \partial f_j} \right) \\ + \frac{\partial \psi_{j,x}^e}{\partial f_j} \frac{\partial \psi_{i,x}^e}{\partial f_i} + \psi_{j,x}^e \frac{\partial^2 \psi_{i,x}^e}{\partial f_i \partial f_j} \\ + \frac{\partial \psi_{i,y}^e}{\partial f_j} \frac{\partial \psi_{j,y}^e}{\partial f_i} + \psi_{i,y}^e \frac{\partial^2 \psi_{j,y}^e}{\partial f_i \partial f_j} \\ + \frac{\partial \psi_{j,y}^e}{\partial f_j} \frac{\partial \psi_{i,y}^e}{\partial f_i} + \psi_{j,y}^e \frac{\partial^2 \psi_{i,y}^e}{\partial f_i \partial f_j} \end{array} \right] dx dy \quad (25)$$

위의 식의 계산을 위해  $\frac{\partial^2 \psi_{j,x}^e}{\partial f_i \partial f_j}$  과  $\frac{\partial^2 \psi_{j,y}^e}{\partial f_i \partial f_j}$  의 산

정이 필요하다. 식 (21)을  $f_j$  에 관해 미분하고,

$$\frac{\partial^2 D}{\partial f_i \partial f_j} = 0 \text{ 을 이용하면, 다음이 얻어진다.}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{j,x}}{\partial f_i \partial f_j} = \frac{1}{D^2} \frac{\partial D}{\partial f_j} \frac{\partial D}{\partial f_i} \psi_{j,x} - \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial f_i} \frac{\partial \psi_{j,x}}{\partial f_j} - \frac{1}{D^2} \frac{\partial D}{\partial f_j} \left[ \tilde{\psi}_{j,\xi} \sum_{k=1}^{N_x} \frac{\partial y_k}{\partial f_i} \tilde{\psi}_{k,\eta} - \tilde{\psi}_{j,\eta} \sum_{k=1}^{N_x} \frac{\partial y_k}{\partial f_i} \tilde{\psi}_{k,\xi} \right] \quad (26a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{j,y}}{\partial f_i \partial f_j} = \frac{1}{D^2} \frac{\partial D}{\partial f_j} \frac{\partial D}{\partial f_i} \psi_{j,y} \quad (26b)$$

앞에서와 유사한 방식으로,  $\left[ \frac{\partial K_{rs}}{\partial f_i \partial f_j} \right]$  를 구할 수 있다. 식 (23)을  $f_j$  에 관해 미분하면, 아래와 같은 2 차 감도계수를 구하는 선형방정식이 얻어진다.

$$\left[ K_{rs} \right] \left[ \frac{\partial^2 T_s}{\partial f_i \partial f_j} \right] = - \left[ \frac{\partial^2 K_{rs}}{\partial f_i \partial f_j} \right] [T_s] - \left[ \frac{\partial K_{rs}}{\partial f_i} \right] \left[ \frac{\partial T_s}{\partial f_j} \right] - \left[ \frac{\partial K_{rs}}{\partial f_j} \right] \left[ \frac{\partial T_s}{\partial f_i} \right] \quad (27)$$

최종적으로,  $J$  의 구배와 Hessian 행렬을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\nabla J \equiv \frac{\partial J}{\partial f_i} = \sum_k 2[T_k - Y_k] \frac{\partial T_k}{\partial f_i} \quad (28)$$

$$\nabla \nabla J \equiv \frac{\partial^2 J}{\partial f_i \partial f_j} = \sum_k \left[ 2(T_k - Y_k) \frac{\partial^2 T_k}{\partial f_i \partial f_j} + 2 \frac{\partial T_k}{\partial f_i} \frac{\partial T_k}{\partial f_j} \right] \quad (29)$$

위의 감도해석의 결과로,  $f(x)$  를 구하기 위한 최적화에 필요한 모든 미분값들이 구해질 수 있다.

### 3.5 감도해석의 계산적 측면

계산효율의 향상을 위하여, 대칭밴드행렬 (symmetric banded matrix)에 저장하여, 즉시, 후진대입(backward substitution)이 가능한 형태로 변형하여 저장된다. 식 (24)의 경우는 모든  $I$  에 대해, 식 (27)의 경우는 모든  $I$  와  $J$  에 대해 우변의 벡터를 대치해 가며 주어진 선형방정식을 풀어야 하므로, 이와 같은 방법은 매우 효율적이다. 더욱이, 우변의 벡터들은 요소단위로 계산되므로 불필요한 계산을 최소화할 수 있을 뿐 아니라, 강성행렬에 대한 Hessian 행렬 전체를 기억장소에 저장해 둘 필요가 없게 된다.

### 3.6 최적화 과정

최적화 과정은 두단계로 이루어지는데, 첫번째 단계에서는 식 (5)를 만족시키는 해(feasible solution)를 찾고, 두번째 단계에서는 식 (5)를 만족시키는 해들 중 가장 부드러운 해를 찾고자 한다.

#### 3.6.1 제 1 단계

식 (5)에 의해 주어지는 조건을 만족시키는, 경계위치  $f(x)$ 를 산정하기 위하여  $J$ 를 최적화시키는 과정이 필요한데 이 과정에서는 뉴턴방법을 황금분할탐색법과 함께 사용하였다.

#### 3.6.2 제 2 단계

제 1 단계의 결과로부터 출발하여 식 (5)를 구속 조건으로서 만족시키며  $\int_0^L f''(x)^2 dx$ 를 최소화 하는 해를 찾는다. 이 문제는 구속조건을 갖는 비선형 최적화 문제가 된다. 이 최적화 문제의 해를 구하기 위해 연속이차계획법(sequential quadratic programming)을 사용하였다.<sup>(8)</sup> 연속이차계획법은 기존 전산코드인 CFSQP 를 일부 수정하여 구현하였다.<sup>(9)</sup>

## 4. 결과와 논의

제시된 방법의 유효성을 입증하기 위해 기술된 역해석을 오차를 포함한 측정데이터를 사용하여 수행하였다. 문제를 단순화하기 위해 물성치는 모두 상수로 가정하였다. 사인(sinusoidal)형상, 계단(step)형상, 공동부(cavity)가 있는 경계형상 복원의 경우들에 대해 본 방법을 적용하였다.

### 4.1 무차원화와 계산수행조건

내부의 온도분포는 바닥면의 열전달률에 크게 영향을 받게 되는데, Biot 수는 이런 효과를 적절히 반영한다. Biot 수는 아래의 식으로 표현된다.

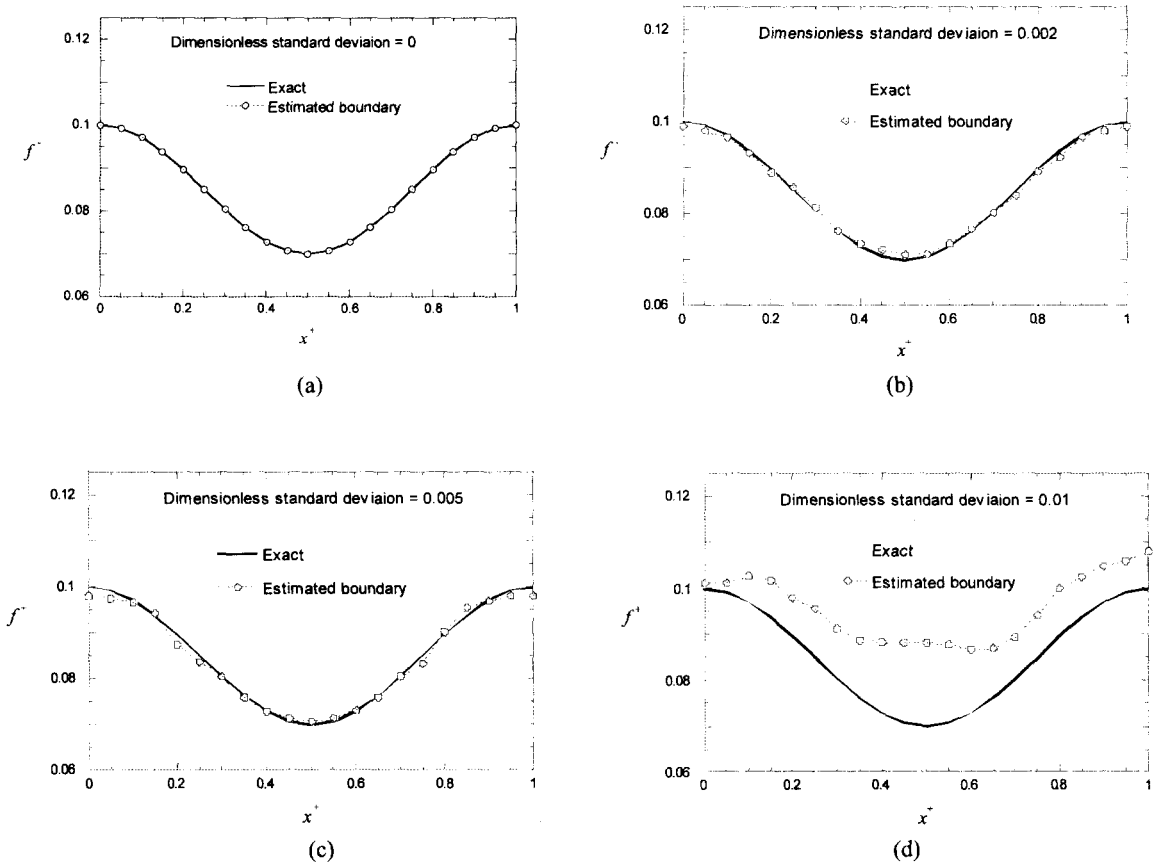


Fig. 3 Boundary location recovered with noisy measurement data for varying error level

$$Bi_H = \frac{hf_o}{k} \quad (34)$$

여기서  $f_o$ 는  $f(x)$ 를 대표하는 공칭 값으로 복원하고자 하는 형상의 기준 높이로 영역의 면적을  $L$ 로 나눈 값이다. 각 경우들은 모두 윗면의 온도는 일정하게 하였다. 다음과 같은 무차원화된 온도를 도입한다.

$$T^+ = \frac{T - T_\infty}{T_u - T_\infty} \quad (35)$$

그리고, 무차원화된 좌표값  $x^+ = x/L$  과  $y^+ = y/L$  을 사용한다. 각 경우에 대해 초기의  $f(x)$ 는 편의상 상수  $f_o$ 로 주었다. 그 밖에 다른 인자들은  $Bi_H = 1, T_\infty = 0, T_u = 1$ , 그리고  $N_x = N_y = N = 21$ 을 사용하였다. 또한, 최초의 격자점들의 상태는 등간격으로 하였고, 정식화 과정에서 자명하듯이,

계산 수행 중 혹은 후에  $x$  좌표값은 변하지 않는다. 아래의 식으로 주어지는 인위적으로 오차를 삽입한 모사된 측정데이터를 이용하였다.

$$Y_i = Y_{exact,i} + \sigma r_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (36)$$

여기서  $Y_{exact}$ 는 정확한 측정값이고,  $\sigma$ 는 측정데이터의 표준편차이다. 또한,  $r_i$ 는 정규분포를 따르고, 평균 0, 99% 신뢰구간 즉,  $-2.576 < r_i < 2.576$ 에서, 표준편차 1인 난수이다. 이 난수는 IMSL® C 함수 *random\_normal*을 사용하여 생성하였다.<sup>(10)</sup> 각 경우에 대해 오차수준을 바꿔가며, 계산을 수행하였다. 제일 먼저, 사인형상 경계의 복원을 수행하였다. 경계의 형상의 표현에 사용된 기저함수의 수  $R$ 은 모든 경우에 대해 13을 사용하였다.

#### 4.2 사인형상경계의 경우

복원하고자 하는 사인형상 경계의 형상은 아래와 같이 주어진다.

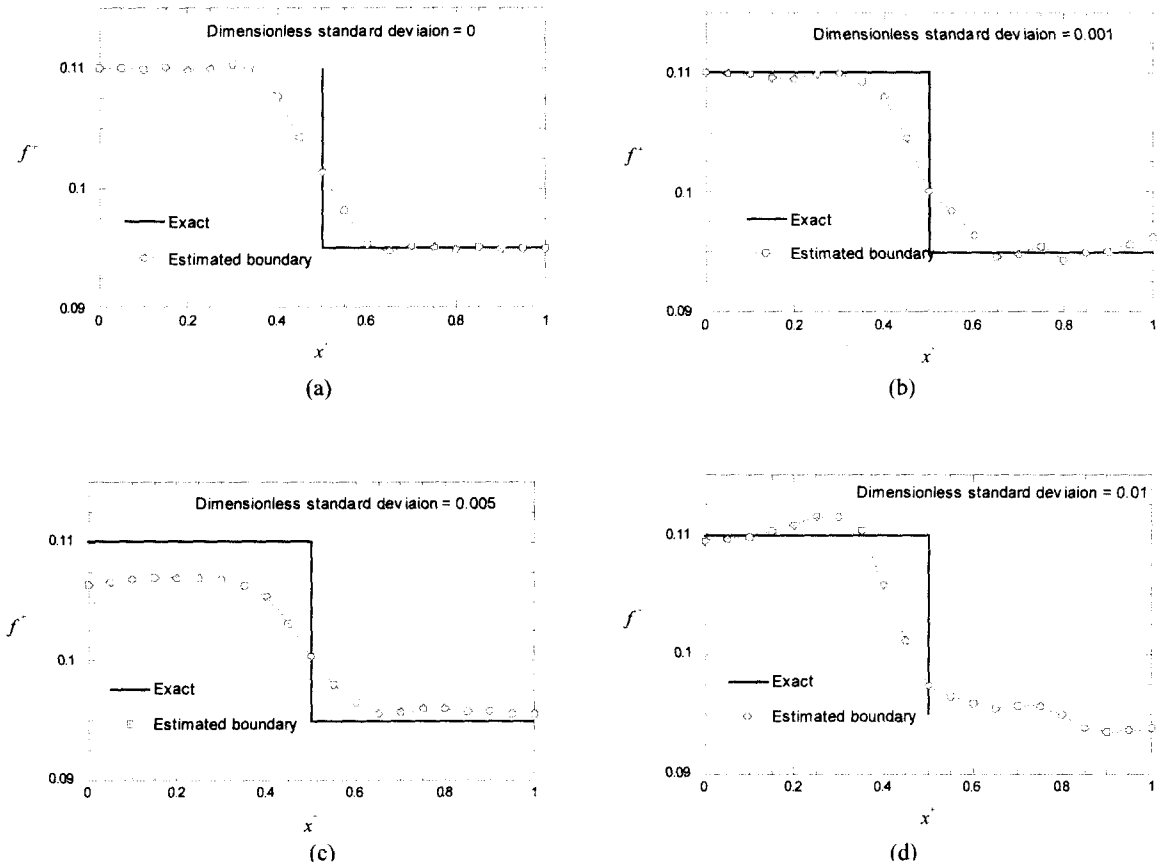


Fig. 4 Boundary location recovered with noisy measurement data for varying error level

$$f^+(x^+) = 0.7 - 0.3\sin(2\pi x^+ - 0.5\pi) \quad (37)$$

이 경우는 4 가지의 다른 오차 수준에 대해 수행 되었다. Fig. 3 에, 이 결과를 보였다. 복원된 경계는 측정오차에도 불구하고 원래의 경계와 상당히 잘 일치하고 있다. 오차의 증가에 따라 일정 정도의 벗어남을 관찰할 수 있으나, 역해석의 결과로서 받아들일 수 있는 수준의 정확도를 보여주고 있다.

#### 4.3 계단형상경계의 경우

계단형상 복원문제에 있어 복원할 형상은 아래와 같다.

$$f^+(x^+) = \begin{cases} 0.11 & x^+ < 0.5 \\ 0.095 & x^+ \geq 0.5 \end{cases} \quad (38)$$

복원된 결과를 Fig. 4 에 보였다. 오차가 없는 데이터를 이용한 결과로부터 결정론적 편향

(deterministic bias)을 관찰할 수 있는데, Fig. 4(a)에서 볼 수 있듯이 계단 전후에서 뚜렷한 overshoot가 나타난다. 이것은 동일조건인 사인형상의 복원인 Fig. 3(a)의 결과와 비교하여 볼 때 주목할 만 하다. 그 밖에 오차가 증가 함에 따라 보이는 경향은 사인형상 복원의 경우와 유사하다. 측정 오차의 존재에도 불구하고, Fig. 4(b)-(d) 에서 볼 수 있듯이 계단의 위치는 상당히 정확히 산정하고 있다.

#### 4.4 공동부가 있는 형상의 경우

상단 경계에 작은 공동부가 있는 경계의 복원 문제를 생각해 보자. 무차원화된 공동부의 깊이와 높이는 각각 0.01 과 0.1 이다. 공동부의 중심좌표는  $x^+ = 0.45$  와  $y^+ = 0.095$ 로 주어진다. Fig. 5 에서  $\sigma = 0$  와  $\sigma = 0.001$ 에 대한 결과를 볼 수 있다. 공동부 위치는 두 경우 모두 잘 예측하고 있다. 그러나,  $\sigma = 0.001$ 의 경우에 편차가 커졌음을 관찰

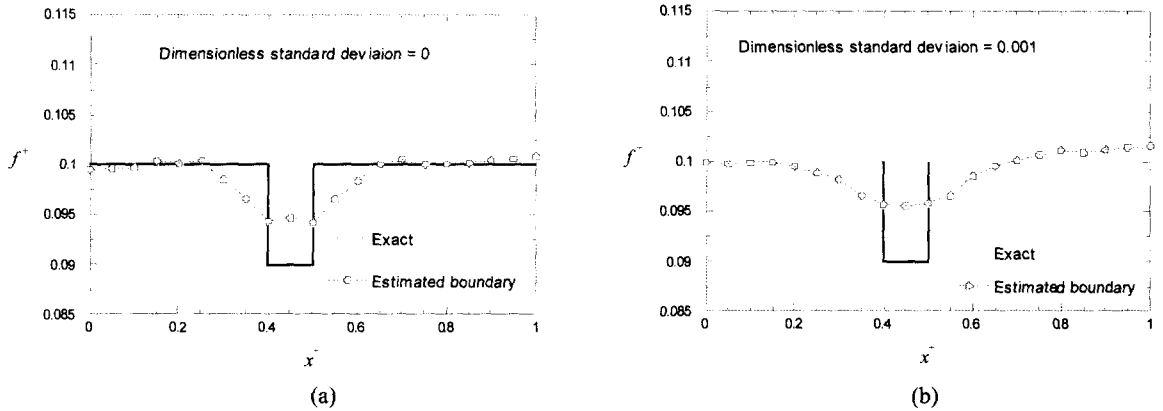


Fig. 5 A cavity on the Boundary recovered with noisy measurement data

할 수 있다.

## 5. 결론

온도측정을 통한 경계복원을 위한 수치적 방법을 제안하였다. 경계위치의 변화에 따라 격자계를 동적으로 재생성하는 방법을 도입하고, 그에 따른 유한요소 정식화를 수행하였다. 그 정식화 과정은 감도해석을 위한 미분값의 계산방법을 포함하고 있으며, 이를 통해 얻어진 감도계수를 이용하여 최적화를 행함으로써 미지의 경계위치를 산정할 수 있다. 안정된 최적화를 위해 황금분할탐색을 이용한 수정된 뉴턴방법을 이용하였다. 제안된 방법의 유효성을 검증하기 위해, 사인형상, 계단형상 및 공동부가 있는 형상에 대해 해석을 수행하여 그 결과를 원래의 형상과 비교하였다. 전체적으로 해석결과는 역해석의 결과로서 신뢰할만 하였으며, 본 방법을 미지의 경계복원에 적용할 수 있음을 확인하였다.

## 후 기

본 연구는 과학기술부 국가지정연구실 사업과 교육부 2000년도 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었습니다.

## 참고문헌

- (1) Beck, J. V., Blackwell, B., and St. Clair, C. R., Jr., 1985, *Inverse Heat Conduction*, Wiley.
- (2) Alifanov, O. 1994, M., *Inverse Heat Transfer Problem*, Springer-Verlag.
- (3) Flach, G. P. and Özişik, M. N., 1989, "Inverse Heat Conduction Problem of Simultaneously Estimating Spatially Varying Thermal Conductivity and Heat Capacity Per Unit Volume," *Num. Heat Transfer, Part A*, vol. 16, pp. 249~266.
- (4) Hsieh, C. K., and Kassab, A. J., 1986, "A General Method for the Solution of Inverse Heat Conduction Problems with Partially Unknown Geometries," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 29, No.1, pp. 47~58.
- (5) Yoshikawa, F., Nigo, S., Kiyohara, S., Taguchi, S., Takahashi, H., and Ichimiya, M., 1989, "Estimation of Refractory Wear and Solidified Layer Distribution in the Blast Furnace Hearth and Its Application to the Operation," *Iron and Steel (Japan)*, Vol. 15, pp. 2068~2075.
- (6) Shin, M. and Lee, J., 2000, "Prediction of the Inner Wall Shape of an Eroded Furnace by the Nonlinear Inverse Heat Conduction Technique," *Proceedings of the 4<sup>th</sup> JSME-KSME Thermal Engineering Conference*, pp. 511~516, Kobe, Japan.
- (7) Oden, J. T., 1981, *Finite Elements An Introduction Volume I*, Prentice-Hall, London.
- (8) Reklaitis, G. V., Ravindran, A., and Ragsdell, K. M., 1983, *Engineering Optimization*, Wiley.
- (9) Lawrence, C., Zhou, Z. L., and Tits, A. L. User's Guide for CFSQP Version 2.5, Electrical Engineering Dept. and Institute for System Research, University of Maryland, 1997.
- (10) IMSL® C/Stat/Library™ User's Guide, Visual Numerics.