Comm. Korean Math. Soc. **16** (2001), No. 2, pp. 163–204

초청논문

Erdös-Rényi 법칙과 Gauss 과정의 극한이론

최 용 갑

요약문. 먼저 Erdös-Rényi 의 새로운 강대수 법칙을 소개하고, 여러가지 형태로 발전된 Erdös-Rényi 형의 법칙과 그 응용을 보여준다. 보다 더 일반적인 Erdös-Rényi 형 법칙을 찾기 위해 Csörgő-Révész 증분형태의 극한정리들을 소개하여 종속 mixing 조건이 주어진 정상 Gauss 확률변수들의 부분합에 대해 Csörgő-Révész 증분형태의 새로운 극한정리들을 얻는다. 끝으로, 유한차원 벡터공간, l^p-공간, l^∞-공간에서 각각 값을 갖는, 연속 Gauss 과정에 대해서 필자에 의해 최근에 발표된 몇 편의 논문을 간략히 소개한다.

1. 서론

1970년 P. Erdös와 A. Rényi는 독립인 동일분포의 확률변수들(iid rv's)에 대해 새로운 대수의 법칙(new law of large numbers)을 발견했다. 오늘날 이를 Erdös-Rényi 법칙이라 부른다. 가장 간단한 경우로 이 법칙의 내용은, 성공과 실패의 model 로 n 회 반복 시행하는 공정한 game 에서 한 경기자가 비교적 짧은 기간 $[c\log_2 n]$ $(c \geq 1)$ 동안 얻을 수 있는 최대 평균이득은 극한치 α 에 거의 확실히 수렴한다는 것이다. 여기서 α 의 값은 방정식

$$\frac{1}{c} = 1 - \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\log_2\left(\frac{2}{1+\alpha}\right) - \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\log_2\left(\frac{2}{1-\alpha}\right)$$

의 구간 $0 < \alpha < 1$에서의 유일한 해이다.

Received April 6, 2001.

2000 Mathematics Subject Classification: 60F15, 60G15.

Key words and phrases: Erdös-Rényi 법칙, Gauss 과정, 재생과정, 종속 mixing 조건, Wiener 과정, 대수의 법칙, 정칙변화함수, 연속률.

Partially supported by Korea Research Foundation Grant (KRF-99-005-D00003).

제 2절에서는, Erdös-Rényi 법칙을 구체적으로 설명하고 그 발전 과정과 일반화된 Erdös-Rényi 형 법칙들을 간략히 서술한다.

제 3절에서는, 재생과정에서의 몇가지 Erdös-Rényi 형 법칙과 그 응용문제를 다룬다.

제 4절에서는, 이산 확률과정에서의 Csörgő-Révész 증분형태에 관한 정리들을 Komlós-Major-Tusnády 의 불변원리에 의해 Wiener 과정 및 Gauss 과정의 경우로 발전 가능함을 시사한다. 여기서 Wiener 과정 및 Gauss 과정의 정의를 알아보자.

확률공간 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$상의 확률과정 $\{W(t) = W(t;\omega) : 0 \le t < \infty\}$, $\omega \in \Omega$ 가 Wiener 과정이라 함은 다음 세 조건을 만족할 때를 말한다.

(i) $W(0) = 0$ 이고, $0 \le s < t < \infty$ 에 대해 $W(t) - W(s)$ 는 정규분포 $N(0, t-s)$ 에 따른다.

(ii) $W(t)$ 는 독립증분을 갖는다. 즉,

$$0 \le t_1 < t_2 \le t_3 < t_4 \le \cdots \le t_{2i-1} < t_{2i} < \infty \ (i = 1, 2, \cdots)$$

에 대해

$$W(t_2) - W(t_1), W(t_4) - W(t_3), \cdots, W(t_{2i}) - W(t_{2i-1})$$

는 독립 확률변수들이다.

(iii) 표본 경로 함수(sample path function) $W(t;\omega)$ 는 확률 1 로써 t 에 관해 연속이다.

확률공간 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 상의 확률과정 $\{X(t) = X(t;\omega) : 0 \le t < \infty\}$, $\omega \in \Omega$가 Gauss 과정이라 함은, 확률변수 $X(t)$ 의 모든 유한 선형 결합 (finite linear combination)이 정규분포할 때를 말한다. 명백히 Wiener 과정이면 Gauss 과정이 되지만 일반적으로 그 역은 참이 아니다. 따라서 Wiener 과정에 대한 많은 극한 정리들이 Gauss 과정의 형태로 발전될 수 있다([23], [24], [40], [41], [6]-[20]).

제 5절에서는, 종속 mixing 조건이 주어진 경우나 상관함수 $\rho_n(-1 < \rho_n < 1)$이 주어졌을 때 Csörgő-Révész 증분형태의 극한정리들을 얻고, 더 일반적인 형태로 발전시켜 새로운 결과를 얻는다.

마지막 제 6절에서는, 연속 Gauss 확률과정에 대해서 필자에 의해 최근에 발표된 몇 편의 논문들을 간략히 소개한다: 유한차원 벡터 공간, l^p-공간, l^∞-공간에서 각각 값을 갖는 Gauss 과정들에 대해서 Csörgő-Révész 증분형태 또는 연속률을 나타내는 극한정리들을 소개하며, 유한차원 벡터공간에서 값을 갖는, N-차원 공간 $[0,\infty)^N$상의 Gauss 과정에 대한 극한정리들을 보여준다.

2. Erdös-Rényi 의 새로운 강대수법칙과 그 일반화

공정한 game에서 독립시행(independent trials)을 하여 한 경기자가 얻는 이득(gains)을 $X_1, X_2, \cdots$ 라 하고, 각각의 $i = 1, 2, \cdots$ 에 대해 그 확률값을 $P\{X_i = \pm 1\} = \frac{1}{2}$이라 하자. 강대수법칙에 따르면

$$(2.1) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i = 0 \quad \text{a.s.}^1$$

임을 안다. 한편, 계속적인 반복시행에 의해

$$(2.2) \qquad \lim_{N\to\infty} \max\{X_1, \cdots, X_N\} = 1 \quad \text{a.s.}$$

은 명백하다. (2.1)은 긴 확률변수열 $X_1, \cdots, X_N$ 에 의한 그들의 평균치를 의미하나, (2.2)는 적어도 한번의 성공이 있음을 나타낸다. 여기서 우리의 관심은 "N 이 클때 긴 수열 $X_1, \cdots, X_N$ 보다 비교적 짧은, 길이 K 를 갖는 부분수열 $X_{n+1}, \cdots, X_{n+K}$ $(n \geq 0,\ n + K \leq N)$ 에 대해서 이들의 최대 평균치는 무엇인가?" 하는 문제이다. 이 문제에 관하여 최초로 Erdös 와 Rényi [27]는, N 에 의존하는 길이 K 의 부분수열 $X_{n+1}, \cdots, X_{n+K}$ 에 대해서 얻을 수 있는 최대 평균치(최대 평균이득)은 근사적으로 0 과 1 사이에 어떤 값이 존재함을 증명하였다. 더 자세히 말하면, $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ 그리고

$$D(N,K) = \max_{0 \leq n \leq N-K} (S_{n+K} - S_n), \quad 1 \leq K \leq N$$

[1] a.s.는 almost surely의 약자로서 측도론(measure theory)에서의 a.s. 즉 almost everywhere에 대응되는 의미이다.

이라 놓을 때, 각각의 $a \in (0,1)$에 대해서 주어진 분포에 의해 유일하게 결정되는 상수 $c = c(a)$ 가 존재하고 다음식이 성립한다.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{D(N, [c\log N])}{[c\log N]} = a \quad \text{a.s.} \tag{2.3}$$

여기서, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대정수를 나타낸다. 앞으로도 기호 $[\cdot]$ 는 이와 같은 의미로 사용할 것이다. (2.3)은 소위 **Erdös-Rényi 의 새로운 강대수 법칙**의 특별한 형태이다. 따라서 이 법칙은 (2.1)의 강대수 법칙과 (2.2)의 최대치 사이의 gap을 연결하는 교량적인 역할을 한다고 볼 수 있다. Erdös 와 Rényi [27]는 그들의 새로운 강대수법칙의 일반형을 다음과 같이 발표하였다. 오늘날 정리 2.1 을 소위 **Erdös-Rényi 법칙**이라 부른다.

정리 2.1. $X_1, X_2, \cdots$ 를 확률공간 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 상에서 정의된, 비퇴화이고 독립인 동일분포의 확률변수들(nondegenerate iidrv's) 이라 하고, $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ 그리고

$$\phi(t) = E\exp(tX_1) < \infty, \quad 0 \le t < t_1$$

이라 가정하자. 그러면, 각각의 $a \in \{\phi'(t)/\phi(t) : t \in (0,\, t_1)\}$ 에 대해서

$$\exp(-1/c) = \inf\{\phi(t)\exp(-ta) : t \in (0,\, t_1)\} =: \rho(a)$$

인 상수 $c = c(a)$가 유일하게 존재하고 다음식이 성립한다.

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\le n\le N-[c\log N]} \frac{S_{n+[c\log N]} - S_n}{[c\log N]} = a \quad \text{a.s.}$$

여기서, $a \in \{\phi'(t)/\phi(t) : t \in (0,\, \infty)\} = (EX_1, \mathrm{esssup}X_1)$ 임에 유의하자. 정리 2.1 의 증명은 주로 Chernoff [5]에 의한 다음의 대편차 확률 정리에 기인한다.

정리 2.2. $X_1, X_2, \cdots$ 를 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 상의 비퇴화이고 독립인 동일분포의 확률 변수들이라 하고, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$,

$$\phi(t) = E\exp(tX_1) < \infty, \quad 0 \le t < t_1$$

이라 하자. 또, 각각의 $a \in \{\phi'(t)/\phi(t) : t \in (0, t_1)\}$ 에 대해

$$\rho(a) = \inf\{\phi(t)\exp(-ta) : t \in (0, t_1)\}$$

이라 하면

$$P\{S_n \geq na\} \leq (\rho(a))^n$$

이고, 더욱

$$\lim_{n\to\infty} (P\{S_n \geq na\})^{1/n} = \rho(a)$$

이다.

한편, 정리 2.2 에서 적률생성함수 $\phi(t)$ 가 존재하지 않는 경우에는 대편차 확률의 결과가 어떻게 될 것인가? 하는 의문이 생긴다. 이에 대해 Petrov 와 Sirokova [45] 는 적률생성함수의 필요성을 다음과 같이 보였다.

정리 2.3. $X_1, X_2, \cdots$ 를 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 상의 독립인 동일 분포의 확률변수들이라 하고, 모든 $t > 0$에 대해 $\phi(t) = \infty$라 하자. 그러면, 모든 상수 a 와 $\rho(0 < \rho < 1)$ 에 대해

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{P\{S_n \geq na\}}{\rho^n} = \infty$$

이다.

더욱, 적률생성함수 $\phi(t)$ 가 존재하지 않는 경우에 Erdös-Rényi 법칙이 이제는 성립하지 않음을, Steinebach [48] 에 의해 위의 정리 2.3 을 이용하여 다음 정리로 보였다.

정리 2.4. 모든 $t > 0$ 에 대해 $\phi(t) = \infty$이면, 임의의 $c > 0$ 에 대해 다음 식이 성립한다.

$$\limsup_{N\to\infty} \max_{0\leq n\leq N-[c\log N]} \frac{S_{n+[c\log N]} - S_n}{[c\log N]} = \infty \quad \text{a.s.}$$

다음에, Book [2]은 original Erdös-Rényi 법칙인 정리 2.1의 확장된 형태를 다음과 같이 보였다.

정리 2.5. $X_1, X_2, \cdots$ 를 독립인 동일 분포의 확률변수들이라 하고, $EX_1 = 0$, $\mathrm{Var}(X_1) = 1$, $\phi(t) < \infty$, $0 \le t < t_1$, $1 < r < 2$ 라 하자. 그러면, 각각의 $a > 0$ 에 대해 다음식이 성립한다.

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\le n\le N-K} \frac{S_{n+K} - S_n}{K^{1/r}} = a \quad \text{a.s.}$$

여기서, $K = [(2a^{-2}\log N)^{r/(2-r)}]$이다.

Erdös-Rényi 법칙 (정리 2.1)의 여러가지 일반화는, iidrv's 의 가중합 (weighted sums)의 경우 또는 non-iidrv's 의 경우로 Lin [37], Book ([1], [3]) 에 의해 발표되었고, 동일분포가 아닌 확률변수들의 경우 또는 적률생성함수가 존재하지 않는 경우에 Lin ([33]-[39], [42]) 에 의해 발전되었으며, Steinebach [53] 는 다변량 parameters 를 갖는 경우의 부분합 과정에 대한 Erdös-Rényi 법칙을 증명하였다. 특히, 통계적 응용을 위해 Csörgő [21]는 다음과 같이 일반화된 Erdös-Rényi 법칙을 얻었다.

정리 2.6. $\{T_{n,k} : n = 0, 1, 2, \cdots ; k = 1, 2, \cdots\}$를 실가 확률변수들의 이중열이라 하고, 다음 조건을 만족한다고 하자.

(i) $\lim_{k\to\infty} (P\{T_{0,k} \ge ka\})^{1/k} = \rho(a), \quad a_0 < a < a_1,$

(ii) 각각의 k에 대해 $\{T_{n,k} : n = 0, 1, 2, \cdots\}$는 정상(stationary) 열이다,

(iii) 각각의 k에 대해 $\{T_{ik,k} : i = 0, 1, 2, \cdots\}$는 iidrv's의 열이다.

그러면, 각각의 $a \in (a_0, a_1)$에 대해 $\rho(a) = \exp(-1/c)$인 $c = c(a)$가 존재하고 다음식이 성립한다.

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\le n\le N-[c\log N]} \frac{T_{n,[c\log N]}}{[c\log N]} = a \quad \text{a.s.}$$

정리 2.6의 조건 (i)과 같은 지수 대편차 확률은 Erdös-Rényi 형의 법칙을 증명하는데 꼭 필요한 것이며, 더욱 n에 관해 $T_{n,k}$가 정상열이고 i에 관해 disjoint blocks 을 갖는 $T_{ik,k}$는 독립 확률변수들의 열이어야 함은 필수적인 조건들이다. 물론 정리 2.6 은 정리 2.1 을 포함한다. 왜냐하면, 정리 2.2 에 의해 적률생성함수의 존재로 부터 지수 대편차 확률의 결과를 얻을 수 있기 때문이다. 정리 2.6보다 더 일반적인 형태의 정리가 Steinebach ([50], [51])

에 의해 얻어졌다. Deheuvels 와 Steinebach [26] 는 moving averages 를 moving quantiles의 형태로 바꿈으로써 moving quantiles 에 관한 Erdös-Rényi 법칙(아래의 정리 2.7)을 증명했다. $U_1, U_2, \cdots$ 를 균일분포 $U_{(0,1)}$에 따르는 iidrv's 이라 하자. $\alpha \in (0,1)$와 양수 K에 대해, 표본 $U_{n+1}, \cdots, U_{n+K}$의 $[K\alpha]$번째 순서통계량을 $U_n(K)$로 나타내고 $M(N,K) = \max_{0 \le n \le N-K} U_n(K)$라 놓자. 그러면 다음 정리가 얻어진다.

정리 2.7. $0 < \alpha < u < 1$에 대해

$$\exp(-1/c) = \rho(\alpha, u) = (u/\alpha)^{\alpha}((1-u)/(1-\alpha))^{1-\alpha}$$

인 $c = c(\alpha, u)$가 존재하고 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(M(N,K)-u)K}{\log K} = -\frac{1}{2v} \quad \text{(확률적으로)} \tag{2.4}$$

$$\lim \inf_{N\to\infty} \frac{(M(N,K)-u)K}{\log K} = -\frac{1}{2v} \quad \text{a.s.} \tag{2.5}$$

$$\lim \sup_{N\to\infty} \frac{(M(N,K)-u)K}{\log K} = \frac{1}{2v} \quad \text{a.s.} \tag{2.6}$$

여기서, $K = K_N = [c \log N]$이고 $v = (u-\alpha)/(u(1-u))$이다.

한편, Csörgő 와 Steinebach [25] 는 아래와 같이 Erdös-Rényi 법칙에서 부분합 과정의 증분에 관한 수렴비율을 나타내는 정리를 얻었다.

정리 2.8. 정리 2.1의 가정 하에서 다음식이 성립한다.

$$\lim_{N\to\infty} \left\{ \max_{0 \le n \le N-[c\log N]} \frac{S_{n+[c\log N]} - S_n}{[c\log N]^{1/2}} - [c\log N]^{1/2} a \right\} = 0 \quad \text{a.s.}$$

물론 이 정리는 정리 2.1 보다 더 정교한 결과를 나타낸다. 또한, 이 정리로 인해 정리 2.1은 따름정리로 바뀐다.

3. 재생과정(renewal process)

$X_1, X_2, \cdots$ 를 음이 아닌 독립, 동일분포의 확률변수들이라 하고 $\mu = EX_1 > 0, \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) > 0, \mu_3 = EX_1^3 < \infty$ 라 하자. $S_0 = 0, S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$, $t \geq 0$ 라 놓을 때, $\{N(t), t \geq 0\}$는 재생과정이다. 이 경우 Steinebach [49] 는 다음과 같이 재생과정에 대한 Erdös-Rényi 형 법칙을 얻었다.

정리 3.1. $\phi(t) = E\exp(tX_1) < \infty, t \leq 0$ 라 하고

$$\rho(1/a) = \inf_{t \leq 0} \phi(t)\exp(-t/a)$$

라 두자. 그러면, 각각의 $1/a \in \{\phi'(t)/\phi(t) : t < 0\}$에 대해 $\exp(-1/c) = (\rho(1/a))^a$ 인 $c = c(a)$가 존재하고 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{0\leq s\leq T - c\log T} \frac{N(s + c\log T) - N(s)}{c\log T} = a \quad \text{a.s.}$$

연구문제 1. $\log T$ 보다 약간 더 빠른 속도의 함수들의 class $\{k_T : 0 < T < \infty\}$에 대해서 Steinebach [49] 는 정리 2.1 과 유사한 다음 결과를 증명하였다. 그러나 일반적인 $\log T = o(k_T)$, $T \to \infty$ 의 형태로의 발전은 아직 open problem 으로 남아있다.

정리 3.2. $k_T(0 < T < \infty)$ 를 T 의 비감소함수라 하고 다음 조건을 만족한다고 하자.

(i) 어떤 양수 δ 에 대해 k_T/T^δ 는 비증가이다,

(ii) 어떤 $p > 2$ 에 대해 $k_T/(\log T)^p \to 0$ 이다,

(iii) $k_T/\log T \to \infty$ 이다.

그러면, 다음식이 성립한다.

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{0\leq s\leq T - k_T} \frac{N(s + k_T) - N(s) - k_T/\mu}{\{(2\sigma^2/\mu^3)k_T\log T\}^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

한편, 정리 3.2 의 가정 (iii)에 반하여 $k_T = o(\log T), T \to \infty$인 함수들의 class $\{k_T : 0 < T < \infty\}$ 에 대해서 Steinebach [54] 는 다음의 정리 3.3 을 얻었다. $X_1, X_2, \cdots$ 를 공통인 분포함수 F를 갖는, 비퇴화이고 독립인 확률변수들이라 하고, $0 < \mu = EX_1 < \infty$라 하자. $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$ 이라 두고 일반화된 재생과정 $\{N(t), 0 \leq t < \infty\}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$N(t) = \max\{n \geq 0 : S_0, \cdots, S_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

만일 $X_1, X_2, \cdots$ 가 음이 아니면 $\{N(t), 0 \leq t < \infty\}$ 는 보통의 재생과정

$$N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, \quad t \geq 0$$

와 일치한다.

정리 3.3. ess inf $X_1 = 0$ 이고 $p = P\{X_1 = 0\} > 0$ 라 하자. $k_T (0 < T < \infty)$ 를 T 의 양인 함수라 하고, 다음 조건을 만족한다고 가정한다.

(i) $k_T \uparrow \infty, \quad T \to \infty,$

(ii) $k_T / \log T \downarrow 0, \quad T \to \infty.$

그러면, 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{T \to \infty} \sup_{0 \leq s \leq T - k_T} \frac{N(s + k_T) - N(s)}{\log T} = \frac{1}{\log(1/p)} \quad \text{a.s.}$$

정리 3.1–3.3 을 증명하기 위해서는 증분 $N(s + k_T) - N(s)$의 근사적인 stationarity 와 $s_i (i = 1, 2, \cdots)$가 재생점들(renewal points) 로서 $s_0 = 0$, $s_i \geq s_{i-1} + k_T$일 때 증분 $N(s_i + k_T) - N(s_i)$의 독립성 및 항등식 $P\{N(t) \geq n\} = P\{S_n \leq t\}$을 써서 부분합에 관한 대편차 확률의 추정치가 필요하다.

연구문제 2. 정리 2.8 에서와 같이, 정리 3.1 을 재생과정의 증분에 관해 수렴 비율을 추정하는 결과를 다음과 같이 얻을 수 있을 것으로 추측된다.

정리 3.4. 정리 3.1의 가정하에서 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{T \to \infty} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T - c\log T} \frac{N(s + c\log T) - N(s)}{(c\log T)^{1/2}} - (c\log T)^{1/2} a \right\} = 0 \quad \text{a.s.}$$

다음은 산업현장에서의 치환문제(replacement problem)를 생각하자. $i = 1, 2, \cdots$ 에 대해 X_i를 i 번째 치환과 $(i-1)$번째 치환 사이의 실패시간(failure time)이라 하고 $S_0 = 0, S_n = X_1 + \cdots + X_n$이라 두자. $N(T)$를 T시간까지의 치환의 수라 하면

$$N(T) = \max\{n \ \geq 0 : S_n \leq T\}$$

이다. Y_j를 j번째 실패에 대한 치환의 비용이라 하면

$$Z(T) = \sum_{j=1}^{N(T)} Y_j$$

는 T시간까지 초래된 치환의 총비용이 된다. 이 경우, 어떤 적당한 조건하에서

$$\lim_{T\to\infty} \frac{Z(T)}{T} = \frac{E(Y_1)}{E(X_1)} \quad \text{a.s.}$$

가 성립한다. 이것은 긴 시간에 걸친 평균비용(average cost)을 나타낸다. 그런데, 길이 K 의 비교적 짧은 시간 구간, 예를 들면 $K = K(T) \sim c \log T$ $(c > 0)$인 경우에 어떤 결과가 나올 수 있을까 하는 문제가 생각된다. 역시 Erdös-Rényi 법칙의 관점에서

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T-c\log T} \frac{Z(t + c\log T) - Z(t)}{c\log T} = a \quad \text{a.s.}$$

인 결과를 기대할 수 있다. 이 사실은 다음과 같이 Steinebach [47] 에 의해 발표되었다.

정리 3.5. $\{X_i : i = 1, 2, \cdots\}$ 와 $\{Y_j : j = 1, 2, \cdots\}$ 는 각각 음이 아닌 iidrv's 로서 서로 독립이라 하고 다음 조건을 만족한다고 가정하자.

(i) $P\{X_1 > 0\} > 0$,

(ii) $EX_1^3 < \infty$,

(iii) $\phi(s) = E\exp(sY_1) < \infty, \ s \in (0, s_1)$,

(iv) X_i 또는 Y_j 중 어느 하나는 비퇴화이다.

함수 g를 $g(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E(x^{N(t)})$로 정의하면, 각각의 $a \in \{g'(\phi(s))\phi'(s) : s \in (0, s_1)\}$에 대해 다음식이 성립한다.

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le T-c\log T} \frac{Z(t + c\log T) - Z(t)}{c\log T} = a \quad \text{a.s.}$$

단, $c = c(a)$는 $\exp(-1/c) = \inf\{\exp(g(\phi(s)) - sa) : s \in (0, s_1)\}$ 에 의해 유일하게 결정되는 양의 상수이다.

정리 3.5 의 증명은, 주로 확률과정 $\{Z(t) : 0 \le t < \infty\}$에 관한 대편차 확률의 지수행동에 근거를 둔다. 즉, $a \in \{g'(\phi(s))\phi'(s) : s \in (0, s_1)\}$에 대해

$$\lim_{t\to\infty} (P\{Z(t) \ge ta\})^{1/t} = \inf\{\exp(g(\phi(s)) - sa) : s \in (0, s_1)\}$$

인 성질에 기초로 한다.

연구문제 3. 정리 3.2–3.3 에서와 같이, 정리 3.4–3.5 에서 주어진 확률과정의 증분에 대한 구간 길이 $c\log T$ 를 일반적인 함수 $\{k_T : 0 < T < \infty\}$, $0 < k_T \le T$ 로 확장하는 연구가 앞으로 요구되는 과제이다.

4. Csörgő-Révész의 증분 형태로의 발전

앞의 2 절과 3 절에 있는 정리들의 대부분이 그들의 확률과정의 증분에서 증분의 길이가 $[c\log N]$ 내지는 $c\log T$ 였음을 알 수 있다. 그러나 이것은 증분의 길이가 극히 제한된 형태이므로 보다 더 넓은 의미로 확장하여 생각할 필요가 있다. 예를들면, 정리 3.2 또는 정리 3.3 에서와 같이 비감소인 양의 함수 $\{k_T : T > 0\}$ 로 확장하여 새로운 결과들을 얻을 수 있듯이, 다른 정리들도 $\{k_T : T > 1\}$ 로 일반화하여 새로운 결과들을 얻는 것은 앞으로 남은 중요한 과제로 여겨진다. 관심있는 독자는 이러한 문제를 해결하면 좋은 결과들을 얻을 수 있을 것이다. 이 방면에 최초로 시도한 학자로서 Cşörgő 와 Révész [23] 의 뛰어난 작품이 그 중의 하나이다. 그들은 original Erdös-Rényi 의 새로운 강대수 법칙인 정리 2.1 에서 확률과정의 증분의 길이 $[c\log N]$ 을 일반적인 양의 정수 열 $\{a_n : n = 1, 2, \cdots\}$ 으로 확장하여 다음의 정리 4.1 을 얻었다.

이 결과를 흔히 Csörgő-Révész의 증분 형태의 정리라 일컫는다. 이 후 여러 방면에 걸쳐 많은 학자들의 연구 결과가 나왔다 ([33], [34], [35], [55], [56]).

$\{X_n : n \geq 1\}$을 iidrv's 의 열이라 하고, 그들의 평균은 0, 분산은 1이라 하자. 또, $\{a_n : n \geq 1\}$을 비감소인 정수들의 수열이라 하고 다음 조건을 만족한다고 하자.

$$\text{(i) } 1 \leq a_n \leq n, \qquad \text{(ii) } n/a_n \text{ 은 비감소이다.}$$

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad \beta_N = \{2a_N(\log(N/a_N) + \log\log N)\}^{-1/2}$$

이라 놓으면 다음 정리가 얻어진다.

정리 4.1. $|t| < t_0$ 에 대하여 $E\exp(tX_1) < \infty$이고, 조건 (i), (ii) 와 조건

$$\text{(iii) } \lim_{n\to\infty} n/a_n = \infty$$

을 만족하면, 다음 식이 성립한다.

$$\limsup_{N\to\infty} \max_{1\leq n\leq N-a_N} \max_{1\leq k\leq a_N} \beta_N|S_{n+k} - S_n| = 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.1}$$

$$\limsup_{N\to\infty} \max_{1\leq n\leq N-a_N} \beta_N|S_{n+a_N} - S_n| = 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.2}$$

$$\limsup_{N\to\infty} \max_{1\leq k\leq a_N} \beta_N|S_{N+k} - S_N| = 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.3}$$

더욱, 조건

$$\text{(iv) } \lim_{n\to\infty} (\log(n/a_n))/\log\log n = \infty$$

을 만족하면 다음 극한치를 얻는다.

$$\lim_{N\to\infty} \max_{1\leq n\leq N-a_N} \max_{1\leq k\leq a_N} \beta_N|S_{n+k} - S_n| = 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.4}$$

$$\lim_{N\to\infty} \max_{1\leq n\leq N-a_N} \beta_N|S_{n+a_N} - S_n| = 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.5}$$

위의 (4.5)에서 만일 $a_N = [c\log N]$, $c > 0$이면 다음의 Erdös-Rényi법칙

$$\lim_{N\to\infty} \max_{1\leq n\leq N-[c\log N]} \frac{S_{n+[c\log N]} - S_n}{[c\log N]} = \sqrt{2/c} \quad \text{a.s.}$$

을 얻는다. 여기서 유의할 점은 정리 2.1과 비교했을 때 $a = \sqrt{2/c}$ 인 사실이다. 이것은 $X_i \overset{iid}{\sim} N(0,1)$ 일 때 정리 2.1의 조건

$$(4.6) \qquad \exp(-1/c) = \inf\{\phi(t)\exp(-at) : t \in (0, t_1)\} = \rho(a)$$

로 부터 $a = \sqrt{2/c}$ 가 구해진 값과 일치한다. (4.6)으로 부터 $a = \sqrt{2/c}$ 가 구해진 이유는 다음과 같다.

$$\psi(t) := \phi(t)e^{-at}$$

는 strictly convex function 이므로 $\psi(\tau) = \inf\{\psi(t) : t \in (0, t_1)\}$ 인 τ 가 유일하게 존재한다. 따라서

$$\psi(t) = \phi(\tau)e^{-a\tau} = e^{\tau^2/2} \cdot e^{-a\tau} = e^{-1/c}$$

로 부터 $a = \phi'(\tau)/\phi(\tau)$ 이고 $a = \tau = \sqrt{2/c}$ 이다.

연구문제 4. 위의 (4.6) 으로 부터 구해진 $a = \sqrt{2/c}$ 는 Wiener 과정 및 Gauss 과정에 대해서 아주 중요한 의미가 있음을 나타내고자 한다. $X_1, X_2, \cdots$ 가 iidrv's 이고, $S_0 = 0, S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $\phi(t) = E(e^{tX_1}) < \infty$, $-\infty < t < \infty$ 일 때, Komlós-Major-Tusnády ([30], [31]) 는 다음 결과를 발표했다([52])(이 결과를 Komlós-Major-Tusnády 의 불변원리라 부른다).

$$(4.7) \qquad p > 2 \text{ 에 대해} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|S_n - W(n)|}{n^{1/p}} = 0 \quad \text{a.s.}$$

$$(4.8) \qquad \text{어떤 양수 } c \text{ 에 대해} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|S_n - W(n)|}{\log n} \le c \quad \text{a.s.}$$

이 사실은, $(\log n)^q \le a_n \le n^\varepsilon$ $(q > 2,\ 0 < \varepsilon < 1)$인 a_n에 대해

$$|S_n - W(n)| = o(a_n^{1/2}), \quad n \to \infty$$

을 의미하므로, 결국 부분합 증분과정에 대한 정리 4.1 이 Wiener 과정 및 더 나아가 Gauss 과정의 경우로 발전 가능함을 시사하는 중요한 내용을 함축하고 있다. 따라서 2절–4절의 많은 정리들도 이와 같은 관점에서 두고 볼 때 앞으로 남은 과제로서 해결해야 할 중요한 문제들로 생각된다.

연구문제 5. 정리 4.1 의 조건 (iii), (iv) 를 보면, 정수열 $\{a_n\}$에 대해 $a_n \approx n$ $(n \to \infty)$인 경우는 제외됨을 알 수 있다. 특히, $a_n = n$인 경우, 정리 4.1 의 결과는 다음의 이중대수 법칙(law of iterated logarithm)의 형태로 된다.

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{N\to\infty} \max_{1\le k\le N} \frac{|S_k|}{(2N\log\log N)^{1/2}} \\
&= \limsup_{N\to\infty} \frac{|S_N|}{(2N\log\log N)^{1/2}} \\
&= \limsup_{N\to\infty} \max_{1\le k\le N} \frac{|S_{N+k}-S_N|}{(2N\log\log N)^{1/2}} \\
&= 1 \quad \text{a.s.}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

따라서, 조건 (iii) 없이 (4.1)–(4.3) 을 얻고, 조건 (iv) 를

$$\text{(iv)}' \quad \lim_{n\to\infty} (\log(n/a_n))/\log\log n = r, \quad 0 \le r \le \infty$$

로 바꾸어 다음 하극한치를 얻을 수 있다면, 정리 4.1 의 결과가 훨씬 더 일반화 된다.

$$(4.4)' \qquad \liminf_{N\to\infty} \max_{1\le n\le N-a_N} \max_{1\le k\le a_N} \beta_N|S_{n+k}-S_n| = f(r) \quad \text{a.s.}$$

$$(4.5)' \qquad \liminf_{N\to\infty} \max_{1\le n\le N-a_N} \beta_N|S_{n+a_N}-S_n| = f(r) \quad \text{a.s.}$$

여기서 함수 $f(r)$은 $0 \le f(r) \le 1$이고 $\lim_{r\to\infty} f(r) = 1$이다.

특히, $r = \infty$ 일 때는 (4.1)–(4.3)와 (4.4)′–(4.5)′ 에 의해 (4.4)와 (4.5)가 구해진다. 이 연구논문에 있는 많은 정리들도 이와 같은 방법으로 확장이 가능하다. 관심 있는 독자는 이러한 문제들을 해결하면 좋은 결과를 얻을 것이다.

Csörgő-Révész [24]는 또한 iidrv's의 부분합의 증분이 얼마나 작은가? 에 대해 연구하였다. 그들은 Moguls'kii [43]의 소편차 확률정리를 이용함으로써 다음 결과를 증명하였다.

정리 4.2. $\{X_n : n \ge 1\}$을 iidrv's 의 열이라 하고 평균은 0, 분산은 1, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ 이라 하자. 또, $\{a_n : n \ge 1\}$ 이 비감소인 정수들의 수열이고, 조건

(i) $1 \le a_n \le n$,

(ii) n/a_n 은 비감소이다,

(iii) $\lim_{n\to\infty} n/a_n = \infty$

을 만족하면 다음 하극한치를 얻는다.

$$\liminf_{N\to\infty} \max_{1\le n\le N-a_N} \max_{1\le k\le a_N} \gamma_N|S_{n+k}-S_n| = 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.10}$$

여기서, $\gamma_N = \{8(\log(N/a_N)+\log\log N)/(\pi^2 a_N)\}^{-1/2}$ 이다.

더욱, 다음조건

(iv) $\lim_{n\to\infty}(\log(n/a_n))/\log\log n = \infty$

이 주어지면, 극한치

$$\lim_{N\to\infty} \min_{1\le n\le N-a_N} \max_{1\le k\le a_N} \gamma_N|S_{n+k}-S_n| = 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.11}$$

가 구해진다.

다음은, 독립이지만 동일 분포가 아닌 분포의 경우에 대해서 Shao [55]는 위의 정리 4.2를 다음과 같이 발전시켰다.

정리 4.3. $\{X_n : n \ge 1\}$ 을 독립 확률변수들의 열이라 하고 $EX_n = 0$, $EX_n^2 \ge C_0 > 0$, $n \ge 1$ 이라 하자. 또, $\{X_n^2 : n \ge 1\}$ 은 일양적분가능(uniformly integrable)이라 한다. $\{a_n : n \ge 1\}$ 이 정수들의 수열이고, 조건

(i) $1 \le a_n \le n$, (ii) $\lim_{n\to\infty} a_n/\log n = \infty$

을 만족하면 다음 하극한치를 얻는다.

$$\liminf_{N\to\infty} \min_{1\le n\le N} \max_{1\le k\le a_N} \gamma_{nN}|S_{n+k}-S_n| = 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.12}$$

$$\liminf_{N\to\infty} \min_{1\le k\le a_N} \gamma_{NN}|S_{N+k}-S_N| = 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.13}$$

여기서, $\gamma_{nN} = \{8(\log(N/a_N) + \log\log N)/(\pi^2\sigma^2_{na_N})\}^{-1/2}$ 이고 $\sigma^2_{nk} = \sum_{i=n+1}^{n+k} EX_i^2$ 이다. 더욱, 다음 조건

$$\text{(iii)} \quad \lim_{n\to\infty} (\log(n/a_n))/\log\log n = \infty$$

을 만족하면, 극한치

$$\lim_{N\to\infty} \min_{1\le n\le N} \max_{1\le k\le a_N} \gamma_{nN}|S_{n+k} - S_n| = 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.14}$$

를 얻는다.

한편, Hanson 과 Russo [29]는 다음과 같이 iidrv's 의 또 다른 형태의 부분합 증분, 소위 지연합(lag sums)을 생각했다. 여기서

$$d(N,k) = \{2k(\log(N/k) + \log\log k)\}^{-1/2}$$

라 두자. 그들은 다음 정리를 증명했다.

정리 4.4. $\{X_n : n \ge 1\}$ 을 iidrv's 의 열이라 하고 평균은 0, 분산은 1, $S_0 = 0, S_n = X_1 + \cdots + X_n$ 이라 하자. 또, $\{a_n : n \ge 1\}$이 비감소인 정수들의 수열이고, 조건

$$\text{(i)}\ 1 \le a_n \le n, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} n/a_n = \infty$$

을 만족한다고 하자. 만일 $\{X_n\}$의 적률생성함수가 존재하면 다음이 성립한다.

$$\limsup_{N\to\infty} \max_{1\le k\le a_N} |S_N - S_{N-k}|/d(N,k) = 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.15}$$

$$\limsup_{N\to\infty} \max_{a_N\le k\le N} \max_{1\le j\le k} |S_N - S_{N-j}|/d(N,k) = 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.16}$$

$$\limsup_{N\to\infty} \max_{0\le m<n\le N} \max_{a_N\le n-m} |S_n - S_m|/d(n,n-m) = 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.17}$$

lag sum 을 조사하게 된 동기는 특별한 통계적 문제로부터 나왔다. 표본 $X_1, \cdots, X_N$ 에 의해 모평균을 추정할 때, $X_1, \cdots, X_k$ $(1 \le k < a_N \le N)$에

서 보통 bias가 있다고 하면 이들을 버림으로써 bias를 줄일 수 있다고 생각할 수 있다. 이와같은 장면에서, 최초로 Hanson 과 Russo [29]는 위의 정리를 얻게 되었다. 그 후 Lin [34]은 독립이지만 non-identical 분포에 대해서 정리 4.4를 improve 한 형태로서 다음 정리를 증명했다.

$\{X_n : n \geq 1\}$ 을 독립 확률변수들의 열이라 하고 $EX_n = 0$이라 하자. $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $\sigma_n^2 = EX_n^2$, $\sigma_{nk}^2 = \sum_{i=n-k+1}^{n} \sigma_i^2$,

$$g(N,k) = \sigma_{Nk}\{2(\log(N/k) + \log\log k)\}^{-1/2}$$

이라 놓자. 그러면 다음 정리를 얻는다.

정리 4.5. $\{X_n : n \geq 1\}$ 은 다음조건을 만족한다고 하자.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{m\geq 0} \inf \sum_{i=m+1}^{m+n} \sigma_i^2/n > 0$,

(ii) $r > 2$ 인 r이 존재하고 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n^r| > \varepsilon_n\} < \infty$$

이고,

(iii) 모든 $s < r$ 에 대해 $E|X_n|^s < \infty$, $n \geq 1$이다.

그러면, 양수 d 에 대해 다음의 상극한이 얻어진다.

$$\limsup_{N\to\infty} \max_{dN^{2/r}/\log N \leq k \leq N} |S_N - S_{N-k}|/g(N,k) = 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.18}$$

$$\limsup_{N\to\infty} \max_{dN^{2/r}/\log N \leq k \leq N} \max_{1\leq j\leq k} |S_N - S_{N-k}|/g(N,k) = 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.19}$$

최근에 Lin과 Lu [41]는 mixing 종속확률변수들에 대해서 정리 4.1을 다음의 정리 4.6 으로 발전시켰다. 어떤 종속 mixing 조건을 갖는 확률변수열 $\{X_n : n \geq 1\}$ 은, n이 충분히 클 때 $\{X_1, \cdots, X_k\}$ 와 $\{X_{k+n}, X_{k+n+1}, \cdots\}$ 이 근사적으로 독립 (약한 독립)임을 의미한다. $\{X_n : n \geq 1\}$ 을 확률공간 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 상의 확률변수들의 열이라 하고, $\{X_n\}$ 에 의해 생성된 σ-field를

$\mathcal{F}_a^b = \sigma\ (X_i, a \leq i \leq b) \subset \mathcal{F}$ 로 나타내자. 또 $L_p(\mathcal{F}) = \{X \in \mathcal{F} : E|X|^p < \infty\}$로 쓴다. 만약

$$a_n := \sup_{k\geq 1} \sup_{A\in\mathcal{F}_1^k, B\in\mathcal{F}_{n+n}^\infty} |P(A\cap B) - P(A)P(B)| \to 0, \quad n\to\infty$$

이면 $\{X_n\}$을 α-**mixing** 혹은 **strong mixing**이라 부른다. 만약

$$\varphi_n := \sup_{k\geq 1} \sup_{A\in\mathcal{F}_1^k, B\in\mathcal{F}_{n+n}^\infty, P(A)>0} |P(A|B) - P(B)| \to 0, \quad n\to\infty$$

이면 $\{X_n\}$을 φ-**mixing** 혹은 **uniformly strong mixing**이라 부른다. 또 만약

$$\rho_n := \sup_{k\geq 1} \sup_{X\in L_2(\mathcal{F}_1^k), Y\in L_2(\mathcal{F}_{k+n}^\infty)} \frac{|\mathrm{Cov}(X,Y)|}{\{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)\}^{1/2}} \to 0, \quad n\to\infty$$

이면 $\{X_n\}$을 ρ-**mixing** 이라 부른다. 여기서

$$\alpha_n \leq \rho_n \leq 2\varphi_n^{1/2}$$

이 증명되어 있다. 따라서

$$\varphi\text{-mixing} \Rightarrow \rho\text{-mixing} \Rightarrow \alpha\text{-mixing}$$

인 사실로부터 φ-mixing 이 제일 강한 조건임을 알 수 있다.

정리 4.6. $\{X_n : n \geq 1\}$ 을 정상(stationary) φ-mixing 확률변수들의 열이라 하고, $\sigma^2(n) = ES_n^2$, $E\exp(tX_1) < \infty$, $|t| < t_0$ 라 하자. 또, 어떤 양수 l 에 대해 $\rho_n = O(n^{-l}), n\to\infty$ 이라 한다. $\{a_n : n \geq 1\}$ 을 비감소인 정수들의 수열이라 하고, 어떤 양수 b 와 $d > (3l+1)/(l-1)$ 에 대해 $b(\log n)^d \leq a_n \leq n$ 이면, 다음 상극한을 얻는다.

$$\begin{aligned}
&\limsup_{N\to\infty} \max_{1\leq n\leq N} \max_{1\leq k\leq a_N} \frac{|S_{n+k} - S_n|}{\sigma(a_N)\beta_1(N)} \\
=&\limsup_{N\to\infty} \frac{|S_{N+a_N} - S_N|}{\sigma(a_N)\beta_1(N)} \\
=&1 \quad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

여기서, $\beta_1(N) = \{2(\log(N/\sigma^2(a_N)) + \log\log N)\}^{1/2}$ 이다.

연구문제 6. $X_1, X_2, \cdots$ 가 iidrv's 이거나, 독립이지만 동일분포가 아닌 확률변수들인 경우의 정리 4.2–4.5를, 정리 4.6의 증명방법을 기초로 하여, 정리 4.6과 같이 mixing 조건하에서의 새로운 결과들을 얻을 수 있을 것으로 추측된다.

5. 종속 Gauss 열에 관한 Erdös-Rényi 형 법칙

연구문제 4에서 지적한 바와 같이, Komlós-Major-Tsunády 의 불변원리(invariance principle)에 의해 iidrv's 의 부분합 과정 S_n 은 Wiener 과정 $W(n)$ 에 근사하므로, Erdös-Rényi 형 법칙이나 더 발전된 Csörgő-Révész 의 증분형태로의 수렴에 관한 정리들은 모두 Wiener 과정 및 더 나아가 정상(stationary) Gauss 과정에 관한 극한 정리들로 집약될 수 있다. 따라서 독립 확률변수들에 관한 2절-4절의 많은 결과들은 종속 mixing 조건이 부 여된 정상 Gauss 확률변수들의 경우로 발전될 수 있다. 결국 상관함수가 주어진 정상 Gauss 열에 관한 극한정리들은, Komlós-Major-Tsunády 의 불변원리에 의해 독립 확률변수들에 대한 대응하는 정리들을 포함할 수 있다는 의미가 된다.

이 절에서는 정리 4.6 의 φ-mixing 조건보다 더 약한 ρ-mixing 조건을 쓰거나 상관함수 ρ_n 이 $-1 < \rho_n < 1$일 때 정상 Gauss 확률변수들에 관해, 최근에 본 연구자에 의해 이미 증명된 몇 가지 새로운 정리들 및 관련된 결과들을 소개하고자 한다. $X_1, X_2, \cdots$ 를 확률공간 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 상에 정의된 정상 Gauss 확률변수들이라 하고 $EX_1 = 0, EX_1^2 = 1, \rho_n = E(X_1X_{1+n}), n \geq 1$ 이라 하자. 또, $S_0 = 0, S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $\sigma(n) = \sqrt{ES_n^2} \to \infty, n \to \infty$ 이라 가정한다. Choi [6]는 original Erdös-Rényi 법칙인 정리 2.1과 유사한, 종속 ρ-mixing 조건이 주어진 다음 정리를 증명했다.

정리 5.1. $\{X_n : n \geq 1\}$ 의 상관함수 ρ_n 이

(i) $\rho_n \leq 0, \quad n = 1, 2, \cdots$

이거나, 아니면 ρ-mixing 조건이

(ii) 어떤 양수 ν 에 대해 $\rho_n = o(n^{-\nu}),\ n \to \infty$

로 주어질 때, 각각의 양수 c 에 대해 다음 식이 성립한다.

$$\text{(5.1)} \qquad \lim_{N\to\infty} \max_{0\le n\le N-[c\log N]} \frac{|S_{n+[c\log N]} - S_n|}{\sqrt{[c\log N]}\sigma([c\log N])} = \sqrt{2/c} \quad \text{a.s.}$$

주의 1. (1) 위의 조건 (i), (ii)에서 상관함수 $\rho_n = 0$ 이 포함되므로 2절-4절에 나오는, 확률변수 열 $\{X_n : n \ge 1\}$ 의 독립인 조건은 여기서 이미 포함되어 있음에 유의하자.

(2) 상관함수 ρ_n을 갖는 위의 정상 Gauss 열 $\{X_n : n \ge 1\}$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
\sigma(n) &= \sqrt{ES_n^2} = \{EX_1^2 + \cdots + EX_n^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} E(X_iX_j)\}^{1/2} \\
&= \{n + 2(\rho_1 + \cdots + \rho_{n-2} + \rho_{n-1} \\
&\qquad + \rho_1 + \cdots + \rho_{n-2} + \rho_1)\}^{1/2} \qquad \text{(5.2)} \\
&= \{n + 2((n-1)\rho_1 + (n-2)\rho_2 + \cdots + \rho_{n-1})\}^{1/2} \\
&= \{n + 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\rho_i\}^{1/2}
\end{aligned}$$

따라서, $i = 1, \cdots, n-1$에 대해서 $\rho_i = 1$이면 $\sigma(n) = n$ 이고, $\rho_i = 0$ 이면 $\sigma(n) = \sqrt{n}$ 이다. 또, $0 < \rho_i < 1$ 이면 $\sqrt{n} < \sigma(n) < n$ 이고, 이 경우에

$$\text{(5.3)} \qquad \sigma(n) = n^{\alpha}L(n), \quad 1/2 < \alpha < 1$$

로 둘 수 있다. 여기서 $L(n)$은 ∞에서 양의 **완변화함수(slowly varying function)**이고 다음과 같이 정의된 함수이다. 각각의 $x > 0$ 에 대해

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(xt)}{L(t)} = 1$$

이다. 한편 ρ_i 가 음인 경우, 더 구체적으로 말하면 $1 \le i \le n-1$ 에 대해 $-1/(n-1) \le \rho_i < 0$이면 $0 \le \sigma(n) < \sqrt{n}$임을 밝힐 수 있다. 따라서

$$\text{(5.4)} \qquad \sigma(n) = n^{\alpha}L(n), \quad 0 < \alpha < 1/2$$

으로 둘 수 있다. (5.3) 과 (5.4)를 결합하면 $1 \le i \le n-1$ 에 대해서 상관함수 ρ_i가 $-1/(n-1) \le \rho_i < 1$ 일 때

$$\sigma(n) = n^{\alpha} L(n), \quad 0 < \alpha < 1 \tag{5.5}$$

이라 놓아도 좋다. (5.5)와 같은 $\sigma(n)$을 지수 α 를 갖는 **정칙변화함수**(regularly varying function)라 부른다. 이후 Gauss 확률과정 $\{X(t) : 0 < t < \infty\}$ 에 대해서도

$$\sigma(t) = t^{\alpha} L(t), \quad 0 < \alpha < 1 \tag{5.6}$$

로 가정할 것이다.

(3) 정리 5.1의 조건 (i), (ii)에서 $\rho_n = 0$ $(n \ge 1)$ 이면 $\{X_n : n \ge 1\}$ 은 iid Gaussian rv's 이 되고, 동시에 주의 1의 (2)에 의해 $\sigma([c \log N]) = \sqrt{[c \log N]}$ 이 되며 (5.1)의 분모는 $[c \log N]$ 으로 바뀌면서 정리 2.1의 결과가 나온다.

연구문제 7. 정리 5.1에서 ρ-mixing 의 조건 (ii)보다 더 약한조건, 예를 들면 어떤 $\nu > 0$에 대해 $\rho_n = o((\log n)^{-\nu})$, $n \to \infty$ 인 조건 혹은 더 일반적인 조건 $\rho_n \to 0$, $n \to \infty$ 아니면 α-mixing 조건 등을 써서 (5.1)을 증명할 수 있을까? 더 나아가 음의 조건(i) 대신에 양의 조건 $\rho_n > 0$ $(n \ge 1)$을 써서 (5.1)을 얻을 수 있다면 더 좋은 결과가 될 것이다.

Choi [6]는 또한 정리 5.1에서 부분합 증분 $[c \log N]$ 을 포함하여 $[c \log N]$ 보다 더 느리거나 약간 더 빠른 증분의 양의 정수들의 집합 $\{a_N : N \ge 1\}$ 에 대해서 다음과 같이 일반화했다.

정리 5.2. 양의 정수 열 $\{a_n : n \ge 1\}$ 이 다음 조건을 만족한다고 하자.

(i) a_n 은 증가이다,

(ii) 모든 $\zeta > 0$ 에 대해 $\lim_{n \to \infty} a_n / n^{\zeta} = 0$ 이다,

(iii) 어떤 $\zeta_0 > 0$ 에 대해 $a_n / n^{\zeta_0} = 0$ 는 감소이다.

상관함수 ρ_n 은 정리 5.1의 조건과 같고, $\sigma(n)$ 이 ∞ 에서 지수 α $(0 < \alpha < 1)$를 갖는 정칙변화함수일 때 다음 식이 성립한다.

$$(5.7)\qquad \lim_{N\to\infty} \max_{0\le n\le N-a_N} \frac{S_{n+a_N}-S_n}{\sqrt{2\log N}\sigma(a_N)} = 1 \quad \text{a.s.}$$

정리 5.2의 양의 정수 열 $\{a_n\}$ 에 관한 조건을 완화하기 위해 4절에서 언급한 바와 같이 정리 5.2를 Csörgő-Révész 의 증분형태로 발전시킬 수 있다. 최근에 본 연구자에 의해 증명된 몇 가지 정리들을 소개하고자 한다. 증명은 지면 분량 관계로 여기서는 생략하고 이후에 본 연구가 확률론 전문 학술지에 출간되면 참고하길 바란다. 다음은 이 절의 끝까지 앞으로 계속해서 사용할 가정이다: $\{X_n : n\ge 1\}$ 을 정상 Gauss 확률변수들이라 하고 $EX_1=0$, $EX_1^2=1$, $\rho_n = E(X_1X_{1+n})$, $n\ge 1$ 이라 하자. 또, $S_0=0$, $S_n = X_1+\cdots+X_n$, $\sigma(n)=\sqrt{ES_n^2}$ 이라 두자. 여기서 $\sigma(n)$ 은 ∞ 에서 지수 α $(0<\alpha<1)$ 를 갖는 증가인 정칙변화 함수로 가정한다. 양의 정수 열 $\{a_n : n\ge 1\}$ 이 다음 조건을 만족한다고 한다.

(i) a_n 은 비감소이다, (ii) $1\le a_n\le n$.

편리하게 하기 위해, 다음과 같이 나타내자.

$$(5.8)\qquad \begin{aligned} \beta(n) &= \{2(\log(n/a_n)+\log\log n)\}^{1/2}, \quad n>e, \\ G_1(n) &= \max_{0\le i\le n} |S_{i+a_n}-S_i|/\sigma(a_n), \\ G_2(n) &= \max_{0\le i\le n}\max_{1\le j\le a_n} |S_{i+j}-S_i|/\sigma(a_n) \end{aligned}$$

정리 5.3. 다음 부등식이 성립한다.

$$(5.9)\qquad \limsup_{N\to\infty} \frac{G_2(N)}{\beta(N)} \le 1 \quad \text{a.s.}$$

예를들면, $a_n = 1, [\log n]$, $[n^\tau]$ $(0<\tau<1)$, $[n/(\log n)^\gamma]$ $(0<\gamma<1)$, $[cn]$ $(0<c\le 1)$ 그리고 $n\to\infty$ 일 때 $a_n = o(n^\zeta)$ (ζ는 임의의 양수) 등으로 많은 종류의 정수들을 생각할 수 있다. 그래서, 조건 (i)과 (ii)는 정리 5.2의 a_n 에 관한 조건들보다 약하다. 정리 5.3을 증명하기 위해서는 기존의 증명방법

과는 달리 다음의 Fernigue 보조정리 [28]와 응용된 보조정리가 필요하다 ([7] 참조).

D 는 $\mathbb{R}^N(N \geq 1)$ 의 compact 부분집합이고 유클릿트 norm $\|\cdot\|$ 을 갖는다고 하자. 또, $\{X(t) : t \in D\}$ 는 실가, separable 중심 Gauss 과정이고 증분의 분산이 $E\{X(t) - X(s)\}^2 =: \sigma^2(\|t-s\|)$ 이며 $0 < \Gamma := \sup_{t\in D}\{E(X(t))^2\}^{1/2} < \infty$, $\sigma(h) \leq \varphi(h)$ 라 하자. 여기서 $\varphi(h)$ 는 비감소인 연속함수이다. D 의 Lebesque 측도를 $m(D)$ 로 쓰자. 이 경우, 다음의 일반화된 Fernique 보조정리가 필자에 의해 증명되었다.

보조정리 5.1. $\lambda > 0$, $x \geq 1$, $B > (2\sqrt{2}+2)\sqrt{2N\log 2}$ 에 대해서 다음 부등식이 성립한다.

$$P\Big\{\sup_{t\in D} X(t) > x(\Gamma + B\int_0^\infty \varphi(\sqrt{N}\lambda 2^{-y^2})dy)\Big\} \leq c\frac{m(D)}{\lambda^N}\cdot\frac{1}{x}\exp(-x^2/2)$$

여기서, c 는 양의 상수이다.

보조정리 5.1을 이용하면, 정리 5.3의 증명에 긴요한 다음 보조정리 5.2 를 얻는다. $\theta > 1, k \geq 1, l \geq 1$ 에 대해서

$$D_{kl} = \{(i,j); 0 \leq i \leq \theta^k, 1 \leq j \leq \theta^l\}$$

이라 놓자.

보조정리 5.2. 임의의 양수 ε 과 $u > 0$ 에 대해, ε 에 의존하는 상수 $c = c(\varepsilon)$이 존재하고

$$P\Big\{\sup_{(i,j)\in D_{kl}} \frac{S_{i+j} - S_i}{\sigma(\theta^l)} \geq u\Big\} \leq c\theta^{k-l}\frac{1}{u}\exp\Big(-\frac{u^2}{2+\varepsilon}\Big)$$

이다.

다음엔 하극한에 대한 부등식을 얻고자 한다.

정리 5.4. 양의 정수 열 $\{a_n : n \geq 1\}$ 이 다음 조건

(i) a_n 은 비감소이다,

(ii) $1 \leq a_n \leq n$,

(iii) $\lim_{n\to\infty}(\log(n/a_n))/\log\log n = \infty$ 을 만족한다고 하자. 또, 상관함수 ρ_n $(n \geq 1)$ 에 관해서 다음 둘 중 어느 하나가 성립한다고 하자.

(iv) $\rho_n \leq 0$,

(v) $|\rho_n| \leq \sigma^2(n)/n^2$.

그러면

$$\liminf_{N\to\infty} G_1(N)/\beta(N) \geq 1 \quad \text{a.s.}$$

이다.

조건 (iv)하에서 정리 5.4를 증명하기 위해서는 다음의 Slepian 보조정리 [46] 가 필요하다.

보조정리 5.3. $\{V_i : i = 1, \cdots, n\}$ 와 $\{W_i : i = 1, \cdots, n\}$ 가 각각 표준화 정규분포 확률변수들이고

$$\mathrm{Cov}(V_i, V_j) \leq \ \mathrm{Cov}(W_i, W_j), \quad i \neq j$$

이면, 임의의 실수 $u_i (i = 1, \cdots, n)$ 에 대해

$$P\{V_i \leq u_i : i = 1, \cdots, n\} \leq P\{W_i \leq u_i, i = 1, \cdots, n\}$$

이고

$$P\{V_i \geq u_i : i = 1, \cdots, n\} \leq P\{W_i \geq u_i, i = 1, \cdots, n\}$$

이다.

조건 (v)하에서 정리 5.4를 증명하기 위해서는 다음의 두 보조정리가 필수적이다.

보조정리 5.4. [32] $\{X_i : i = 1, 2, \cdots, n\}$가 표준화 정규분포 확률변수들이고 $\delta := \max_{i\neq j}|\mathrm{Cov}(X_i, X_j)| < 1$ 이라 하자. 그러면, 임의의 실수 u 와 정수들의 부분열 $1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_k \leq n$ $(k \leq n)$ 에 대해 다음 부등식이 성립한다.

$$P\{\max_{1\leq i\leq k} X_{l_i} \leq u\} \leq (1 - \Phi(u))^k + c \sum_{1\leq i<j\leq k} |\rho_{ij}| \exp\Big(-\frac{u^2}{1 + |\rho_{ij}|}\Big)$$

여기서, $\rho_{ij} = \mathrm{Cov}(X_{l_i}, X_{l_j})$ 이고 $c = c(\delta)$ 는 δ 에 의존하는 상수이며 $\Phi(u) = P\{X_i \geq u\}, i = 1, \cdots, n$ 를 나타낸다.

보조정리 5.5. [7] 보조정리 5.4의 조건에 덧붙여 어떤 양수 ν 에 대해 $|\rho_{ij}| < |i-j|^{-\nu}, i \neq j$ 라 가정하자. 또 $0 < \eta < (1-\delta)\nu/(1+\nu+\delta)$ 인 η 에 대해 $u = \{(2-\eta)\log k\}^{1/2}$ 라 두면,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} |\rho_{ij}| \exp\Big(-\frac{u^2}{1+|\rho_{ij}|}\Big) \leq ck^{-\delta_0}$$

이다. 여기서,

$$\delta_0 = \{\nu(1-\delta) - \eta(1+\delta+\nu)\}/\{(1+\nu)(1+\delta)\} > 0$$

이고, c 는 n, u 와 무관계한 상수이다.

정리 5.3 과 정리 5.4 를 결합하면 다음 따름정리를 얻을 수 있다.

따름정리 5.1. 정리 5.4의 가정하에서 다음 극한치를 얻는다.

$$\lim_{N\to\infty} G_1(N)/\beta(N) = \lim_{N\to\infty} G_2(N)/\beta(N) = 1 \quad \text{a.s.}$$

주의 2. (1) 앞의 (5.5) 에서 정의된 정칙 변화함수 $\sigma(n)$은 $0 \leq \sigma(n) < n$ 인 범위를 가지므로 정리 5.4의 가정 (v)는 곧 $-1 < \rho_n < 1$ 을 의미한다. 이것은 $\rho_n = \pm 1$ 을 제외한 상관계수 ρ_n 이 취할 수 있는 전체영역이므로 (v)는 아주 일반적인 조건이라 볼 수 있다. 따라서 정리 5.4와 따름정리 5.1은 사실상 조건 (iv)와 (v)가 없어도 성립할 수 있다는 가능성을 내포하고 있다.

(2) 정리 5.4 의 $\{a_n\}$ 에 관한 Csörgő-Révész 의 조건 (정리 4.1 참조)은 정리 5.2 의 조건 (i)-(iii)을 포함하므로 정리 5.1 과 정리 5.2 는 따름정리 5.1 의 따름정리로 바뀐다.

(3) 확률과정 $\{Y(t) : 0 \leq t < \infty\}$ 를 $Y(0) = 0$, $EY(t) = 0$ 인 위수 2α $(0 < \alpha < 1)$ 의 fractional Brownian motion 이라 하고, 그 공분산은

$$E\{Y(t)Y(s)\} = \frac{1}{2}(|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - |t-s|^{2\alpha}\}, \quad 0 < \alpha < 1$$

으로 주어진다고 하자. 그러면

$$E\{Y(t)-Y(s)\}^2 = |t-s|^{2\alpha} \tag{5.10}$$

가 된다. 특히, $n \geq 1$ 에 대해 $X_n = Y(n) - Y(n-1)$, $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ 이라 두면, $E(S_n^2) = E(Y(n))^2 = n^{2\alpha}$ 이고, $\{X_n : n \geq 1\}$ 은 $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$ 인 정상 Gauss 확률변수들의 열이 된다. $0 < \alpha \leq 1/2$ 이면 조건 (iv)를 만족하고 $1/2 < \alpha < 1$이면 조건 (v)를 만족한다. 따라서 따름정리 5.1은 모든 fractional Brownian motion에 적용가능하다.

연구문제 8. Steinebach [53] 또는 Chan [4]에 의해 소개된, multi-dimensional indices 를 갖는 iiidrv's 의 부분합 과정의 구조와 같이 따름정리 5.1이 multi-dimensional indices 를 갖는 경우로 그 확장이 가능하다. 또한 본 연구논문에서 나타나는 많은 결과들도 multi- dimensional indices (연속 확률과정에서는 multi-parameters)의 경우로 그 확장이 가능하다고 본다(정리 6.7과 정리 6.8 참조).

연구문제 9. 연속 Gauss 과정 $\{X_t : -\infty < t < \infty\}$ 의 경우는 따름정리 5.1의 결과가 어떻게 바뀔까? 좀 더 구체적으로 말하면, $\{X_t : -\infty < t < \infty\}$ 를 연속인 중심 정상 Gauss 과정이라 하고 $EX_t^2 = 1$, $\sigma^2(t) = E(X_t - X_0)^2$ 이라 두자([32] 참조). 또, 상관함수 $\rho_t = E(X_0 X_t)$ 는 다음 두 조건 중의 하나를 만족한다고 하자.

(i) $t > 0$ 에 대해 ρ_t 는 CONVEX 이다,

(ii) 어떤 양수 ν 에 대해 $\rho_t = o(t^{-\nu})$, $t \to \infty$ 이다.

$a_T (0 < T < \infty)$ 를 T 의 비감소 함수라 하고 다음 조건을 만족한다고 가정하자.

(iii) $0 < a_T \leq T$,

(iv) $\lim_{T\to\infty} (\log(T/a_T))/\log\log T = \infty$.

이 경우, 정리 5.4의 결론과 유사한 결과를 얻을 수 있을 것이고, 위의조건 (i), (ii), (iv)가 없이 정리 5.3 과 유사한 결과를 얻을 수 있을 것으로 추측된다. 증명방법의 흐름도 거의 비슷하리라 본다. 참고로 위의 조건 (i)과 (ii)는 정리 5.4 의 조건 (iv)와 (v)에 각각 대응되는 조건들이다.

다음은 부등식 (5.9)와 반대방향인 부등식을 얻고자 한다. 이 경우는 정리 5.3에 없는 조건이 더 추가된다.

정리 5.5. 양의 정수 열 $\{a_n : n \geq 1\}$ 이 다음 조건을 만족한다고 하자.

(i) a_n 은 비감소이다,

(ii) $1 \leq a_n \leq n$,

(iii) n/a_n 은 비감소이다.

상관함수 $\rho_n(n \geq 1)$ 에 관해 $|\rho_n| \leq \sigma^2(n)/n^2$ 이면

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|S_N - S_{N-a_N}|}{\sigma(a_N)\beta(N)} \geq 1 \quad \text{a.s.} \tag{5.11}$$

이다.

정리 5.5를 증명하기 위해서는 다음의 잘 알려진 second Borel-Cantelli 보조정리를 잘 활용하면 된다.

보조정리 5.6. 확률공간 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 에서 $A_k \in \mathcal{F}(k = 1, 2, \cdots)$ 라 하자. 만약

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty$,

(ii) $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} \sum_{1\leq j<k\leq n} \frac{P(A_j \cap A_k) - P(A_j)P(A_k)}{\left(\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right)^2} \leq 0$

이면

$$P(\limsup_{k\to\infty} A_k) = 1$$

이다.

정리 5.3 과 정리 5.5 를 결합하면 다음 상극한치를 얻는다.

따름정리 5.2. 정리 5.5 의 조건하에서 다음식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
&\limsup_{N\to\infty} \frac{|S_N - S_{N-a_N}|}{\sigma(a_N)\beta(N)} \\
(5.12)\qquad &= \limsup_{N\to\infty} \frac{G_i(N)}{\beta(N)} = 1,\ i = 1,2 \quad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

따름정리 5.2 는 종속 확률변수에 관한 이중대수의 법칙을 포함하는 혁기적인 결과로 보아진다. 사실 따름정리 5.2 에서 $a_N = N$ 인 경우는 다음의 이중대수의 법칙

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|S_N|}{\sigma(N)\sqrt{2\log\log N}} = 1, \quad \text{a.s.}$$

이 포함되고, 이것은 Orey [44]에 의해 이미 증명되었다.

따름정리 5.2 에서는 비교적 약한 조건하에서 상극한에 대한 정리를 찾은 결과이지만, $\{a_n\}$ 에 관한 적당한 조건하에서 하극한에 대한 정리를 얻게 된다면 참으로 좋은 결과가 될 것이다. 이를 위해, 연구문제 5 에서 언급한 조건 (iv)$'$를 써서 (4.4)$'$, (4.5)$'$ 와 유사한 결과를 얻고자 한다.

정리 5.6. 양의 정수열 $\{a_n : n \geq 1\}$이 다음 조건을 만족한다고 하자.

(i) a_n 은 비감소이다,

(ii) $1 \leq a_n \leq n$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} (\log(n/a_n))/\log\log n = r, \quad 0 \leq r \leq \infty.$

그러면, 다음 부등식을 얻는다.

$$\liminf_{N\to\infty} G_2(N)/\beta(N) \leq \sqrt{\frac{r}{1+r}} \quad \text{a.s.} \tag{5.13}$$

위의 정리를 증명하기 위해서는 보조정리 5.2 와 유사한 다음 보조정리 5.7 과 또 하나의 보조정리 5.8 이 필요하다.

보조정리 5.7. 임의의 양수 ε 과 $u > 0$ 에 대해, ε 에 의존하는 상수 $c = c(\varepsilon)$ 이 존재하고

$$P\{G_2(n) \geq u\} \leq c\frac{n}{a_n u}\exp\left(-\frac{u^2}{2+\varepsilon}\right)$$

이다.

다음 보조정리는 쉽게 증명된다.

보조정리 5.8. $\{X, X_n : n \geq 1\}$ 을 확률변수들의 열이라 하자. 만약

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n \geq X\} = 0$$

이면, $\{X_n : n \geq 1\}$ 의 부분열 $\{X_{n_k} : k \geq 1\}$가 존재하고

$$\limsup_{k\to\infty}\ X_{n_k} \leq X \quad \text{a.s.}$$

이다. 따라서

$$\liminf_{n\to\infty}\ X_n \leq X \quad \text{a.s.}$$

이번에는 (5.13) 과 반대 방향인 부등식을 얻고자 한다. 이 경우는 정리 5.4 의 조건 (iv), (v)가 추가된다.

정리 5.7. 양의 정수열 $\{a_n\}$ 은 정리 5.6 의 가정과 같고, 상관함수 ρ_n 은 정리 5.4 의 조건 (iv), (v)와 같이 주어진다고 하자. 그러면, 다음 부등식이 성립한다.

$$\liminf_{N\to\infty} G_1(N)/\beta(N) \geq \sqrt{\frac{r}{1+r}} \quad \text{a.s.} \tag{5.14}$$

정리 5.7 을 증명하기 위해서는 보조정리 5.2–5.5 가 필요하다. 증명방법은 정리 5.4 의 증명과 유사하나 특별한 주의가 요구되는 부분들이 있다. 정리 5.6 과 정리 5.7 을 결합하면 다음 따름정리를 얻는다.

따름정리 5.3. 정리 5.7 의 조건하에서 다음 하극한치가 구해진다. $0 \le r \le \infty$ 에 대해

$$\liminf_{N\to\infty} G_i(N)/\beta(N) = \sqrt{\frac{r}{1+r}}, \quad i=1,2 \quad \text{a.s.} \tag{5.15}$$

주의 3. 앞의 (5.12)와 (5.15)를 비교하면 $0 \le r < \infty$ 일 때는 $G_i(N)$ / $\beta(N)$ $(i=1,2)$ 의 상극한치와 하극한치가 다르게 나타나지만, $r=\infty$ 일 때는 극한치가 이 되고 따름정리 5.1 이 얻어진다.

6. 연속 Gauss 과정의 극한정리

제 5절의 주의 2의 (3)에서 밝혔듯이 정상 Gauss 열 $\{X_n : n \ge 1\}$ 의 부분합은 연속 확률과정인 fractional Brownian motion 의 경우로 그 확장이 가능하므로, 이 절에서는 fractional Brownian motion 의 경우보다 더 넓은 의미의 연속 Gauss 과정에 대해서 앞 절의 몇몇 정리들을 일반화 하려고 한다. 이 절의 내용의 대부분은 필자가 평소 제자들과의 세미나를 통하여 얻어진 새로운 결과들로서 최근 필자에 의해 편찬된 확률론 국제 전문 학술지 "Stochastic Analysis and Applications" (Nova Science Publishers, Inc.)에 투고된 논문들을 몇 개만 간략히 소개하고자 한다.

확률과정 $\{X(t) : t \in [0,\infty)\}$ 를 실가, 연속인 중심 Gauss 과정이라 하고 $X(0)=0$, $E\{X(t)-X(s)\}^2 =: \sigma^2(|t-s|)$ 라 하자. 여기서 $\sigma(t)$ 는 0 과 ∞ 에서 지수 α $(0<\alpha<1)$ 를 갖는 비 감소 정칙 변화함수이다((5.6) 참조). 또, $\{X^d(t) = X_1(t), \cdots, X_d(t) \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,\infty)\}$ 를 d-차원 Gauss 과정이라 하고, $X_i(t)$ $(i=1,\cdots,d)$ 는 $X(t)$ 의 copies 라 가정한다. $0<T<\infty$ 에 대해 a_T 와 b_T 를 T 의 실가, 양인 함수들이라 하고

$$\text{(i)}\ \liminf_{T\to\infty} a_T > 0$$

이라 하자. 편리하게 하기 위해

$$\beta_1(T) = \left\{2\Big(\log\frac{b_T}{a_T} + \log\log\big(\sigma(a_T) + \frac{1}{\sigma(a_T)}\big)\Big)\right\}^{1/2},$$

$$\beta_2(T) = \left\{2\Big(\log\frac{b_T}{a_T} + \log\log\big(a_T + \frac{1}{a_T}\big)\Big)\right\}^{1/2}$$

로 나타내자. 여기서 $\log x = \ln(\max\{x, 1\})$ 이다. 이후에도 $\log x$ 는 이런 개념으로 정의한다. 모든 큰 수 T 에 대하여 $\beta_1(T) \le \beta_2(T)$ 임에 유의하여라.

정리 6.1. 다음 조건

$$\text{(ii)} \quad \lim_{T\to\infty}\left(\frac{b_T}{a_T} + a_T + \frac{1}{a_T}\right) = \infty$$

이 만족되면

$$\text{(6.1)} \qquad \limsup_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \frac{||X^d(t+s) - X^d(t)||}{\sigma(a_T)\beta_1(T)} \le 1 \quad \text{a.s.}$$

이다.

정리 6.2. 다음 두 조건을 가정하자.

$$\text{(iii)} \quad \lim_{T\to\infty} \frac{\log(b_T/a_T)}{\log\log(a_T + \frac{1}{a_T})} = \infty$$

(iv) 어떤 양수 c 에 대해

$$\left|\frac{d^2\sigma^2(h)}{dh^2}\right| \le c\frac{\sigma^2(h)}{h^2}, \; h > 0.$$

그러면,

$$\text{(6.2)} \qquad \liminf_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le b_T} \frac{||X^d(t+a_T) - X^d(t)||}{\sigma(a_T)\beta_2(T)} \ge 1 \quad \text{a.s.}$$

이다.

위의 두 정리로 부터 다음 따름정리가 얻어진다.

따름정리 6.1. 정리 6.2 의 조건하에서 다음 극한치가 얻어진다.

$$\text{(6.3)} \qquad \begin{aligned} &\lim_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \frac{||X^d(t+s) - X^d(t)||}{\sigma(a_T)\beta_i(T)} \\ &= \lim_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le b_T} \frac{||X^d(t+a_T) - X^d(t)||}{\sigma(a_T)\beta_i(T)}, \; i = 1, 2 \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

예제 1. $\{X(t) : 0 \le t < \infty)\}$ 를 위수 2α $(0 < \alpha < 1)$ 의 fractional Brownian motion 이라 하자. 즉, $\{X(t) : 0 \le t < \infty)\}$ 를 $X(0) = 0$, $\sigma(t) = t^\alpha$ 인 중심 Gauss 과정이라 하자 ((5.6)과 (5.10)을 참조). $\alpha = 1/2$ 일 때는 $\{X(t) : 0 \le t < \infty)\}$ 가 표준 Wiener 과정이 된다. $a_T = 1, b_T = e^T$ 라 두면 따름정리 6.1에 의해 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le e^T} \sup_{0\le s\le 1} \frac{\|X^d(t+s) - X^d(t)\|}{\sqrt{T}}\\ =&\lim_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le e^T} \frac{\|X^d(t+1) - X^d(t)\|}{\sqrt{T}},\\ =&\sqrt{2} \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

한편, $a_T = 1/T, b_T = 1$ 이면 다음 연속률 (moduli of continuity)을 얻는다.

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le 1} \sup_{0\le s\le 1/T} \frac{\|X^d(t+s) - X^d(t)\|}{T^{-\alpha}\sqrt{\log T}}\\ =&\lim_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le 1} \frac{\|X^d(t+1/T) - X^d(t)\|}{T^{-\alpha}\sqrt{\log T}},\\ =&\sqrt{2} \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

위의 정리들은 1차원 정의구역으로 부터 유한차원 유클릿트 공간에서 값을 갖는 정상 Gauss 과정에 대한 극한 성상(limit behaviors)을 나타내는 결과들이지만, 1차원 정의구역으로 부터 무한차원에서 값을 갖는 Gauss 과정에 대해서는 어떤 결과가 얻어질 것인가? 하는데 의문이 생긴다. 이런 관점에서 하나의 문제를 해결하고자 한다.

확률과정 $\{Y(t) : 0 \le t < \infty\} = \{X_k(t), 0 \le t < \infty\}_{k=1}^{\infty}$ 를 l^p-norm $\|\cdot\|_{l^p}$ 을 갖는, 독립인 연속 중심 Gauss 과정이라 하고, $\sigma_k^2(h) = E\{X_k(t+h) - X_k(t)\}^2$ 이라 놓자. 여기서 $\sigma_k(h)$ 는 0 과 ∞ 에서 지수 α_k $(0 < \alpha_k < \alpha_{k+1} < 1,\ k = 1, 2, \cdots)$ 를 갖는, $h > 0$ 의 비감소, 연속인 정칙변화함수라 한다.

$$\begin{aligned}&\sigma(p,h) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^p(h)\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,\\ &\sigma^*(h) = \max_{k\ge1} \sigma_k(h),\end{aligned}$$

$$\tilde{\sigma}(p,h) = \begin{cases} \sigma(\frac{2p}{2-p}, h), & 1 \le p < 2, \\ \sigma^*(h), & 2 \le p < \infty \end{cases}$$

라 두자. $0 < T < \infty$ 에 대해 a_T 와 b_T 를 T 의 양인 함수들이라 하고, $\liminf_{T\to\infty} a_T > 0$ 이라 하자.

$$\gamma_1(T) = \Big\{2\Big(\log\frac{b_T}{a_T} + \log\log\Big(\tilde{\sigma}(p,a_T) + \frac{1}{\tilde{\sigma}(p,a_T)}\Big)\Big)\Big\}^{1/2},$$

$$\gamma_2(T) = \Big\{2\Big(\log\frac{b_T}{a_T} + \log\log\Big(a_T + \frac{1}{a_T}\Big)\Big)\Big\}^{1/2}$$

라 두면, 모든 큰 수 T 에 대해 $\gamma_1(T) \le \gamma_2(T)$ 임을 쉽게 보일 수 있다.

정리 6.3. 다음 조건을 가정하자.

$$\text{(i)} \quad \lim_{T\to\infty}\Big(\frac{b_T}{a_T} + a_T + \frac{1}{a_T}\Big) = \infty.$$

그러면,

$$\text{(6.4)} \qquad \limsup_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \frac{||Y(t+s)-Y(t)||_{l^p}}{\tilde{\sigma}(p,a_T)\gamma_1(T)} \le 1 \quad \text{a.s.}$$

이다.

정리 6.4. 앞의 정리 6.2 의 두 조건 (iii)과 (iv)가 만족되면 다음 부등식이 성립한다.

$$\text{(6.5)} \qquad \liminf_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \frac{||Y(t+s)-Y(t)||_{l^p}}{\tilde{\sigma}(p,a_T)\gamma_2(T)} \ge 1 \quad \text{a.s.}$$

정리 6.3 과 정리 6.4 를 결합하면 다음 극한정리를 얻는다.

따름정리 6.2. 정리 6.4 의 조건하에서 다음 식이 성립한다.

$$\text{(6.6)} \qquad \lim_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \frac{||Y(t+s)-Y(t)||_{l^p}}{\tilde{\sigma}(p,a_T)\gamma_i(T)} = 1, \ i=1,2 \quad \text{a.s.}$$

연구문제 10. 앞의 (6.2)와 같이 (6.5)를

$$\liminf_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le b_T} \frac{\|Y(t+a_T)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}(p,a_T)\gamma_2(T)} \ge 1 \quad \text{a.s.}$$

인 형태로 바꾸어 증명할 수 있다면 더 좋은 결과가 될 것이다. 정리 6.1-정리 6.4 의 a_T 와 b_T 에 관한 조건들은 일반적인 조건들이지만, 미분에 관한 조건 (IV)보다 더 약한 조건을 찾을 수 없을까?

정리 6.3–6.4 는 Banach 공간 중 l^p-공간 $(1 \le p < \infty)$ 에서 값을 갖는 Gauss 확률과정에 대해 극한정리들을 구했으나, l^∞-공간에서 값을 갖는 Gauss 과정에 대해서는 어떤 결과가 얻어질까? 하는 의문이 생긴다. 이에 대해 다음과 같이 이 문제를 해결해 보기로 한다. 현재 여기서는 연속률에 관한 정리들을 구할 것이다.

확률과정 $\{X_k(t), 0 \le t < \infty\}_{k=1}^\infty$ 를 실가, separable 중심 Gauss 과정이라 하고 $X_k(0) = 0$, $\sigma_k^2(|t-s|) = E\{X_k(t) - X_k(s)\}^2$, $0 < |t-s| < 1$ 이라 하자. 여기서 $\sigma_k(h)$ 는 0 과 ∞ 에서 지수 α_k $(0 < \alpha_k < 1)$ 를 갖는, $h > 0$ 의 비 감소, 연속인 정칙변화함수이다. $\sigma^*(h) = \max_{k\ge1} \sigma_k(h)$ 라 두고 $\sigma_k(\cdot)$ 는 k 에 관해 감소한다고 하자. $Y(t) = (X_1(t), X_2(t), \cdots), 0 \le t < \infty$ 는 $\|Y(t)\|_\infty = \max_{k\ge1} |X_k(t)|$ 로 정의된 l^∞-norm $\|\cdot\|_\infty$ 을 갖는 무한차원 Gauss 과정이라 한다. 더욱, 다음조건

$$\text{(i)}\ \sigma^*(h)/\sigma_k(h) \ge (1+\log k)^{1/2}, \quad k \ge 1$$

을 가정하자.

정리 6.5. 다음 부등식이 성립한다.

$$\limsup_{h\downarrow 0} \sup_{0\le t\le 1} \sup_{0\le s\le h} \frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_\infty}{\sigma^*(h)(2\log(1/h))^{1/2}} \le 1 \quad \text{a.s.} \tag{6.7}$$

정리 6.6. $X_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \cdots$ 가 독립 확률변수들이라 하자. y_h 가 방정식

$$\text{(ii)}\ \sum_{k=1}^\infty (hy_h)^{\sigma^{*2}(h)/\sigma_k^2(h)} = h$$

의 해이고

$$\text{(iii) 어떤 상수 } c>0 \text{ 에 대해 } \left|\frac{d^2\sigma_k^2(h)}{dh^2}\right| \le c\frac{\sigma_k^2(h)}{h^2}$$

이면, 다음 부등식이 성립한다.

$$\liminf_{h\downarrow 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_\infty}{\sigma^*(h)(2\log(1/hy_h))^{1/2}} \ge 1 \quad \text{a.s.} \tag{6.8}$$

$$\liminf_{h\downarrow 0}\sup_{0\le t\le 1}\frac{\|Y(t+h)-Y(t)\|_\infty}{\sigma^*(h)(2\log(1/hy_h))^{1/2}} \ge 1 \quad \text{a.s.} \tag{6.9}$$

정리 6.5 와 정리 6.6 을 결합하면 다음 극한치에 관한 정리를 구할 수 있다.

따름정리 6.3. 정리 6.6 의 가정하에서 다음 연속률을 얻는다.

$$\lim\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_\infty}{\sigma^*(h)(2\log(1/hy_h))^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.} \tag{6.10}$$

$$\lim_{h\downarrow 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_\infty}{\sigma^*(h)(2\log(1/h))^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.} \tag{6.11}$$

$$\limsup_{h\downarrow 0}\sup_{0\le t\le 1}\frac{\|Y(t+h)-Y(t)\|_\infty}{\sigma^*(h)(2\log(1/hy_h))^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.} \tag{6.12}$$

$$\limsup_{h\downarrow 0}\sup_{0\le t\le 1}\frac{\|Y(t+h)-Y(t)\|_\infty}{\sigma^*(h)(2\log(1/h))^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.} \tag{6.13}$$

주의 4. 조건 (i)은 어떤 양수 A 에 대해 $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^A(h) \le \infty$ 임을 의미한다. 따라서 (i)은 Csörgő-Lin-Shao [22]에 의해 주어진 조건 $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^A(h) < \infty$ 보다 더 약한 일반적인 조건이다. 또한, 따름정리 6.3 은 그들의 가정이나 결과보다 훨씬 간단하면서 우리의 증명방법이나 증명과정이 혁신적임을 발견할 것이다.

연구문제 11. 위의 (6.9)를, 더 좋은 결과로서 다음 하극한에 대한 부등식

$$\liminf_{h\downarrow 0}\sup_{0\le t\le 1}\frac{||Y(t+h)-Y(t)||_\infty}{\sigma^*(h)(2\log(1/hy_h))^{1/2}}\ge 1 \quad \text{a.s.}$$

을 증명할 수 있을 것으로 추측된다.

현재까지는 확률과정의 정의구역을 1차원 시간구간으로 가정해 왔으나(2절-5절에서는 대부분 이산시간으로 가정했음), 실험들 중에는 여러 종류의 매개변수(parameters)가 작용할 수 있기 때문에 확률과정의 정의구역을 N 종류의 매개변수를 갖는 N-차원 유클릿트 공간으로 가정하는 것은 어떤 의미로 자연스럽다. 따라서 N-차원 유클릿트 공간을 어떤 확률과정의 정의구역으로 했을 때 그 확률과정이 d 개의 값을 갖는 경우를 생각하자.

확률과정 $\{X_i(\mathbf{t}),\mathbf{t}\in[0,\infty)^N\}, i=1,\cdots,d$ 를 실가, 독립인 중심 Gauss 과정이라 하고 $X_i(\mathbf{0})=0$, $\sigma_i^2(||\mathbf{t}-\mathbf{s}||)=E\{X_i(\mathbf{t})-X_i(\mathbf{s})\}^2$ 이라 하자. 여기서 $||\cdot||$ 는 유클릿트 norm 이고, $\sigma_i(t)$ 는 0 과 ∞ 에서 지수 α_i $(0<\alpha_i<1)$ 를 갖는, $t>0$ 의 비감소이고 연속인 정칙변화함수이다. 또, $\{X^d(\mathbf{t})=(X_1(\mathbf{t}),\cdots,X_d(\mathbf{t}))\in\mathbb{R}^d,\ \mathbf{t}\in[0,\infty)^N\}$ 는 독립 성분 $X_i(\cdot)$ $(i=1,\cdots,d)$ 를 갖고 유클릿트 norm $||\cdot||$ 을 갖는 d-차원 Gauss 과정이라 한다. $j=1,\cdots,N$ 에 대해 $a_j(T)$와 $b_j(T)$ 를 $T>0$ 의 실가, 양인 함수들이라 하고,

$$\mathbf{a}(T)=(a_1(T),\cdots,a_N(T)),\quad \mathbf{b}(T)=(b_1(T),\cdots,b_N(T))$$

는 N-차원 벡터함수들로 본다.

$\mathbf{a}(T)$ 의 각각의 성분 $a_j(T)(j=1,\cdots,N)$ 가 다음 조건을 만족한다고 하자.

$$\text{(i) } 0<a_j(T)\le T \text{ 이고} \quad \liminf_{T\to\infty}a_j(T)>0.$$

편리하게 하기 위해

$$\delta_1(T)=\Big\{2\Big(\log(T/a^*(T))^N+\log\log\Big(b^*(T)+\frac{1}{b^*(T)}\Big)\Big)\Big\}^{1/2},$$

$$\delta_2(T)=\{2(\log(T/a^*(T))^N-\log_{(m+2)}T)\}^{1/2},\ m\ge 1,$$

$$\delta_3(T)=\Big\{2\Big(\log\prod_{i=1}^N\frac{T}{a_i(T)}+\log\Big(b^*(T)+\frac{1}{b^*(T)}\Big)\Big)\Big\}^{1/2}$$

라 두자. 여기서 $a^*(T) = \max\{a_j(T) : 1 \le j \le N\}$, $b^*(T) = \max\{b_j(T) : 1 \le j \le N\}$, $\log_{(m+1)} T = \log\log_{(m)} T$, $m \ge 1$, $\log_{(1)} T = \log T$, $\log x = \ln(\max\{x, 1\})$ 를 나타낸다. 또,

$$\sigma(d, h) = \left\{\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i^2(h)\right\}^{1/2}$$

로 쓴다. 충분히 큰 $T > 0$에 대해 $\delta_2(T) \le \delta_1(T) \le \delta_3(T)$ 임은 쉽게 밝힐 수 있다.

정리 6.7. 다음 조건을 가정하자.

$$\text{(ii)}\quad \lim_{T\to\infty}\left(\frac{T}{a^*(T)} + b^*(T) + \frac{1}{b^*(T)}\right) = \infty$$

그러면

$$\text{(6.14)}\qquad \liminf_{T\to\infty}\ \sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\mathbf{T}}\ \sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{s}\le\mathbf{a}(T)} \frac{\|X^d(\mathbf{t}+\mathbf{s}) - X^d(\mathbf{t})\|}{\sigma(d, \|\mathbf{a}(T)\|)\delta_1(T)} \le 1 \quad \text{a.s.}$$

이다. 단, $\mathbf{T} = (T, \cdots, T) \in (0, \infty)^N$ 이다. 더구나, $m \ge 1$에 대해

$$\text{(iii)}\quad \lim_{T\to\infty}(T/a^*(T))/\log_{(m)} T = r, \quad 0 < r \le \infty$$

이면

$$\text{(6.15)}\qquad \lim_{T\to\infty}\ \sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\mathbf{T}}\ \sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{s}\le\mathbf{a}(T)} \frac{\|X^d(\mathbf{t}+\mathbf{s}) - X^d(\mathbf{t})\|}{\sigma(d, \|\mathbf{a}(T)\|)\delta_2(T)} \le 1 \quad \text{a.s.}$$

이다.

정리 6.8. 다음 두 조건을 가정한다.

$$\text{(iv)}\quad \lim_{T\to\infty}(\log(T/a^*(T)))\Big/\log\left(b^*(T) + \tfrac{1}{b^*(T)}\right) = \infty,$$

(v) 어떤 양의 상수들 c_1, c_2 와 모든 $x > 0$ 에 대해

$$\left|\frac{d\sigma_i^2(x)}{dx}\right| \le c_1\frac{\sigma_i^2(x)}{x}, \qquad \left|\frac{d^2\sigma_i^2(x)}{dx^2}\right| \le c_2\frac{\sigma_i^2(x)}{x^2} \quad (i = 1, \cdots, d).$$

그러면, 다음 부등식이 성립한다.

$$\text{(6.16)}\qquad \liminf_{T\to\infty}\ \sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\mathbf{T}} \frac{\|X^d(\mathbf{t}+\mathbf{a}(T)) - X^d(\mathbf{t})\|}{\sigma(d, \|\mathbf{a}(T)\|)\delta_3(T)} \ge 1 \qquad \text{a.s.}$$

정리 6.7 과 정리 6.8 을 결합하여 다음 하극한 정리들을 얻는다.

따름정리 6.4. 만약 $m \geq 1$ 에 대해

$$\log\left(b^*(T) + \frac{1}{b^*(T)}\right) = o\left(\log_{(m+1)} T\right), \qquad T \to \infty$$

이면, 가정 (iii)과 (v) 하에서 $j = 1, 2, 3$ 에 대해 다음 식이 성립한다.

$$\text{(6.17)} \qquad \liminf_{T\to\infty} \sup_{\mathbf{0}\leq\mathbf{t}\leq\mathbf{T}} \sup_{\mathbf{0}\leq\mathbf{s}\leq\mathbf{a}(T)} \frac{\|X^d(\mathbf{t}+\mathbf{s}) - X^d(\mathbf{t})\|}{\sigma(d, \|\mathbf{a}(T)\|)\delta_j(T)} = 1 \qquad \text{a.s.}$$

$$\text{(6.18)} \qquad \liminf_{T\to\infty} \sup_{\mathbf{0}\leq\mathbf{t}\leq\mathbf{T}} \frac{\|X^d(\mathbf{t}+\mathbf{a}(T)) - X^d(\mathbf{t})\|}{\sigma(d, \|\mathbf{a}(T)\|)\delta_j(T)} = 1 \qquad \text{a.s.}$$

따름정리 6.5. 정리 6.8 의 가정하에서 $j = 1, 3$에 대해 (6.17)과 (6.18)이 성립한다.

예제 2. $0 < \alpha < 1$ 에 대해 $\sigma_i(x) = \sigma(x) = x^\alpha$, $x > 0$, $i = 1, \cdots, d$ 라 놓자. $\mathbf{a}(T) = (1, \cdots, 1, 1/T^\alpha, \log T)$, $\mathbf{b}(T) = (\log_{(m+1)} T,\ 1,\ \cdots,\ 1)$ 을 $(0, \infty)^N$ 에 있는 벡터들이라 하면 위의 (6.17)과 (6.18)을 얻는다.

연구문제 12. (1) 정리 6.7 의 가정 (ii)가 없을 때

$$\limsup_{T\to\infty} \sup_{\mathbf{0}\leq\mathbf{t}\leq\mathbf{T}} \sup_{\mathbf{0}\leq\mathbf{s}\leq\mathbf{a}(T)} \frac{\|X^d(\mathbf{t}+\mathbf{s}) - X^d(\mathbf{t})\|}{\sigma(d, \|\mathbf{a}(T)\|)\delta(T)} \leq 1 \qquad \text{a.s.}$$

가 성립함을 보일 수 있을 것이다. 여기서 $\delta(T)$ 는 $\delta_1(T)$ 와 약간 유사한 형태의 normalizing factor 로서 증명과정에서 추정될 수 있다.

(2) 1차원 구간을 정의구역으로 했던 이전의 많은 정리들이, 정리 6.7–6.8 에서와 같이 N-차원 정의구역 $[0, \infty)^N$ 을 갖는 경우로 그 확장이 가능할 것이다(이산 확률과정의 경우도 포함됨). l^p-공간, l^∞-공간, Banach 공간, 유한차원 벡터공간 등에서 값을 갖는, N-차원 공간 $[0, \infty)^N$ 상의 Gauss 과정, Wiener 과정, 종속 mixing 조건이 주어진 확률과정, Ornstein-Uhlenbeck 과정, local time 과정, renewal 과정, lag sum 과정 등 많은 확률과정들에

대해서도 정리 6.1-정리 6.8 의 증명방법 등 새로운 idea 를 잘 활용하면 여러 형태의 극한정리들을 찾을 수 있을 것으로 추측된다.

참고문헌

[1] S. A. Book, *The Erdös-Rényi new law of large numbers for weighted sums*, Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1973), 165–171.

[2] ______, *An extension of the Erdös-Rényi new law of large numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1975), no. 2, 438–446.

[3] ______, *Large deviation probabilities and the Erdös-Rényi law of large numbers*, Canad. J. Statist. **4** (1976), 185–210.

[4] A. H. C. Chan, *Erdös-Rényi type modulus of continuity theorems for Brownian sheets*, Studia Sci. Math. Hung. **11** (1976), 59–68.

[5] H. Chernoff, *A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations*, Ann. Math. Statist. **23** (1952), 493–507.

[6] Y. K. Choi, *Erdös-Rényi law for stationary Gaussian sequences*, J. Math. Kyoto Univ. **30** (1990), no. 4, 559–573.

[7] ______, *Erdös-Rényi-type laws applied to Gaussian process*, J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), no. 1, 191–217.

[8] ______, *Asymptotic behaviors for the increments of Gaussian random fields*, J. Math. Anal. & Appl. **246** (2000), 557–575.

[9] ______ (with U. J. Choi and B. S. Lee), *On partial sums of a Gaussian sequence with stationary increments*, Stoch. Anal. & Appli. **16** (1998), no. 5, 825–842.

[10] ______ (with L. Haque), *Liminf results on the increments of a (N,d)-Gaussian process*, Stochastic Analysis and Applications, Nova Science Publ. Inc., New York, 2001.

[11] ______ (with K. S. Hwang), *How big are the Lag increments of a Gaussian process?*, Computers & Math. Appl. **40** (2000), 911–919.

[12] ______ (with K. S. Hwang and J. S. Jung), *On superior limits for the increments of Gaussian processes*, Statist. & Probab. Letters **35** (1997), 289–296.

[13] ______ (with K. S. Hwang and H. J. Moon), *On the large and small increments of fractional Lévy Brownian fields*, International J. of Math., Game Theory and Algebra, Nova Science Publ. Inc. **10** (2000), no. 5, 347–364.

[14] ______ (with S. Y. Kang), *Moduli of continuity on the increments of l^∞-valued Gaussian processes*, Stochastic Analysis and Applications, Nova Science Publ. Inc., New York, 2001.

[15] ______ (with N. Kôno), *On the asymptotic behavior of Gaussian sequences with stationary increments*, J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), no. 3, 643–678.

[16] ______ (with N. Kôno), *How big are the increments of a two-parameter Gaussian process?* J. Theoretical Probab. **12** (1999), no. 1, 105–129.

[17] ______ (with S. H. Lee), *Some limit theorems on the increments of l^p-valued Gaussian processes*, Stochastic Analysis and Applications, Nova Science Publ. Inc., New York, 2001.

[18] ______ (with Z. Y. Lin), *Some limit theorems for fractional Lévy Brownian fields*, Stoch. Proc. & their Appli. **82** (1999), 229–244.

[19] ______ (with H. J. Moon), *Sharp strong limit theorems on the increments of a Gaussian process*, Stochastic Analysis and Applications, Nova Science Publ. Inc., New York, 2001.

[20] ______ (with H. S. Sung), *Limit behaviors for the increments of a d-dimensional Gaussian process*, Stochastic Analysis and Applications, Nova Science Publ. Inc., New York, 2001.

[21] S. Csörgő, *Erdös-Rényi laws*, Ann. Statist. **7** (1979), no. 4, 772–787.

[22] M. Csörgő, Z. Y. Lin, and Q. M. Shao, *Path properties for l^∞-valued Gaussian processes*, Proc. Amer. Math. Society, **121** (1994), no. 1, 225–236.

[23] M. Csörgő and P. Révész, *How big are the increments of a Wiener process?*, Ann. Probab. **7** (1979), 731–737.

[24] ______, *Strong approximations in probability and Statistics*, Academic Press, New York, 1981.

[25] M. Csörgő and J. Steinebach, *Improved Erdös-Rényi and strong approximations laws for increments of partial sums*, Ann. Probab. **9** (1981), no. 6, 988–996.

[26] P. Deheuvels and J. Steinebach, *Exact convergence rate of an Erdös-Rényi strong law for moving quantiles*, J. Appl. Prob. **23** (1986), 355–369.

[27] P. Erd s and A. Rényi, *On a new law of large numbers*, J. Anal. Math. **23** (1970), 103–111.

[28] X. Fernique, *Cotinuité des processes Gaussiens*, C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964), 6058–6060.

[29] D. L. Hanson and R. P. Russo, *Some results on increments of the Wiener process with applications to lag sums of i.i.d.r.v.s'*, Ann. Probab. **11** (1983), 609–623.

[30] J. Komlós, P. Major, and G. Tusnády, *An approximation of partial sums of independent R.V.'s and the sample DF, I*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete **32** (1975), 111–131.

[31] ______, *An approximation of partial sums of independent R.V.'s and the sample DF, II*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete **34** (1976), 33–58.

[32] M. R. Leadbetter, G. Lindgren, and H. Rootzen, *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[33] Z. Y. Lin, *On Csörgő-Révész's increments of sums of non-i.i.d. random variables*, Scientia Sinica **30** (1987), 921–931.

[34] ———, *On increments of sums of independent non-identically distributed random variables*, Scientia Sinica **31** (1988), 927–937.

[35] ———, *On increments of sums of independent non-identically distributed random variables*, Scientia Sinica (Series A) **XXXI** (1988), no. 8, 927–937.

[36] ———, *The increments of partial sums of a dependent sequence when the moment generating functions do not exist*, Acta Math. Sinica **5** (1989), no. 4, 289–296.

[37] ———, *Laws of large numbers for weighted sums of random variables and random elements*, Acta Math. Sinica **5** (1989), no. 2, 185–192.

[38] ———, *On increments of sums of random variables without moment hypothesis*, Science in China (Series A) **33** (1990), no. 9, 1048–1059.

[39] ———, *The Erdös-Rényi laws of large numbers for non-identically distributed random variables*, Chin. Ann. Math. **11B** (1990), no. 3, 376–383.

[40] Z. Y. Lin and C. R. Lu, *Strong Limit Theorems*, Kluwer Academic Publishers and Science Press, Hong Kong, 1992.

[41] ———, *Limit theory of mixing dependent random variables*, Kluwer Academic Publishers & Science Press, 1996.

[42] Z. Y. Lin and Q. M. Shao, *On the limiting behaviors of increments of sums of random variables without moment conditions*, Chin. Ann. Math. **14B** (1993), no. 3, 307–318.

[43] A. A. Mogulskii, *Small deviations in a space of trajectories*, Theory of Probab. & Appl. **19** (1994), 726–736.

[44] S. Orey, *Growth rate of certain Gaussian processes*, Proc. 6th Berkeley Symposium, Math. Statist. Probab. **2** (1971) (Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles), 443–451.

[45] V. V. Petrov and I. V. Sirokova, *The exponential rate of convergence in the law of large numbers, Vestnik Leningrad*, Univ. No. 7, Mat. Astronom. **2** (1973), 155–157.

[46] D. Slepian, *The one-sided barrier problem for Gaussian noise*, Bell System Tech. J. **41** (1962), 463–501.

[47] J. Steinebach, *A strong law of Erdös-Rényi type for cumulative processes in renewal theory*, J. Appl. Probab. **15** (1978), 96–111.

[48] ———, *On a necessary condition for the Erdös-Rényi law of large numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), 97–100.

[49] ———, *Erdös-Rényi-Zuwächse bei Erneuerungs-proze-ssen und partialsummen auf Gittern*, Habilitationsschrift, Uni versit t D sseldorf, 1979.

[50] ———, *On General versions of Erdös-Rényi laws*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete **56** (1981), 549–554.

[51] ———, *The stochastic geyser problem for first-passage times*, J. Appl. Probab., (1981).

[52] ———, *Between invariance principles and Erdös-Rényi laws*, Limit Theorems in Probability and Statistics Veszprem (Hungary), Colloquia Mathematica Societatis J nos Bolyai **36** (1982).

[53] ———, *On the increments of partial sum processes with multidimensional indices*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **63** (1983), 59–70.

[54] ———, *Strong laws for small increments of renewal processes*, Ann. Probab. **19** (1991), no. 4, 1768–1776.

[55] Q. M. Shao, *Limit theorem for dependent and independent random variables*, Ph. D. Thesis, Chin., Science and Tech. Univ. 1989.

[56] L. X. Zhang, *A note on limits for increments of a fractional Brownian motion*, Acta Math. Hungar. **76(1-2)** (1997), 145–154.

경상대학교 자연과학대학 수학·통계정보학부

경남 진주시 가좌동 900

660-701

E-mail: mathykc@nongae.ac.kr