

수평 원주형 환형 내에서의 자연 대류 유동의 천이: Pr=0.2

유 주 식* · 하 대 홍*

(2000년 8월 16일 접수, 2001년 4월 18일 심사완료)

Transition of Natural Convective Flows in a Horizontal Cylindrical Annulus: Pr=0.2

Joo-Sik Yoo and Dae-Hong Ha

Key Words: Natural Convection(자연 대류), Oscillatory Convection(진동 대류), Transition(천이), Dual Solutions(이중해), Hysteresis Phenomenon(이력 현상)

Abstract

Transition of flows in natural convection in a horizontal cylindrical annulus is investigated for the fluid with Pr=0.2. The unsteady streamfunction-vorticity equation is solved with finite difference method. As Rayleigh number is increased, the steady crescent-shaped eddy flow bifurcates to a time-periodic flow with like-rotating eddies. After the first Hopf bifurcation, however, a reverse transition from oscillatory to a steady flow occurs by the flow pattern variation. Hysteresis phenomenon occurs between the solution branches of up-scan and down-scan stages, and dual solutions with one steady and one oscillatory flow are found. Overall Nusselt of the flows at the down-scan stage is greater than that at the up-scan stage.

기호설명

D_i : 안쪽 실린더의 지름
 g : 중력 가속도
 L : 환형의 폭, $R_o - R_i$
 Nu : Nusselt 수
 \overline{Nu} : 평균 Nusselt 수
 P : 진동 주기(period)
 Pr : Prandtl 수, ν/α
 R_i, R_o : 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 반경
 Ra : Rayleigh 수, $ag(T_i - T_o)L^3/\nu\alpha$
 r : 반경 방향의 좌표
 r_i, r_o : 무차원화 된 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 반경

t : 시간
 T_i, T_o : 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 온도
 u : 반경 방향의 속도
 $u(t)$: $(r_c, \pi/2)$ 에서의 반경 방향의 속도
 v : 원주 방향의 속도

그리스문자

α : 열 팽창 계수
 η : 확장된 반경 방향의 좌표
 θ : 무차원화 된 온도
 x : 열 확산 계수
 ν : 동점성 계수
 ρ_0 : 밀도
 ϕ : 원주 방향의 좌표
 ψ : 유선 함수
 ω : 와도

* 회원, 안동대학교, 기계교육과
 E-mail : jsyoo@andong.ac.kr
 TEL : (054)850-5671 FAX : (054)823-1766
 * 회원, 한서대학교, 항공기계학과

1. 서론

서로 다른 벽면 온도를 갖고 있는 수직 슬롯(slot)에서는 수력학적 불안정(hydrodynamic instability)에 의해 같은 방향으로 회전하는 여러 개의 소용돌이(eddy)를 갖는 유동이 일어날 수 있다.⁽¹⁾ 한편 아래 벽면이 가열되는 수평 채널(channel)에서는 Rayleigh-Bénard 열불안정(thermal instability)에 의해 서로 반대 방향으로 회전하는 셀(cell)을 갖는 유동이 일어날 수 있다.⁽²⁾ 따라서 가열되는 안쪽 실린더를 갖고 있는 수평 환형 공간은 매우 흥미로운 물리적 구조를 형성한다. 왜냐하면 환형의 수직 부분에서는 수력학적 불안정이 일어날 수 있고, 열적으로 불안정한 상태인 위 부분에서는 Rayleigh-Bénard 열불안정이 일어날 수 있기 때문이다. 한 시스템 내에 동시에 공존하는 이 두 가지의 불안정은 매우 흥미로운 자연 대류 현상을 일으킬 것으로 예측할 수 있다. 그러나 수평 환형 공간의 자연 대류 문제에 대한 지금까지의 대부분의 연구들은 거의 환형에서의 열전달 특성에 관심을 두고 수행되었으며 유동장의 천이 현상이나 진동 대류에 대해서는 상대적으로 많은 연구를 수행하지 않았다. 특히 Prandtl 수가 유동 형태에 미치는 영향에 대한 연구는 매우 적다. 최근 Yoo⁽³⁻⁶⁾는 여러 가지의 Prandtl 수에 따른 대류 현상과 분기 현상을 체계적으로 조사하여 환형에서 일어나는 열적 및 수력학적 불안정성은 Prandtl 수에 따라 매우 다양한 형태의 유동과 천이 현상을 일으킨다는 것을 관찰하였다.

Yoo^(3,4)는 먼저 $D_i/L=12$ 의 좁은 환형을 고려하였는데 이때의 전도(conduction) 영역의 안정성은 Prandtl 수의 함수로서 다음과 같은 두 가지 영역으로 구분된다는 것을 보였다. (1) $Pr \leq 0.2$: 수력학적 불안정이 일어남으로 인해 같은 방향으로 회전하는 두 개 이상의 소용돌이를 갖는 유동이 일어난다. (2) $Pr \geq 0.3$: 환형의 꼭대기 부근에서 열불안정이 일어나며 초기에는 사각형 모양의 하나의 작은 셀이 형성되는 정상 상태의 유동을 보인다. 그리고 불안정이 일어난 후에는 Prandtl 수에 따라서 다양한 다중셀 유동(multicellular flow)과 분기 현상, 및 진동 대류

(oscillatory convection)가 존재함을 보였다.

그리고 다음에는 $D_i/L=2$ 의 넓은 폭을 갖는 환형에서 일어나는 Prandtl 수에 따른 분기 현상을 조사하였는데^(5,6) 관측된 현상은 다음과 같다.

(1) $Pr=0.3$ ⁽⁵⁾ : Rayleigh 수가 증가함에 따라 정상 상태의 '올라가는 유동'으로부터 정상 상태의 '내려가는 유동'으로의 천이가 일어난다. 두 해의 분지 사이에 이력(hysteresis) 현상이 일어나며 정상 상태의 두 유동이 동시에 존재할 수 있다. (2) $Pr=0.1$ ⁽⁶⁾ : 정상 상태의 '올라가는 유동'으로부터 주기적으로 진동하는 대류로의 Hopf bifurcation이 일어난다. 수력학적 불안정으로 인하여 Hopf bifurcation이 일어난 직후에는 같은 방향으로 회전하는 다중셀(multicellular) 유동이 일어난다. 그리고 더 큰 Rayleigh 수에서는 진동하는 '내려가는 유동'이 일어난다. 이력 현상은 일어나지 않고 이중해도 존재하지 않는다.

한편 Chung⁽⁷⁾ 등은 응고 과정에서 일어나는 다중셀 유동을 초기 조건으로 사용하여 다중해가 존재한다는 것을 보였다.

본 연구는 Yoo^(5,6)의 연구의 연장으로서 $D_i/L=2$ 의 넓은 폭을 갖는 환형에서 일어나는 $Pr=0.2$ 인 유체에 대한 유동의 천이 현상을 조사한다. 이상에서 보았듯이 $Pr=0.3$ 과 $Pr=0.1$ 에서는 서로 다른 특색을 갖는 분기(bifurcation) 현상들이 일어난다. 따라서 중간 Prandtl 수인 $Pr=0.2$ 에서는 두 가지 분기 현상들의 특성이 각각 혼합된 또다른 흥미 있는 현상이 일어날 수 있을 것으로 예측할 수 있다.

2. 해석

환형의 구조와 좌표계는 Fig. 1과 같다. 일정한 표면 온도를 유지하고 있는 두 개의 무한히 긴 수평 실린더 사이에 유체가 있다. 안쪽 실린더의 온도는 T_i 이고 바깥쪽 실린더의 온도는 T_o 이며 $T_i > T_o$ 이다. Boussinesq 근사 하에서 부력 항을 제외하고는 유체에서의 밀도 변화는 무시한다. 질량, 운동량과 에너지에 대한 보존 방정식을 특성 길이, 시간, 속도, 압력과 온도를 각각 L , L^2/α , α/L , $\rho_0 \alpha^2/L^2$, $(T_i - T_o)$ 로 택

하여 무차원화시킨다. 그리고 $Pr = \nu/\alpha$, $Ra = ag(T_i - T_o)L^3/\nu\alpha$ 를 각각 Prandtl 수와 Rayleigh 수로 정의한다.

유선함수 (Ψ)와 와도 (ω)에 대한 무차원 지배 방정식과 경계 조건은 다음과 같다.⁽⁵⁾

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\Psi, \omega) + Pr\nabla^2 \omega - PrRa[\sin(\phi)\frac{\partial \theta}{\partial r} + \cos(\phi)\frac{\partial \theta}{r\partial \phi}] \quad (1)$$

$$\omega = -\nabla^2 \Psi \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = J(\Psi, \theta) + \nabla^2 \theta \quad (3)$$

여기에서 와도(ω)와 유선함수(Ψ) 및 Jacobian $J(f, g)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\omega = \frac{\partial}{\partial r}(rv) - \frac{\partial}{\partial \phi}(u), \quad u = \frac{\partial \Psi}{r\partial \phi}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$J(f, g) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial g}{\partial r}\right) \quad (4)$$

그리고 벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \quad \theta = 1 \quad \text{at } r = r_i \quad (5)$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \quad \theta = 0 \quad \text{at } r = r_o \quad (6)$$

원주 방향으로는 다음과 같은 대칭 조건을 적

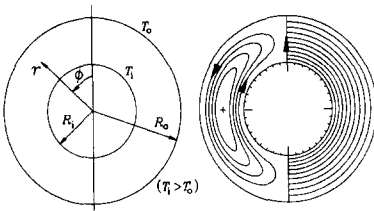


Fig. 1 A sketch of an annulus and a plot of streamlines and isotherms of conduction-dominated regime

용한다.

$$\Psi = \omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 \quad \text{at } \phi = 0, \pi \quad (7)$$

유체 유동이 없는 경우의 순수한 전도 (conduction)에 의한 열전달률은 다음과 같이 된다.

$$Nu_{cond} = \frac{1}{\ln(r_o/r_i)} \quad (8)$$

그리고 국부 Nusselt 수(local Nusselt number)를 다음과 같이 실제적인 열플럭스(heat flux)를 Nu_{cond} 로 나눈 값으로 정의한다.

$$Nu_i(\phi) = -(r\frac{\partial \theta}{\partial r})/Nu_{cond} \quad \text{at } r = r_i \quad (9)$$

$$Nu_o(\phi) = -(r\frac{\partial \theta}{\partial r})/Nu_{cond} \quad \text{at } r = r_o \quad (10)$$

평균 Nusselt 수 $\overline{Nu}_i, \overline{Nu}_o$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\overline{Nu}_i = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Nu_i(\phi) d\phi \quad (11)$$

$$\overline{Nu}_o = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Nu_o(\phi) d\phi \quad (12)$$

정상 상태에서 \overline{Nu}_i 와 \overline{Nu}_o 는 같은 값을 가지게 된다.

식 (1)-(7)의 방정식은 Yoo⁽⁵⁾에서 사용한 것과 같은 유한차분법을 사용하여 푼다. 원주 방향으로는 균일 격자를 이용하고 반경 방향으로는 두 벽면에서의 얇은 경계층을 분해하기 위해 다음과 같은 좌표 확장을 이용한다.

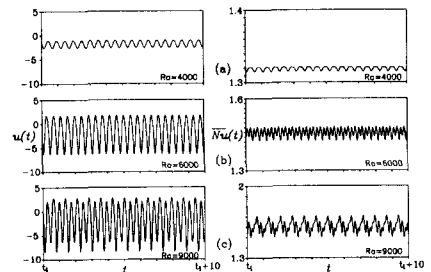


Fig. 2 Time evolution of $u(t)$ and $\overline{Nu}(t)$ for several Rayleigh numbers: (a) $Ra=4000$; (b) $Ra=6000$; (c) $Ra=9000$

$$r = r_i + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\tanh\{C(2\eta-1)\}}{\tanh(C)} \right]$$

with $C=1.5, 0 \leq \eta \leq 1$ (13)

본 연구에서 사용한 $(r \times \phi)$ 격자계는 (45×65) 이다.

진동하는 대류를 관찰하기 위하여 계산 기간 동안에 다음과 같이 환형의 중심에서의 반경 방향의 속도를 기록한다.

$$u(t) = u(r_c, \pi/2, t) \quad (14)$$

여기에서 $r_c = (r_i + r_o)/2$

수력학적 불안정은 특히 환형의 수직 부분에서 가장 먼저 일어날 수 있으므로 환형의 수직 부분에 있는 점 $(r_c, \pi/2)$ 을 택하였다.

3. 결과 및 논의

본 문제는 Rayleigh-Bénard 문제와는 달리 유체의 흐름이 없는 정지 상태가 없으며 아무리 작은 온도 차이에 의해서도 유동이 일어난다. 전도가 지배적인 작은 Rayleigh 수에서는 Fig. 1과 같이 하나의 셀(cell)을 갖는 정상 상태의 유동장이 확립된다. 이 경우 유체는 따뜻한 안쪽 실린더 벽면을 따라 위로 올라가서 차가운 바깥쪽 실린더를 타고 흘러내린다. 앞으로 Fig. 1과 같이 환형의 꼭대기($\phi=0$) 부근의 유체가 위로 올라가는 유동을 '올라가는 유동(upward flow)'이라고 부르기로 하겠다.^(5,6)

$Ra \leq 3000$ 에서는 '올라가는 유동'을 보이는 정상 상태의 대류가 유지된다. 그러나 Rayleigh 수가 증가할수록 정상 상태의 '올라가는 유동'은 불안정해져서 마침내 $Ra \geq 4000$ 에서는 진동하는 대류가 일어난다.

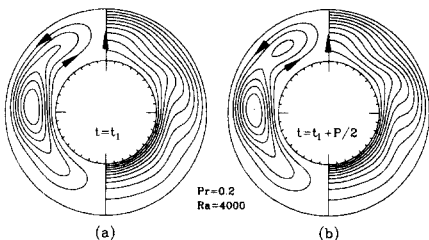


Fig. 3 Instantaneous streamlines and isotherms at $Ra=4000$: (a) at $t=t_1$ at which $u(t)$ takes its minimum value; (b) at $t=t_1+P/2$

먼저 Fig. 2에 환형 폭의 중심에서의 반경 방향의 속도 $u(t)$ 와 Nusselt 수 $\overline{Nu}(t)$ 의 시간 기록을 도시하였다. 그리고 진동하는 대류가 일어나는 $Ra=4000, 6000, 9000$ 에서의 몇몇 순간적인 유선의 모습을 Figs. 3~5에 도시하였다.

진동 대류의 초기인 $Ra=4000$ (Fig. 3)에서는 같은 방향으로 회전하는 두 개의 소용돌이(eddy)가 주기적으로 나타남을 보여주고 있는데 이것은 진동하는 불안정(oscillatory instability)의 근원은 수력학적 불안정성을 말해 주고 있다.⁽³⁾

$Ra=4000$ (Fig. 3)에서는 안쪽 실린더에서의 경계층(boundary layer)은 언제나 환형의 수직 대칭면($\phi=0, \pi$)에서 분리되며 다른 방향으로 회전하는 소용돌이(eddy)는 형성되지 않는다.

그러나 $5000 \leq Ra \leq 8000$ 에서는 진동하는 기간 동안에 안쪽 실린더에서의 경계층이 환형의 수직 대칭면 외의 곳에서 분리되어 환형의 안쪽 실린더의 벽면에 부착된 작은 소용돌이(eddy)가 주기적으로 나타난다. Fig. 4에는 $Ra=6000$ 에서의 한 주기 동안의 유동장을 도시하였다. Fig. 4와 같이 $5000 \leq Ra \leq 8000$ 에서는 진동하는 기간 동안에 같은 방향으로 회전하는 소용돌이가 나타나기도 하고(Fig. 4(b),(c)), 반대 방향으로 회전하는 작은 소

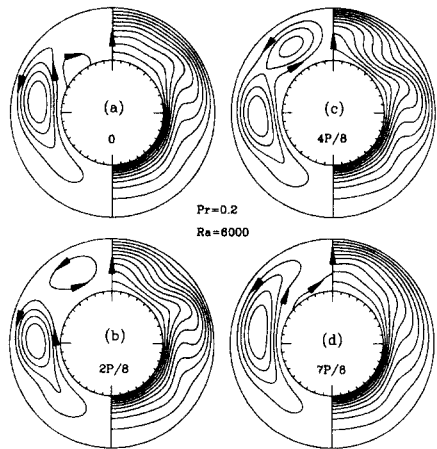


Fig. 4 Instantaneous streamlines and isotherms over one period of oscillation at $Ra=6000$: (a) at $t=t_1$ at which $u(t)$ takes its minimum value; (b) at $t=t_1+2P/8$; (c) at $t=t_1+4P/8$; (d) at $t=t_1+7P/8$

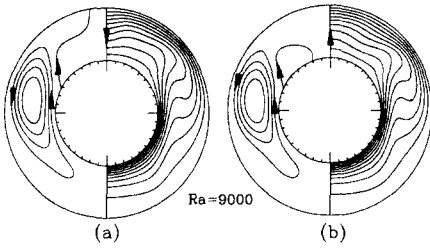


Fig. 5 Instantaneous streamlines and isotherms at $Ra=9000$: (a) at $t=t_1$ at which $u(t)$ takes its minimum value; (b) at $t=t_1 + P/2$

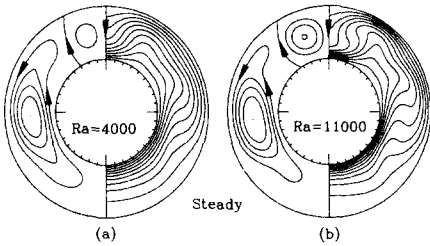


Fig. 6 Steady-state streamlines and isotherms at (a) $Ra=4000$ and (b) $Ra=1.1 \times 10^4$

용돌이가 안쪽 실린더의 벽면 부근에 형성되기도 한다 (Fig. 4(a),(d)). $Ra=8000$ 까지는 이 작은 소용돌이가 바깥쪽 실린더까지 확대되지 않는다. 그러나 더 큰 Rayleigh 수, $9000 \leq Ra \leq 10^4$ 에서는 환형 꼭대기의 소용돌이가 성장하여 바깥쪽 실린더까지 확대된다. $Ra=9000$ 에서의 유동장 Fig. 5는 진동 기간 동안에 환형의 위 부분에 형성된 셀이 주기적으로 바깥쪽 실린더까지 확대됨을 보여주고 있다.

Rayleigh 수가 증가함에 따라 환형의 위 부분에 형성된 소용돌이의 강도(strength)는 점점 증가하며 마침내 $Ra=1.1 \times 10^4$ 에서는 이 소용돌이가 사라지지 않고 계속 존재하는 새로운 정상 상태의 대류가 확립된다. Fig. 6(b)에는 $Ra=1.1 \times 10^4$ 에서의 유동장을 도시하였다. 새로이 확립된 정상 상태의 유동장은, 환형의 수직 부분에 형성된 하나의 큰 셀과 환형의 위 부분에 형성된 반대 방향으로 회전하는 하나의 셀을 보여주고 있다. 전도 상태의 유동장과는 달리 새로운 소용돌이가 하나 더 형성됨에 따라 환형의 꼭대기($\phi=0$) 부

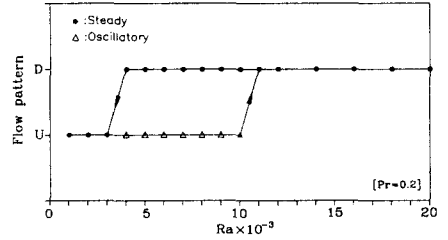


Fig. 7 Bifurcation diagram showing the solution branches. The letters 'U' and 'D' denote the solutions at the up-scan and down-scan stages, respectively. In the solution branch 'D', the fluid in the top of the annulus descends by forming two counter-rotating eddies, but in 'U', the fluid ascends except a small interval of the oscillation period

근의 유체는 아래로 내려간다(Fig. 6). Yoo^(5,6)는 이와 같은 유동장을 '내려가는 유동(downward flow)'이라고 이름지었다.

한편 Cheddadi 등⁽⁸⁾과 Yoo⁽⁹⁾는 $Pr=0.7$ 인 공기의 자연 대류에서 인위적인(artificial) 수치 교란(numerical disturbance)을 사용하여 이와 같은 '내려가는 유동'을 구한 바 있다. 따라서 본 연구에서 주목할 것 중의 하나는, $Pr=0.2$ 인 유체에서는 $Pr=0.7$ 과는 달리 인위적인 교란을 사용하지 않고 '내려가는 유동'이 자연적으로 구해진다는 것과 Rayleigh 수의 증가에 따라 진동 상태를 거쳐서 새로운 정상 상태의 유동장이 확립된다는 것이다.

이상에서 보인 바와 같이 Rayleigh 수를 증가시키면(up-scan) '올라가는 유동'으로부터 '내려가는 유동'으로의 천이가 일어난다. 이와 반대로 Rayleigh 수를 감소시키면(down-scan) '내려가는 유동'으로부터 '올라가는 유동'으로의 천이가 일어나는데 이력(hysteresis) 현상이 수반됨을 발견하였다. Rayleigh 수에 따른 분기(bifurcation) 도표를 Fig. 7에 도시하였다. Fig. 7에서 주목할 것은 이력 현상에 따라 $4000 \leq Ra \leq 10^4$ 에서는 정상 상태의 유동과 진동하는 유동의 두 가지 해가 존재한다는 것이다. 이중해에 대한 하나의 예를 $Ra=4000$ 에 대해 Fig. 2(a) 및 Fig. 3과 Fig. 6(a)에 제시하였다. 즉, Fig. 2(a) 및 Fig. 3은 하나의 진동하는 대류이며, Fig. 6(a)는 정상상태의 유동

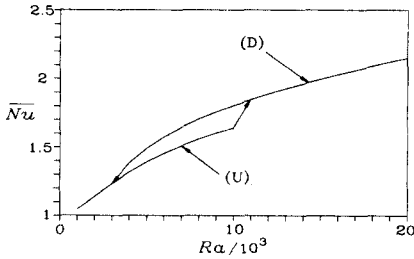


Fig. 8 Overall Nusselt number, \overline{Nu} , as functions of Ra for the solutions at the up-scan (U) and downward-scan (D) stages. \overline{Nu} of the up-scan stage in the oscillatory regime is time-averaged value

이다. 다중 해(multiple solutions)의 존재는 흥미 있는 현상으로서 여러 가지의 유체역학 문제에 대해 연구되었다 : 굽은 관에서의 강제 대류 (Dean problem^(10,11)), 회전하는 실린더 사이에서의 유동 (Taylor problem^(12,13)), 수평 덕트(duct)에서의 혼합 대류,⁽¹⁴⁾ 주기적인 시스템에서의 자연 대류⁽¹⁵⁾ 등. 그러나 이중해(dual solution)에 대한 이와 같은 연구들은 모두가 정상 상태의 해에만 국한되어 있다. 따라서 특히 본 연구에서 관찰한 정상 상태의 유동과 진동하는 유동으로 구성되는 이중해는 매우 흥미 있는 현상이라고 할 수 있다. 이와 같은 현상은 Prandtl 수에 따라서 수력학적 불안정성과 열적 불안정성이 동시에 일어날 수 있는 환형의 구조에 기인한다. 즉, 열불안정이 지배적인 Pr=0.3⁽⁵⁾에서는 정상 상태의 이중해가 존재하고, 수력학적 불안정이 지배적인 Pr=0.1⁽⁶⁾에서는 진동하는 대류로의 천이가 일어나며 단일 해를 갖는다. 그리고 중간 Prandtl 수인 Pr=0.2에서는 수력학적 불안정에 의해 진동하는 대류가 일어날 수 있고 열불안정에 의해 이중해가 존재할 수 있다.

유동의 천이 현상에 의해 벽면에서의 열전달률에도 변화가 일어난다. Fig. 8에는 Rayleigh 수에 따른 시간 평균 Nusselt 수를 도시하였다. Rayleigh 수의 함수로써의 평균 Nusselt 수를 나타내고 있는 Fig. 8은 두 해의 분기 현상(bifurcation)과 열전달 특성을 잘 보여주고 있다. 평균 Nusselt 수는 Ra 의 증가와 함께 증가한다. 그리고 '내려가는 유동'으로의 천이가 일어나는 Ra

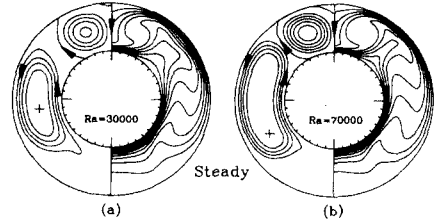


Fig. 9 Steady-state streamlines and isotherms at high Rayleigh numbers: (a) $Ra=3 \times 10^4$; (b) $Ra=7 \times 10^4$. The cross in the streamfunction field indicates the point of Ψ_{max}

부근에서 시간 평균 Nusselt 수가 약간 급격하게 증가한다. '내려가는 유동'의 Nusselt 수는 언제나 '올라가는 유동' 것보다 크다. 셀 대류(cellular convection)는 셀들의 경계면에서 thermal plume을 형성한다. 환형의 위 부분에 새로운 셀이 형성됨에 따라 thermal plume의 개수도 많아지고 이에 따라 벽면에서의 Nusselt 수도 증대되는 현상을 보인다.⁽³⁾

끝으로 Fig. 9에는 큰 Rayleigh 수인 $Ra=3 \times 10^4$, 7×10^4 에서의 정상 상태의 유동장을 도시하였다. Rayleigh 수가 증가할수록 환형의 위 부분에 있는 소용돌이의 강도가 증대된다. 그리고 환형의 수직 부분에 위치한 큰 소용돌이의 회전 중심의 위치는 아래로 내려간다 (Fig. 6, Fig. 9). 한편, 이와는 달리 Pr=0.7인 공기인 경우에는 소용돌이의 중심은 Rayleigh 수가 커질수록 위로 이동한다.⁽¹⁶⁾

4. 결론

두 개의 수평 동심 실린더 사이의 넓은 환형 공간 ($D_i/L=2$)에서 일어나는 중간 Prandtl 수 ($Pr=0.2$) 유체의 자연 대류 유동의 천이 현상을 수치적으로 조사하였다. Rayleigh 수를 증가시키면 정상 상태에서부터 주기적으로 진동하는 대류로의 Hopf bifurcation이 일어난다. 수력학적 불안정으로 인하여 Hopf bifurcation이 일어난 직후에는 같은 방향으로 회전하는 소용돌이들을 주기적으로 갖는 유동이 일어난다. 그러나 조금 더 큰 Rayleigh 수에서는 환형의 위 부분에 반대 방향으

로 회전하는 하나의 소용돌이가 주기적으로 나타난다. 그리고 진동하는 유동으로부터 새로운 정상 상태 유동으로의 역전이(reverse transition)가 일어나며 Rayleigh 수를 감소시키면 이력 현상이 일어난다. 단일해를 갖는 $Pr=0.1$ 과는 달리 이중해가 존재한다. 그리고 정상 상태의 이중해를 갖는 $Pr=0.3$ 인 경우와는 달리 하나의 정상 상태 유동과 하나의 진동하는 유동으로 구성되는 이중해가 존재한다. Rayleigh 수가 증가함에 따라 '내려가는 유동'으로의 전이가 일어나는 Rayleigh 수 부근에서 시간 평균 Nusselt 수의 기울기가 크게 증가한다. 이중해의 영역에서는 '내려가는 유동'의 Nusselt 수가 '올라가는 유동'의 것보다 크다.

참고문헌

- (1) Lee, Y. and Korpela, S. A., 1983, "Multicellular Natural Convection in a Vertical Slot," *J. Fluid Mech.*, Vol. 126, pp. 91~121.
- (2) Busse, F. H., "Transition to Turbulence in Rayleigh-Bénard Convection." In *Topics in Applied Physics*, Vol. 45, Edited by H. L. Swinney and J. P. Gollub. Springer-Verlag, 1981, pp. 97~137.
- (3) Yoo, J.-S., 1998, "Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus: $Pr \leq 0.3$," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, pp. 3055~3073.
- (4) Yoo, J.-S., 1999, "Transition and Multiplicity of Flows in Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus : $Pr=0.4$," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 709~722.
- (5) Yoo, J.-S., 1999, "Prandtl Number Effect on Bifurcation and Dual Solutions in Natural Convection in a Horizontal Annulus," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 3275~3286.
- (6) Yoo, J.-S., 2000, "Transitions and Chaos in Natural Convection of a Fluid with $Pr=0.1$ in a Horizontal Annulus," *Fluid Dyn. Res.*, Vol. 27, pp. 231~245.
- (7) Chung, J. D., Kim, C.-J., Yoo, H. and Lee, J. S., 1999, "Numerical Investigation on the Bifurcative Natural Convection in a Horizontal Concentric Annulus," *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 36, pp. 291~307.
- (8) Cheddadi, A., Caltagirone, J. P., Mojtabi, A. and Vafai, K., 1992, "Free Two-Dimensional Convective Bifurcation in a Horizontal Annulus," *J. of Heat Transfer*, Vol. 114, pp. 99~106.
- (9) Yoo, J.-S., 1996, "Dual Steady Solutions in Natural Convection Between Horizontal Concentric Cylinders," *Int. J. of Heat and Fluid flow*, Vol. 17, pp. 587~593
- (10) Dennis, S. C. R. and Ng, M., 1982, "Dual Solutions for Steady Laminar Flow Through a Curved Tube," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 35, pp. 305~324.
- (11) Nandakumar, K., and Masliyah, J. H., 1982, "Bifurcation in Steady Laminar Flow Through Curved Tubes," *J. Fluid Mech.*, Vol. 119, pp. 475~490.
- (12) Benjamin, T. B. and Mullin, T., 1982, "Notes on the Multiplicity of Flows in the Taylor Experiment," *J. Fluid Mech.*, Vol. 121, pp. 219~230.
- (13) Cliffe, K. A., 1983, "Numerical Calculations of Two-Cell and Single-Cell Taylor Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 135, pp. 219~233.
- (14) Nandakumar, K., Masliyah, J. H. and Law, H. S., 1985, "Bifurcation in Steady Laminar Mixed Convection Flow in Horizontal Ducts," *J. Fluid Mech.*, Vol. 152, pp. 145~161.
- (15) Yoo, J.-S. and Kim, M.-U., 1991, "Two-Dimensional Convection in a Horizontal Fluid Layer with Spatially Periodic Boundary Temperatures," *Fluid Dyn. Res.*, Vol. 7, pp. 181~200.
- (16) Kuehn, T. H. and Goldstein, R. J., 1976, "An Experimental and Theoretical Study of Natural Convection in the Annulus Between Horizontal Concentric Cylinders," *J. Fluid Mech.* Vol. 74, pp. 695~719.