

입력정합조건을 만족하지 않는 시스템에 대한 강인 제어

Robust Control for the System with Unmatched Uncertainty

전 보 경, 장 평 훈, 박 주 이

(Bo Kyoung Jeon, Pyung Hun Chang, and Juyi Park)

Abstract : Most robust control schemes for stabilizing the systems with uncertainties require that the systems are satisfied with matching conditions. This paper is proposed to robust control using time delay estimation for the nonlinear single input systems not satisfying the matching conditions. Synthetic input concept is used to design the control law. The unmatched uncertainties considered in this paper are more general than other studies and they need not a special form or information about their bound. We applied the proposed method to a single pendulum with a motor system.

Keywords : matching condition, time delay estimation, uncertainty, robust control, synthetic input

I. 서론

1. 연구 배경 및 동기

우리 주변의 물리적인 시스템에 불가피하게 포함되는 불확실성(uncertainty)은, 제어 시스템을 구현할 때 성능을 저하시키는 한 요인이 되고 있다. 따라서, 불확실성이 존재하더라도 강인하게 적용할 수 있는 제어 방법에 대한 연구가 많이 되어왔다. 그 중에서 슬라이딩 모드 제어[1], 시간 지연 제어[8], 적응 제어[18] 등이 주목할 만한 연구들이다.

그러나, 대부분의 제어 방법이 입력정합조건(matching condition)을 만족시키는 불확실성에 대해서는 강인성을 보장하더라도, 입력정합조건을 만족하지 않는 시스템에 대해서는 강인성을 보장할 수 없다는 단점이 있다 [2][8]-[10]. 여기서 입력정합조건이란 제어 변수들이 포함되어 있는 상태 방정식에만 불확실성이 들어가야 한다는 구조적 성질이다. 실제로 많은 제어 시스템은 입력정합조건을 만족하지 않기 때문에, 근래에 이런 시스템에 대한 제어 방법이 연구되고 있다[3][5][7].

입력정합조건을 만족시키지 못하는 불확실성(unatched uncertainty)이 있는 시스템을 제어하기 위한 연구로는, 이차 안정화 기법(quadratic stabilization)을 이용하여 선형 시스템의 강인 안정성을 보장하는 슬라이딩 모드 제어 방법[5], 적응 제어 기법을 응용하여 선형 시스템에 적용한 연구[7], 파라미터 불확실성이 있는 비선형 시스템을 입출력 선형화(I/O linearization)하여 각 상태변수들의 한정성(boundedness)를 보장하는 방법[3] 등이 있다.

이러한 연구들은 앞에서 언급했듯이 대부분 매우 제한된 시스템을 다루고 있다. 예를 들어 대상 시스템이 선형 시스템에 국한되거나, 비선형 시스템을 다루더라도 불확실성의 한도(bound)나 구조적인 형태에 있어 많은 제한 조건을 갖는 경우가 있다. 또한, 시스템의 정보를 어느 정도 알고 있어야 제어 입력 설계가 가능한 경우도 있다. 한편, 제어기 구현이 복잡하여 실제 적용에 있어 실용성이 떨어지는 경우도 있다.

2. 연구 내용

본 연구의 목적은 시스템에 입력정합조건을 만족시키지 못하는 불확실성이 존재함에도 불구하고, 시스템의 출력이 원하는 궤적을 잘 따라가도록 제어하되, 기존의 연구보다 좀더 일반적인 시스템을 다룬다는 데에 있다. 이를 위해 각 상태변수마다 가상 입력이라는 개념을 도입하여 강인 수렴성을 보장하는 제어 기법을 제안하였다. 제어기법의 유도과정에는 Liapunov 안정성 해석 방법을 응용하여 제어기를 설계하였다.

연구에서 특이할 만한 점은 다음 두 가지이다. 첫째, 각 상태변수들이 순차적으로 연관되는 단일 입력 비선형 시스템을 대상으로 함으로써 기존의 연구보다 좀더 일반적인 형태의 불확실성(입력정합조건을 만족시키지 못하는 불확실성)을 다룰 수 있도록 시도하였다. 둘째, 시간 지연추정(time delay estimation) 방법을 이용하여 불확실성의 추정함으로써, 보다 간단한 형태의 제어기 구현이 가능하였으며, 시스템의 모델에 대한 정보가 거의 필요 없게 되었다.

본 논문은 총 5장으로 구성되어 있다. II장에서는 관심의 대상이 되는 시스템을 정의하고, III장에서 강인 제어를 제안한다. IV장에서는 제안된 제어기법을 적용한 시뮬레이션을 예로 보이고, V장에서 결론을 맺는다.

II. 적용 대상 시스템

본 연구에서는 어떤 n 차의 비선형 시스템이 (1)과 같이 표현될 수 있는 경우를 다룬다. 이 형태는 이미 잘 알려진 단일 입력의 위상변수표준형(phase variable form)에서 위 $n-1$ 번째까지의 상태 방정식에 불확실한 항이 더해지고, 제어 입력을 포함하는 마지막 n 번째의 상태 방정식에는 시스템 모델에 대한 정보가 거의 없는 시스템이다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + D_1 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + D_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + D_{n-1} \\ \dot{x}_n &= g(x)u + d_n = \hat{g}(x)u + D_n \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

접수일자 : 2000. 6. 28., 수정완료 : 2000. 11. 8.

전보경, 장평훈, 박주이 : 한국과학기술원(rang@kaist.ac.kr/phc hang@kaist.ac.kr/jypark@mecha.kaist.ac.kr)

여기에서, $D_1 \sim D_{n-1}, d_n$ 는 파라미터 불확실성과 비선형 항, 외란 등을 포함한다. $\hat{g}(x)$ 은 입력 u 의 계수항 $g(x)$ 의 추정치이며, D_n 은 다음과 같이 정의된다.

$$D_n \equiv \{g(x) - \hat{g}(x)\}u + d_n \quad (2)$$

여기에서, d_n, D_n 은 제어입력 u 와 같은 방정식에 포함되어 있으므로, 입력정합조건을 만족하는 불확실성이 된다. 마찬가지로 이유로, $D_1 \sim D_{n-1}$ 는 입력정합조건을 만족하지 못하는 불확실성이 된다.

본 연구에서 필요로 하는 조건은 첫째, D_i 가 상태변수에 대하여 미분 가능해야 한다는 것과, 둘째, 출력 y 는 첫 번째 상태변수(x_1)로 정의되어야 한다는 것이다. 실제 많은 시스템의 경우 이 첫째 조건이 성립하며, 상태방정식을 만들 때부터 이를 고려하여 첫 번째 상태변수를 출력 y 로 잡으면 되므로 둘째 조건도 무리 없는 조건이라 할 수 있다.

제시한 (1)은 일반적인 형태로써 특별한 구조적인 제약이 요구되지 않으며 그 범위에 대한 정보가 필요 없다. 따라서, 기존의 연구들에서보다 넓은 범위에 있는 불확실성을 포함한다고 할 수 있다.

이제 이 시스템 형태를 얻을 수 있는 예를 하나 보이고자 한다. 아래 (3)과 같은 파라미터 불확실성이 있는 단일 입력 비선형 시스템은 입출력 선형화(I/O linearization)할 경우에 (1)의 형태를 얻을 수 있다[3].

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= f(\xi) + g(\xi)u, & \xi &\in \mathfrak{R}^n \\ \eta &= h(\xi) \end{aligned} \quad (3)$$

이 시스템을 입출력 선형화하기에 앞서, $f(\xi)$ 를 (4)와 같이 아는 부분 $\hat{f}(\xi)$ 과 모르는 부분 $\check{f}(\xi)$ 으로 나눈다.

$$f(\xi) = \hat{f}(\xi) + \check{f}(\xi) \quad (4)$$

다음과 같이 x_i 를 정의하고 (6)과 같이 입출력 선형화 한다[2].

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv \eta = h(\xi) \\ x_2 &\equiv L_f h \\ &\vdots \\ x_n &\equiv L_f^{n-1} h \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + D_1 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + D_2 \\ &\vdots \\ L_g L_f^{n-1} h u + L_f L_f^{n-1} h \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서 L_f 는 f 에 관한 Lie 미분을 의미한다. D_i 는 $\check{f}(\xi)$ 때문에 생기는 불확실성으로서 $D_i = L_f L_f^{i-1} h$ ($i=1, \dots, n-1$)로 표현된다. 여기서, $\hat{g}(x), D_n$ 을 아래와 같이 정의하면,

$$\begin{aligned} \hat{g}(x) &\equiv L_g L_f^{n-1} h \\ D_n &\equiv L_f^n h L_f L_f^{n-1} h \end{aligned} \quad (7)$$

(6)은 다음 식과 같이 되어, 본 연구에서 다루고자 하는 시스템 (1)과 같은 형태가 된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + D_1 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \hat{g}(x)u + D_n \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (8)$$

이상과 같이, (3)의 형태로 된 비선형 시스템은 (1)의 형태로 변환될 수 있음을 알 수 있다.

III. 강인 제어 설계

1절에서는 앞으로 이용할 시간지연추정에 대하여 간략히 설명한다. 2절에서는 II장에서 설명한 적용 시스템을 입력 u 의 계수항 $g(x)$ 을 아는 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어, 시간지연추정을 이용한 강인 제어 입력을 설계하고 안정성에 대하여 설명한다. 또한 시스템이 안정하기 위한 입력 계수항 추정값의 범위에 대해서도 언급한다. 3절에서는 본 연구의 제어 방법이 노이즈에 민감하다는 사실과 그 보완책에 대하여 설명한다.

1. 시간지연추정(time delay estimation)

(9)을 생각해 보자.

$$\dot{x}(t) = \hat{f}(x, t) + \tilde{f}(x, t) + g(x, t)u(t) + d(t) \quad (9)$$

$\hat{f}(x)$: 아는 부분, $\tilde{f}(x)$: 모르는 부분

$g(x)$: 입력 계수 벡터, u : 입력

d : 모르는 외란 벡터

문제는 모르는 부분 $\tilde{f}(x), d$ 를 어떻게 구할 것인가 하는 것이다. (9)은 (10)처럼 다시 표현할 수 있다.

$$\dot{x}(t) - \hat{f}(x, t) - g(x, t)u(t) = \tilde{f}(x, t) + d(t) \quad (10)$$

여기서 충분히 작은 시간지연(time delay) L 을 생각한다. 이 때 L 은 시스템에 포함된 비선형 항과 불확실성의 dynamics보다 빠르게 선정되었다고 가정한다. 다시 말하면, 비선형 항과 불확실성의 bandwidth보다 더 높은 bandwidth가 되도록 선정되었다고 가정한다. 그러면, (10)에서의 $\tilde{f}(x, t) + d(t)$ 는 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{f}(x, t) + d(t) \equiv \tilde{f}(x, t-L) + d(t-L) \quad (11)$$

(10)로부터

$$\tilde{f}(x, t-L) + d(t-L) = \dot{x}(t-L) - \hat{f}(x, t-L) - g(x, t-L)u(t-L) \quad (12)$$

임을 알 수 있으므로 (11)와 (12)로부터

$$\tilde{f}(x, t) + d(t) \equiv \dot{x}(t-L) - \hat{f}(x, t-L) - g(x, t-L)u(t-L) \quad (13)$$

가 된다. 즉, 모르는 부분 $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{d}(t)$ 를 (13)와 같이 추정할 수 있다.

2. 제어 입력 설계

2.1 입력 계수항 $g(\mathbf{x})$ 를 아는 경우

(1)의 시스템에 대하여 생각한다. 본 소절에서는 우선 이상적인 경우로 입력 계수항 $g(\mathbf{x})$ 를 정확히 아는 경우에 대하여 제어 이론을 전개하고, $g(\mathbf{x})$ 의 추정값을 사용하는 경우에 대하여는 다음 소절에서 설명하고자 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + D_1 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + D_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + D_{n-1} \\ \dot{x}_n &= g(\mathbf{x})u + d_n = \hat{g}(\mathbf{x})u + D_n \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

L 이 충분히 작고, D_i, d_n 이 미분 가능한 연속함수이면 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} D_i(t) &\equiv D_i(t-L) \\ d_n(t) &\equiv d_n(t-L) \end{aligned} \quad (14)$$

그러므로, D_i, d_n 의 추정값 D_{ie}, d_{ne} 은 (13)에 나타난 시간지연추정에 의해서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} D_{ie}(t) &\equiv D_i(t-L) = \dot{x}_i(t-L) - x_{i+1}(t-L) \\ d_{ne}(t) &\equiv d_n(t-L) = \dot{x}_n(t-L) - g(\mathbf{x})_{t-L}u(t-L) \end{aligned} \quad (15)$$

위와 같이 하면 $D_i - D_{ie}$ ($1 \leq i \leq n-1$)와 $D_n - D_{ne}$ 는 무시할 만큼 작게 된다.

이제 제어를 설계하기 위한 첫 단계로써, 새로운 변수 z_i 와 s_i 를 도입한다. z_i 는 편의상 가상입력(synthetic input)이라 부르기로 하는데, $z_i \equiv y_d$ 로 정의하고, z_i ($2 \leq i \leq n$)는 제어기의 설계과정에서 결정된다.

한편, s_i 는 x_i 와 z_i 의 차이로 정의한다. 즉,

$$s_i \equiv x_i - z_i \quad \text{for } i=1, 2, \dots, n \quad (16)$$

(16)에서 보면 s_i 가 0으로 수렴하는 것은 각 상태변수 x_i 가 z_i 로 수렴하는 것을 의미한다. 그러므로, $s_1 \rightarrow 0$ 이면, 원래의 제어목적 대로 $x_1 \rightarrow y_d$ 가 된다.

그러므로, 이제 모든 s_i 를 0으로 수렴시키기 위한 제어를 설계한다. 우선, 다음과 같은 Liapunov candidate 함수를 잡는다.

$$V = \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}s_2^2 + \dots + \frac{1}{2}s_n^2 \quad (17)$$

그러면, V 의 시간에 대한 미분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{V} = s_1\dot{s}_1 + s_2\dot{s}_2 + \dots + s_n\dot{s}_n \quad (18)$$

(1)로부터 s_i 의 미분치를 다음과 같이 s_{i+1} 과 연관지어 쓸 수 있으므로,

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= \dot{x}_i - \dot{z}_i = x_{i+1} + D_i - \dot{z}_i \\ &= x_{i+1} - z_{i+1} + z_{i+1} + D_i - \dot{z}_i \\ &= s_{i+1} + z_{i+1} - \dot{z}_i + D_i \end{aligned} \quad (19)$$

\dot{V} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s_1(s_2 + z_2 - \dot{z}_1 + D_1) + s_2(s_3 + z_3 - \dot{z}_2 + D_2) + \dots \\ &\quad + s_{n-1}(s_n + z_n - \dot{z}_{n-1} + D_{n-1}) + s_n(gu - \dot{z}_n + d_n) \end{aligned} \quad (20)$$

이제 \dot{V} 가 음의 한정함수(negative definite function)가 되기 위하여 z_i 와 u 를 다음과 같이 설계한다.

$$\begin{aligned} z_2 &= -\lambda_1 s_1 + \dot{z}_1 - D_{1e} \\ z_3 &= -\lambda_2 s_2 + \dot{z}_2 - D_{2e} - s_1 \\ &\vdots \\ z_n &= -\lambda_{n-1} s_{n-1} + \dot{z}_{n-1} - D_{n-1e} - s_{n-2} \end{aligned} \quad (21)$$

$$u = g^{-1}(-\lambda_n s_n + \dot{z}_n - d_{ne} - s_{n-1}) \quad (22)$$

여기서 λ_i ($1 \leq i \leq n$)는 양의 상수이다.

(21), (22)를 (20)에 대입하면, \dot{V} 는 다음과 같이 음으로 한정(negative definite)된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\lambda_1 s_1^2 - \dots - \lambda_n s_n^2 + s_1(D_1 - D_{1e}) + \dots \\ &\quad + s_{n-1}(D_{n-1} - D_{n-1e}) + s_n(d_n - d_{ne}) \\ &\leq -\lambda_1 s_1^2 - \dots - \lambda_n s_n^2 + |s_1| |D_1 - D_{1e}| + \dots \\ &= -\bar{\lambda}_1 s_1^2 + (\bar{\lambda}_1 - \lambda_1) s_1^2 + |s_1| |D_1 - D_{1e}| + \dots \\ &= -\bar{\lambda}_1 s_1^2 + (\bar{\lambda}_1 - \lambda_1) (|s_1| + |D_1 - D_{1e}|)^2 - \frac{|D_1 - D_{1e}|^2}{4(\bar{\lambda}_1 - \lambda_1)} + \dots \\ &\leq -\bar{\lambda}_1 s_1^2 - \bar{\lambda}_2 s_2^2 - \dots - \frac{|D_1 - D_{1e}|^2}{4(\bar{\lambda}_1 - \lambda_1)} - \dots - \frac{|d_n - d_{ne}|^2}{4(\bar{\lambda}_n - \lambda_n)} \end{aligned} \quad (23)$$

여기서, $0 < \bar{\lambda}_i < \lambda_i$ ($1 \leq i \leq n$)이며, 충분히 작은 값 $|D_i - D_{ie}|$ 에 대하여 $\dot{V} \leq -\bar{\lambda}_1 s_1^2 - \bar{\lambda}_2 s_2^2 - \dots - \bar{\lambda}_n s_n^2$ 가 된다. 따라서, s_i 는 모두 0으로 수렴하고, 각 상태변수 x_i 는 z_i 로 수렴하므로, $y(=x_1)$ 도 기준 궤적 $y_d(=z_1)$ 로 수렴하게 된다.

그런데, 여기에서 고려해야 할 점으로 (21), (22)에 있는 \dot{z}_i 를 어떻게 구할 것인가 하는 문제가 있다. 본 연구에서는 z_i 를 수치 미분하여 \dot{z}_i 를 구하였는데, z_i 가 극심한 노이즈를 포함하고 있지 않는 한 문제가 되지 않음을 발견하였다. 이 문제는 이 장의 마지막 부분에 언급하였다.

2.2 입력 계수항 $g(\mathbf{x})$ 를 모르는 경우

(1)에서 $g(\mathbf{x})$ 를 모르는 경우에는, $g(\mathbf{x})$ 의 추정값 $\hat{g}(\mathbf{x})$ 를 사용하게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + D_1 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + D_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + D_{n-1} \\ \dot{x}_n &= g(x)u + d_n = \hat{g}(x)u + D_n \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

n 개의 미지항 D_i 의 추정치 D_{ie} 는 앞 소절에서와 같이 (15)의 방법으로 구한다. 그리고 역시 z_i 도 (21)의 방법으로 만들고, u 는 다음과 같이 설계한다.

$$u = \hat{g}^{-1}(-\lambda_n s_n + \dot{z}_n - D_{ne} - s_{n-1}) \quad (24)$$

그러면, (17)와 같이 V 를 선정할 때, \dot{V} 는 (25)과 같이 시간지연추정 오차 $(D_n - D_{ne})$ 가 남게 되어 음의 한정을 보장할 수 없다.

$$\dot{V} = -\lambda_1 s_1^2 - \lambda_2 s_2^2 - \dots - \lambda_n s_n^2 + s_n(D_n - D_{ne}) \quad (25)$$

여기에서 $(D_n - D_{ne})$ 가 남아있는 이유는 D_n -(2)에서 볼 수 있듯이-이 입력 u 를 포함하고 있어서 항상 연속이라 말할 수 없기 때문이다. 즉, 연속이 아니므로 (14)과 같은 관계가 성립하지 않아 $(D_n - D_{ne})$ 을 무시할 수 없다. 그러나, 다음의 정리 1에 의하여 몇 가지 조건하에서는 $(D_n - D_{ne})$ 를 무시할 수 있다.

정리 1 : 충분히 작은 시간지연 L 에 대하여 $\hat{g}(x)$ 가 $|1 - g \hat{g}^{-1}| < 1$ 의 범위에 있을 때 $D_n(x, u)$ 은 연속 함수이고 따라서 $(D_n - D_{ne})$ 는 무시할 수 있다.

증명 : i) z_1 은 원하는 궤적 y_d 로 정의되므로, y_d 를 설계할 당시에 n 번 미분 가능하도록 설계하기만 하면, z_1 은 n 번 미분가능 가능하게 된다. (21)에 의해 정의되는 z_2 는 $x_1, z_1, \dot{z}_1, D_{1e}$ 의 함수인데 이 네 변수가 모두 미분 가능하므로 z_2 또한 미분 가능하다. 같은 방법으로 z_3, \dots, z_n 가 모두 미분 가능하다. 따라서, z_i 는 모두 미분 가능하며 연속 함수인 것을 알 수 있다. 물론 상태변수 x_i 와 z_i 로 이루어진 s_i 또한 미분 가능한 함수이므로 연속적이라 할 수 있다. 따라서, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} s_i(x(t-L)) &\approx s_i(x(t)) \quad \text{for } 1 \leq i \leq n \\ z_i(x(t-L)) &\approx z_i(x(t)) \quad \text{for } 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (26)$$

ii) $g(x)$ 와 $d_n(t)$ 가 연속이라 가정하므로

$$d_n(t-L) \approx d_n(t), g(x(t-L)) \approx g(x(t)) \quad (27)$$

iii) (2)에 (24)을 대입하여 D_n 을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} D_n &= d_n + (g - \hat{g})u \\ &= d_n + (g - \hat{g})\hat{g}^{-1}(-\lambda_n s_n + \dot{z}_n - D_{ne} - s_{n-1}) \quad (28) \\ &= d_n + (1 - g\hat{g}^{-1})(\lambda_n s_n - \dot{z}_n + s_{n-1} + D_{ne}) \end{aligned}$$

편의를 위하여 어떤 시간 $t = kL$ 에서의 변수 $(\cdot)(kL)$ 를 $(\cdot)_k$ 라고 표현하기로 한다. 그러면 시간 $t = kL$ 에서의 D_n 는 다음과 같이 표현된다.

$$D_{n_k} = d_{n_k} + (1 - g\hat{g}^{-1})(D_{n_{k-1}} + \lambda_n s_{n_k} - \dot{z}_{n_k} + s_{n_{k-1}}) \quad (29)$$

마찬가지로 시간 $t = (k-1)L$ 에서의 D_n 는 다음과 같이 표현된다.

$$D_{n_{k-1}} = d_{n_{k-1}} + (1 - g\hat{g}^{-1})(D_{n_{k-2}} + \lambda_n s_{n_{k-1}} - \dot{z}_{n_{k-1}} + s_{n_{k-2}}) \quad (30)$$

이제 (30)에서 (29)를 빼면, i), ii)에 의하여 $d_{n_k} - d_{n_{k-1}} \approx 0, \dot{z}_{n_k} - \dot{z}_{n_{k-1}} \approx 0, s_{i_k} - s_{i_{k-1}} \approx 0$ ($1 \leq i \leq n$)이므로 다음과 같은 식이 성립된다.

$$D_{n_k} - D_{n_{k-1}} = (1 - g\hat{g}^{-1})(D_{n_{k-1}} - D_{n_{k-2}}) \quad (31)$$

만약 임의의 상수 α, N 이 있을 때, $|1 - g\hat{g}^{-1}| \leq \alpha < 1$ 이라면,

$$|D_{n_k} - D_{n_{k-1}}| \leq \alpha |D_{n_{k-1}} - D_{n_{k-2}}| \leq \alpha^{k-N} |D_{n_k} - D_{n_{k-N}}| \quad (32)$$

이므로 $k \rightarrow \infty$ 일 때 $\alpha^{k-N} \rightarrow 0$ 이 된다. 따라서 $|D_{n_k} - D_{n_{k-1}}| \rightarrow 0$, 즉 $D_{n_k} \rightarrow D_{n_{k-1}}$ 가 되므로, 다음 식이 성립하게 된다.

$$D_{n_k} \approx D_{n_{k-1}} (= D_{n_{k-2}}) \quad (33)$$

즉, $L \rightarrow 0$ 이고 $k \rightarrow \infty$ 일 경우에는 시간지연추정 오차 $(D_n - D_{ne})$ 을 무시할 수 있다. ■

그러나, 실제로는 L 이 0일 수가 없고 k 가 ∞ 일 수도 없으므로 시간지연추정 오차는 조금씩 남게 된다. 이 오차를 수정하기 위하여 입력 u 에 스위칭 작용을 다음과 같이 추가한다.

$$u = \hat{g}^{-1}(-\lambda_n s_n + \dot{z}_n - D_{ne} - s_{n-1} - K \operatorname{sgn}(s_n)) \quad (34)$$

이 때 K 를 $|D_n - D_{ne}|_{\max}$ 보다 크게 잡으면 \dot{V} 는 다음과 같이 음으로 한정됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\lambda_1 s_1^2 - \lambda_2 s_2^2 - \dots - \lambda_n s_n^2 + s_1(D_1 - D_{1e}) + \dots \\ &\quad + s_{n-1}(D_{n-1} - D_{n-1e}) + s_n((D_n - D_{ne}) - K \operatorname{sgn}(s_n)) \\ &\leq -\lambda_1 s_1^2 - \lambda_2 s_2^2 - \dots - \lambda_n s_n^2 \\ &\quad + s_n((D_n - D_{ne}) - K \operatorname{sgn}(s_n)) \end{aligned} \quad (35)$$

즉, D_n 의 시간지연추정 오차가 있는 경우에도 각 s_i 는 모두 0으로 수렴하고, 따라서 각 상태변수 x_i 는 z_i 로, 특히 출력 $y(=x_1)$ 가 기준 궤적 $y_d(=z_1)$ 로 수렴하게 된다.

3. 노이즈의 영향

(21)에 나타난 z_i 의 설계 과정을 보면, 항상 z_{i-1} 의 미분이 포함되는 것을 알 수 있다. 그리고 입력 u 에는 z_n 이 포함된다. 그렇다면 z_2 에 포함된 $s_1 = x_1 - z_1$ 이

입력 u 에 가서는 $(n-1)$ 번 미분되는 셈이다. 더욱이, 시간지연추정 $D_{1e} = \dot{x}_1 - x_2$ 을 구하는 동안 x_1 은 또 한 번 미분된다. 즉, 출력 x_1 은 항상 시스템의 차수 n 만큼 미분되어야 한다. 마찬가지로 x_i 는 $(n-i)$ 번 미분된다.

실제 시스템에 본 제어 방법을 적용할 경우 보통 수치미분을 하게 되는데, 만약 출력 $y(=x_1)$ 에 노이즈가 있을 때 수치미분을 n 번 한다면 이 수치미분 오차가 매우 커질 수 있다. 즉, 노이즈에 민감한 반응을 보이게 된다. 이 경우 대부분은 저주파 통과필터(low-pass filter)를 사용함으로써 어느 정도 효과를 거둘 수 있다. 필터를 포함한 시스템의 안정성 증명은 참고문헌 [8]과 같은 과정을 사용하여 얻을 수 있다. 4장의 시뮬레이션에서도 노이즈의 영향을 고려하였는데, 노이즈가 있을 경우와 입력에 1차 저주파 통과필터를 사용한 경우를 비교 정리하였다.

IV. 시뮬레이션

본 연구에서 제안한 제어 법칙의 성능을 확인해 보기 위해, 모터로 단진자의 각도를 제어하는 시스템을 선정하여 시뮬레이션을 수행하였다. 시뮬레이션은 $g(x)$ 를 아는 경우와 모르는 경우, 노이즈가 존재하는 경우, 그리고 저주파통과필터가 사용되는 경우에 대해서 수행되었다.

1. 문제 정의

그림 1과 같이 모터로 단진자의 각도를 제어하는 시스템에 대하여 모터의 전기적 부분을 무시할 수 없는 경우를 다룬다. 제어 목적은 모터의 각도 θ 가 주어진 궤적을 따라가도록 하는 것이다.

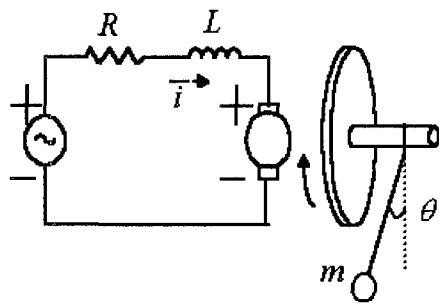


그림 1. 모터-단진자 제어 시스템.
Fig. 1. Motor-pendulum control system.

시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= \tau - mgl \sin\theta + Q_1 \\ \tau &= K_t i \\ L \frac{di}{dt} + Ri &= V_a + Q_2 \end{aligned} \tag{36}$$

I : 모터 회전자의 관성, l : 진자의 길이
 i : 아마추어 전류, L : 인덕턴스, R : 저항

K_t : 토크 상수, Q_1, Q_2 : 외란

V_a : 입력 전압, θ : 모터 회전자의 회전각

이 때 진자와 모터 축을 연결하는 막대는 질량이 거의 없다고 가정한다. 또한 진자는 점질량이라고 생각한다.

회전각 θ 를 x_1 , 회전 각속도 $\dot{\theta}$ 를 x_2 , 그리고 전류 i 를 x_3 , V_a 를 입력 u 라 하면

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + D_2(x) \\ \dot{x}_3 &= gu + d_3(x) = \hat{g}u + D_3(x) \end{aligned} \tag{37}$$

여기에서, 입력계수항 g, D_2, d_3, D_3 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} g &= \frac{K_t}{IL} \\ D_2 &= -\frac{mgL}{I} \sin(x_1) + \frac{Q_1}{I} \\ d_3 &= -\frac{R}{L} x_3 + \frac{K_t}{IL} Q_2 \\ D_3 &= (g - \hat{g}) + d_3 \end{aligned} \tag{38}$$

2. 제어 입력 설계

우선 유한하게 정의된 원하는 궤적 y_d 를 정한다. 그리고 (21), (34)에서 제안한 바와 같이 z_i, u 를 다음과 같이 설계한다.

$$\begin{aligned} z_1 &= y_d \\ z_2 &= -\lambda_1 s_1 + \dot{z}_1 \\ z_3 &= -\lambda_2 s_2 + \dot{z}_2 - D_{2e} - s_1 \end{aligned} \tag{39}$$

$$u = \hat{g}^{-1}(-\lambda_3 s_3 + \dot{z}_3 - D_{3e} - s_2 - K \operatorname{sgn}(s_3)) \tag{40}$$

이 때 D_2 는 연속 함수이므로 시간지연추정 오차 ($D_2 - D_{2e}$)는 무시할 수 있고, ($D_3 - D_{3e}$)는 입력의 스위칭 작용이 보상한다. 그러면, V 가 (17)와 같이 정의될 때, \dot{V} 는 다음과 같이 항상 0보다 작게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\bar{\lambda}_1 s_1^2 - \bar{\lambda}_2 s_2^2 - \lambda_3 s_3^2 \\ &\quad + s_3((D_3 - D_{3e}) - K \operatorname{sgn}(s_3)) \end{aligned} \tag{41}$$

따라서 각 s_i 는 모두 0으로 수렴한다. 즉, 출력 $y(=x_1)$ 는 주어진 궤적 $y_d(=z_1)$ 으로 수렴하고 상태 변수 x_2, x_3 도 어떤 한계 안에 있는 z_2, z_3 로 수렴한다.

3. 시뮬레이션 결과

각 파라미터의 값들은 다음과 같이 주었다.

$$\begin{aligned} y_d &= \sin 2t, g = 1 \\ D_1 &= -11 \sin(x_1) - 4x_1, D_2 = -x_3 + 5 \sin t \end{aligned}$$

시뮬레이션은 g 를 잘 아는 경우와 모르는 경우, 그리고 노이즈가 있는 경우와 저주파 통과 필터를 사용한 경우에 대하여 나누어 행하였다.

1) g 를 아는 경우이다. 이 때에 $\hat{g} = g$ 가 되고, 구체적인 계인은 다음과 같으며, 시뮬레이션 결과는 그림 2에 나타나 있다.

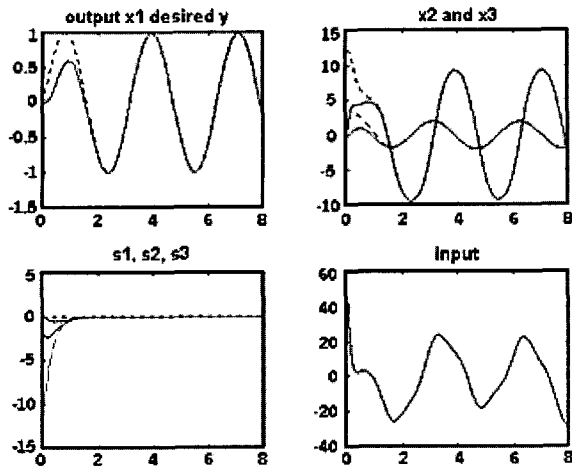


그림 2. 입력 계수항을 아는 경우의 시뮬레이션 결과.
Fig. 2. Simulation result: when $g(x)$ is known.

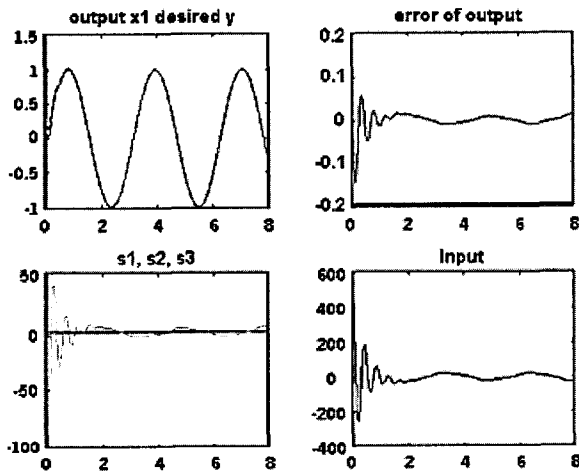


그림 3. 입력 계수항을 모르는 경우의 시뮬레이션 결과.
Fig. 3. Simulation result : when $g(x)$ is unknown.

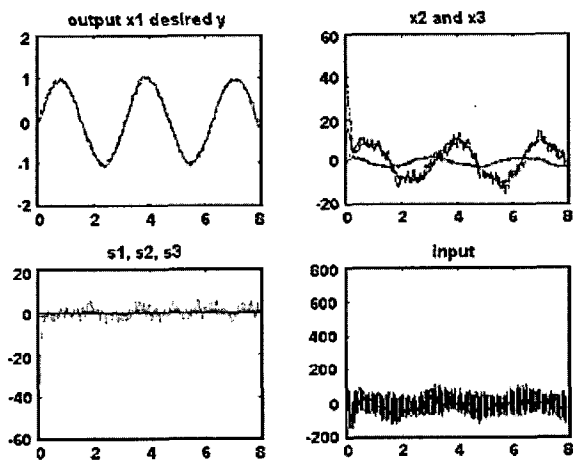


그림 4. 출력에 1% 노이즈가 있는 경우의 시뮬레이션 결과.
Fig. 4. Simulation result: when there is 1% noise in output.

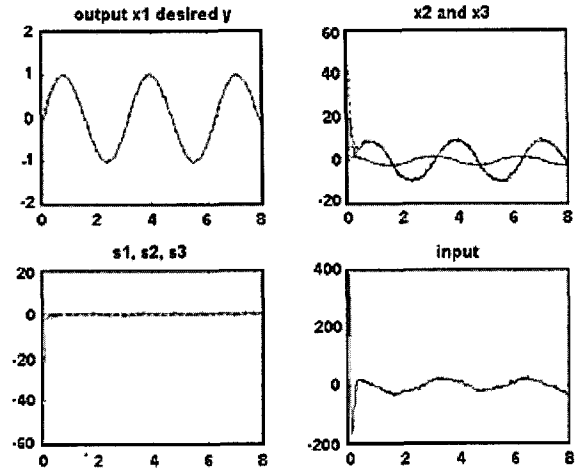


그림 5. 출력에 노이즈가 있을 때, 저주파 통과필터를 사용한 시뮬레이션 결과.
Fig. 5. Simulation result: there is 1% noise in output and low-pass-filter is applied for the noise.

$$\hat{g} = 1, K = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$$

2) g 를 모르는 경우, 즉 $\hat{g} \neq g$ 인 경우이다. 계인은 다음과 같이 정하였다. 시뮬레이션 결과는 그림 3에 있다.

$$\hat{g} = 6, K = 3, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 15$$

3) $\hat{g} \neq g$ 이고, 출력에 불규칙 노이즈(random noise)가 존재하는 경우이다. 보통 노이즈의 영향은 출력 크기의 1% 정도가 가장 큰 값으로 사료되므로[17], 노이즈의 크기는 출력 크기의 1%라고 간주하였다. 이때의 계인은 다음과 같이 하였다. 이때의 결과는 그림 4에 나타내었다.

$$\hat{g} = 2, K = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 10$$

4) 3)과 같은 조건이며, 다만 노이즈의 영향을 줄이기 위하여 다음과 같은 1차 저주파 통과필터를 사용하였다.

$$u = \frac{pu(t) + u(t-L)}{1+p} \quad \text{where } p = 0.05 \quad (42)$$

이 결과는 그림 5에서 볼 수 있다.

1)과 2)의 경우 모두 출력이 원하는 궤적을 잘 따라가고 있음을 볼 수 있다. 3)의 경우 z_3, s_3 와 입력이 매우 noisy하게 나타났는데, 이것은 3.3절에서 설명한 바와 같이 출력이 여러 번 미분되었기 때문이다. 노이즈가 존재하는 경우에 1차 저주파 필터를 사용한 4)의 경우, 출력 뿐 아니라 입력, 각 상태변수, s_i 에서 모두 노이즈의 영향이 상당히 줄었음을 볼 수 있다.

V. 결론

본 연구에서는 입력정합조건을 만족하지 않는 단일 입력 비선형 시스템의 제어를 위해, 시간지연추정을 이용한 강인 제어 기법을 제안하였다. 가상 입력의 개념을

도입하여 입력정합조건을 만족하지 못하는 불확실성을 완전하게 다룰 수 있도록 하였고, 시간지연추정을 사용함으로써 입력정합조건을 만족하지 않는 불확실성에 대한 특별한 구조적 형태나 그 범위 등의 정보 없이도 출력을 원하는 궤적으로 수렴시킬 수 있었다. 따라서, 본 논문에서 다룬 비선형 시스템은 기존의 입력정합조건을 만족하지 않는 불확실성을 다룬 연구에서 대상으로 한 시스템보다 좀 더 넓은 범위를 다룬다고 할 수 있다.

제어 법칙은 Liapunov 안정성 증명법을 응용하여 유도하였다. 가상입력과 시간지연추정, 스위칭 작용이 입력정합 조건을 만족하지 않는 불확실성을 보상하기 위해서 사용되었다. 또한, 저주파 통과필터를 적용하여 실제 구현과정에서 나타날 수 있는 노이즈에 대한 민감성을 보완하였다.

제안된 제어기법을 적용하여 모터-단진자 시스템의 위치제어를 시뮬레이션 하였을 때, 안정하면서도 우수한 명령추종 성능을 얻을 수 있었다.

참고문헌

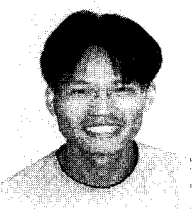
[1] Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 2nd ed. Prentice Hall, 1996.
 [2] Jean-Jacques E. Slotine, Weiping Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
 [3] Jean-Jacques E. Slotine and J. K. Hedrick, "Robust Input-Output feedback linearization", *Int. J. Control*, vol. 57, no. 5, pp. 1133-1139, 1993.
 [4] S. K. Spurgeon and R. Davies, "A nonlinear control strategy for robust sliding mode performance in the presence of unmatched uncertainty", *Int. J. Control*, vol. 57, no. 5, pp. 1107-1123, 1993.
 [5] 김경수, 오시환, 박영진, "Sliding mode control of linear systems with matched uncertainty", *대한기계학회 춘계학술대회논문집 A*, pp. 423-427, 1997.

[6] Kwan, C.-M, "Sliding mode control of linear systems with mismatched uncertainties", *Automatica*, vol. 31, no. 2, pp. 303-307, 1995.
 [7] Phadke, S. B., "Comments on sliding mode control of linear systems with mismatched uncertainties", *Automatica*, vol. 32, no. 2, pp. 285-286, 1996.
 [8] K. Youcef-Toumi and S.-T. Wu, "Input/Output linearization using time delay control", *Transactions of the ASME*, vol. 114, pp. 10-19, 1992.
 [9] H. Elmalı and N. Olgac, "Implementation of sliding mode control with perturbation estimation (SMCPE)" *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 4, no. 1, pp. 79-85, 1996.
 [10] J. Y. Hung, W. Gao and J. C. Hung, "Variable structure control : A survey", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 2-21, 1993.
 [11] Ernest O. Doebelin, "Measurement systems: Application and design", 4th ed. McGraw-Hill, 1990.
 [12] Bechwith, Marangoni and Lienhard, *Mechanical Measurements*, 5th ed. Addison Wesley, 1993.
 [13] C. D. Todd, *The Potentiometer Handbook*, McGraw-Hill, 1975.
 [14] H. N. Norton, *Sensor and Analyzer Handbook*, Prentice Hall, 1982.
 [15] 한국 표준연구소, *센서 개발을 위한 사전조사 연구*, 과학기술처, 1988.
 [16] J. A. Alloga and A. Stuart, *Transducers : Theory & Applications*, Reston Publishing Company, 1984.
 [17] 전보경, "Matching Condition을 만족하지 않는 시스템에 대한 강인제어", 석사학위논문, 2000.
 [18] P. A. Ioannou and J. Sun, *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall, 1996.



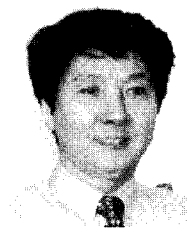
전 보 경

1998년 KAIST 기계공학과 졸업(공학사). 2000년 동대학원 졸업(공학석사). 2000.3~현재 동대학원 박사과정. 주관심분야는 서비스 로봇, 비선형 강인제어.



박 주 이

1991년 KAIST 기계공학과 졸업(공학사). 1993년 동대학원 졸업(공학석사). 1993~현재 동대학원 박사과정. 주관심분야는 입력다듬기 기법, 서비스 로봇, 범용 로봇 제어기.



장 평 훈

1774년 서울대 공대 기계공학과 졸업(공학사). 1977년 동대학원 졸업(공학석사). 1987년 MIT 기계공학과 졸업(공학박사). 1987~1995 KAIST 기계공학과 조교수. 1995~현재 동대학 부교수. 주관심 분야는 비선형 강인관측기/제어기, 입력다듬기 기법, 시스템 모델링, 유공압 시스템 제어, 여유자유도 로봇, 서비스 로봇, 범용 로봇 제어기.