

# 高精確度 數值技法을 利用한 河川 遷移流 解析 I. : 模型 開發

## Numerical Analysis of Transcritical Flow in Open Channels Using High-Resolution Scheme I. : Model Development

김 원\* / 한 건 연\*\*  
Kim, Won / Han, Kun Yeun

### Abstract

Transcritical flow is a term intended to denote the existence of both supercritical and subcritical flows within a computational domain. The major problems that need to be addressed while modeling transcritical flows include handling the differing features of signal propagation in subcritical and supercritical flow regions and maintaining conservation. The present study proposes the implicit ENO method as a high-resolution scheme for transcritical flow. This implicit ENO scheme is based on the ENO method, a new class of uniformly high-order-accurate essentially non-oscillatory implicit scheme, which has the advantage of unconditional stability. The implicit ENO scheme has not been used for the transcritical flow in open channel until now. As a result of application to the hypothetical dam-break flow, the implicit ENO scheme was proved to produce accurate results with good robustness even though in the case of very strong shock wave.

*keywords* : river, transcritical flow, implicit ENO scheme, high-resolution scheme, dam-break flow

### 요 지

천이류는 하나의 계산 영역내에서 사류와 상류가 동시에 발생하는 흐름을 의미하는 용어이다. 천이류 해석 모형 개발에서 중요한 사항은 상류와 사류 영역에서 발생하는 신호의 전파특성을 정확하게 반영할 수 있어야 한다는 것과 보존성을 유지해야 한다는 것이다. 본 연구에서는 지금까지 하천 천이류 해석을 위해 적용된 적이 없는 음해적 ENO 기법을 이용하여 새로운 모형을 개발하였다. 음해적 ENO 기법은 전 구간에 걸쳐 수치진동없이 고 정확도가 유지될 수 있는 장점을 지닌 수치기법인 ENO 기법과 수치적으로 무조건적 안정성이 보장되는 장점을 지닌 음해법을 결합한 기법이다. 본 연구에서 개발한 모형을 가상적인 댐붕괴파의 해석에 적용한 결과 매우 강한 천이류가 발생하는 경우에도 안정적으로 정확한 해를 구할 수 있는 것으로 나타났다.

**핵심용어** : 하천, 천이류, 음해형 ENO 기법, 고정확도 수치기법, 댐붕괴파

\* 한국건설기술연구원 수자원환경연구부 선임연구원  
Senior Researcher, Korea Institute of Construction Technology, Kyonggido 411-712, Korea  
(E-mail : wonkim@kict.re.kr)  
\*\* 경북대학교 공과대학 토목공학과 교수  
Prof., Dept. of Civil Engineering, Kyungpook National University, Daegu 702-701, Korea

## 1. 서 론

최근 우리 나라에서는 빈도나 규모면에서 과거에는 예상하지 못했던 큰 호우가 발생하여 막대한 홍수피해를 유발시키고 있다. 특히, 임진강 유역에서는 1996년과 1998년, 그리고 1999년의 연속적인 대규모 홍수로 많은 인명과 재산피해가 발생한 바 있다. 홍수피해를 경감하기 위한 방법에는 댐, 제방, 유수지 등의 건설을 통한 구조적인 방법과 홍수예경보, 홍수보험 등의 비구조적인 방법이 있다. 이 중 댐과 제방은 홍수피해를 줄이기 위한 가장 일반적인 방법으로 우리나라의 경우 대부분 이 방법에 의해 홍수피해를 예방하고 있다. 댐이나 제방은 설계홍수량 이하의 경우에는 비교적 안전하게 홍수를 방어할 수 있으나 이보다 큰 규모의 홍수가 발생하는 경우에는 이들 시설의 붕괴로 많은 피해를 겪게 된다. 실제로 최근의 대규모 홍수로 인해 국내의 여러 저수지와 제방이 붕괴된 바 있다. 1996년과 1999년에는 연천 소수력댐이 붕괴되었으며, 1998년의 경우 전국에서 40개, 1999년의 경우 5개의 소규모 농업용 저수지가 큰 손상을 입은 바 있다(수해방지대책기획단, 1999). 특히 1999년 홍수시에는 화천댐이 월류 위기에 이른바 있다. 홍수로 인한 피해를 최소화하기 위해서는 댐이나 제방의 붕괴를 사전에 예방하는 것이 가장 바람직하지만 붕괴시의 상황을 예측하여 홍수피해를 최소화하는 것도 매우 중요하다.

댐 붕괴시에는 일반적인 강우-유출에 의해서 하천에서 발생하는 흐름과는 다른 형태의 흐름이 형성된다. 즉, 일반적으로 하천의 흐름은 대부분 상류로 형성되지만 댐 붕괴시에는 매우 빠른 속도로 전파되는 충격파(shock wave)가 형성되면서 상류와 사류가 혼재된 불연속 흐름인 천이류가 발생하게 된다(Meselhe, 1994). 댐이나 제방붕괴 외에도 하천흐름에서 천이류가 발생하는 경우는 댐 여수로의 흐름, 보를 월류하는 흐름, 하천 협착부의 흐름, 급경사 하천의 흐름 등이 있다. 그 외에도 자연적인 하천 협착부, 교량 등으로 인한 하천 협착부, 급경사 하천에서 완경사 하천으로 변화하는 구간 등에서 발생하는 흐름의 일부는 연속적인 흐름이 아니라 불연속적인 흐름으로 상류와 사류가 동시에 발생하는 천이류이다.

본 연구에서는 천이류의 해석을 위하여 물리적인 전파특성을 정확하게 반영할 수 있는 상류이송기법(upwind scheme)이며, 2차 정확도 이상이 전 구간에서 동일하게 유지되면서도 수치진동이 발생하지 않는

고정확도(high resolution) 기법인 ENO(Essentially Non-Oscillatory) 기법을 이용하여 천이류 해석모형을 개발하였다. ENO 기법은 균일한 고정확도가 유지되며 수치진동이 발생하지 않기 때문에 불연속구간이 포함된 흐름을 해석하는데 적합한 것으로 알려져 있다(Dolezal과 Wong, 1995). ENO 기법은 기체동역학 분야에서 개발되어 여러 경우의 유체 흐름해석에 적용된 바 있으며 최근에는加重 ENO 기법이 개발되었다(Shu, 1997). Yang (1991)은 양해적 ENO와 음해적 ENO 기법을 2차 정확도와 3차 정확도로 기체동역학 분야에 적용한 바 있다. 하천흐름분야에 ENO 기법이 적용된 예는 많지 않다. Yang 등(1993)은 양해적 ENO 기법을 이용하여 각각 2차 정확도와 3차 정확도로 가상적인 하도에 대하여 1차원과 2차원 하천흐름을 해석한 바 있다. Jin과 Fread(1997)는 1차 정확도의 양해법 ENO 기법을 이용하여 실제 하천흐름에서 발생하는 충격파를 해석한 바 있다. Nujic(1995)은 새로운 형태의 ENO 기법을 1차원 및 2차원 하천흐름에 적용한 바 있다.

국내에서는 댐붕괴에 대한 연구가 주로 이루어졌으며(한건연, 1987; 이종태 등, 1987; 이길성, 1987) 한건연 등(1994)은 상류-사류의 천이류 해석을 위한 Preissmann 기법의 개선방안을 제시하였고, 한건연 등(1996a, 1996b)은 유한요소법을 이용하여 점변류와 급변류를 해석한 바 있다. 이길성 등(1998)은 유한체적법을 이용하여 2차원 충격파를 모의한 바 있으며 김원 등(1998)은 천이류의 해석을 위하여 음해적 MacCormack 기법을 사용한 바 있다. ENO 기법은 천이류의 고정확도 해석을 위해 개발된 기법으로 지금까지 국내에서는 사용된 적이 없으며 국외에서도 양해법의 형태로만 하천 천이류 해석을 위하여 사용되었다(김원, 1999).

본 연구에서는 수치진동없이 전구간에 걸쳐 고정확도가 동일하게 확보되어 불연속구간이 포함된 흐름의 고정확도 해석에 적합한 것으로 알려진 ENO 기법과 수치적으로 무조건적 안정성이 보장되는 음해법을 결합하여 새로운 형태의 음해적 ENO 기법을 구축하고 이를 바탕으로 수치모형을 구성하였다. 또한 음해적 ENO 모형을 가상적인 댐붕괴의 해석에 적용하여 모형의 정확도와 안정성을 확인하였다.

## 2. 천이류의 특성

일반적으로 평상시 하천에서 발생하는 유량은 크지

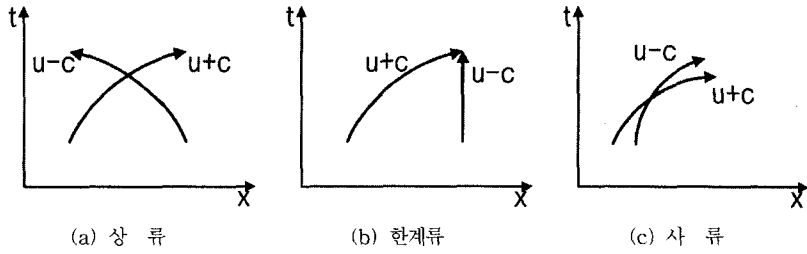


그림 1. 특성선의 전파특성에 따른 흐름의 분류

않으며 하상경사가 완만하기 때문에 주로 상류상태의 흐름이 형성된다. 그러나 보와 같은 구조물을 월류하는 흐름의 경우, 댐붕괴로 인한 홍수파의 경우, 홍수시 유량이 매우 큰 경우, 하상경사가 급한 경우, 댐 여수로의 경우 및 교량과 같은 하천구조물로 인해 하폭이 급격히 좁아지는 경우 등에서는 사류가 발생할 수 있다. 또한 각종 수로 등에서 갑작스러운 수문조작에 의해서도 사류가 발생한다. 하천에서 사류가 발생한다는 것은 대부분의 경우에 사류만 발생하는 것이 아니라 상류, 한계류, 사류 등이 하도의 일정 구간내에서 동시에 발생하는 것을 의미하는데 이와 같은 흐름을 천이류로 정의한다.

상류는 흐름의 속도가 파속보다 느린 흐름으로 식 (1)과 같이 정의되는 Froude수가 1 보다 작은 경우에 해당하는 흐름이다. 사류는 유속이 파속보다 빠른 경우로서 Froude수가 1 보다 큰 경우를 말한다. 한계류는 유속과 파속이 같아서 Froude수가 1 이 되는 흐름이다.

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gA/B}} = \frac{u}{c} \quad (1)$$

여기서  $u$  는 평균 유속,  $A$  는 흐름단면적,  $B$  는 수면폭,  $c$  는 장파의 전파속도이다.

흐름의 구분은 특성선의 전파속도와 직접적인 관련이 있는데 특성선의 전파속도( $\lambda_1, \lambda_2$ )는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lambda_1 = u + c, \quad \lambda_2 = u - c \quad (2)$$

그림 1에서와 같이 상류(常流)인 경우에는 두 특성선이 서로 다른 부호를 갖기 때문에 정보의 전달도 상류(上流)와 하류(下流)의 두 방향으로 이루어진다. 사류

인 경우에는 두 특성선의 전파속도가 모두 동일한 부호를 가지게 되며 정보전달은 하류 한 방향으로만 발생하게 된다.

상류와 사류가 혼재하는 천이류를 수치적으로 해석하기 위해서는 상류, 한계류 및 사류의 전파특성을 반영할 수 있는 수치기법을 이용해야 한다. 특히 한계류가 발생하는 지점은 수치기법상 불안정요소가 발생하는 원인이 되기 때문에 정확한 처리기법이 필요하게 된다. 하천구간 내에 상류와 사류가 함께 존재하더라도 한계수심이 되는 지점을 알 수 있다면 두 영역이 분리되는 지점에 내부경계조건을 부여하여 전체 흐름을 해석할 수 있다. 그러나 실제에서 발생하는 흐름에서는 한계수심의 발생, 이동 등을 예측할 수 없는 경우가 대부분이다. 즉 대부분의 천이류에서는 불연속점이 이동하기 때문에 유량이나 하천조건에 따른 도수의 발생 여부, 이동 여부 등을 미리 결정할 수 없다. 따라서 수치기법 자체에서 이와 같은 특성을 반영할 수 있는지 여부는 천이류의 해석에서 가장 중요한 부분이다.

### 3. 음해적 ENO 기법

1차원 하천흐름의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + S = 0 \quad (3a)$$

여기서,  $U, F, S$  항은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$U = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ -gI_2 - gA(S_o - S_f) \end{pmatrix} \quad (3b)$$

여기서  $A$  는 통수단면적,  $Q$  는 유량,  $g$  는 중력가속도,  $S_o$  는 하상경사,  $S_f$  는 마찰경사,  $t$  는 시간,  $x$  는 거리이다. 또한,  $I_1$  과  $I_2$  는 각각 단면 1차 모멘트와 종단방향에 따른 하폭의 변화를 고려해 주는 항이다.

식 3(a)에서  $F$  의 Jacobian으로  $J$  를 정의하면  $J$  는 식 (4)과 같다.

$$J = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{pmatrix} \quad (4)$$

여기서  $h$  는 수심이다.

$J$  의 고유값을 구하면 식 5(a), 5(b)와 같이 특성선의 전파속도가 된다.

$$\lambda_1 = u + c \quad (5a)$$

$$\lambda_2 = u - c \quad (5b)$$

여기서  $\lambda_1$  과  $\lambda_2$  는 正, 負 방향의 특성선의 전파속도이고,  $c$  는 파속이다.

고유벡터를 이용하여  $J$  를 대각화시키고 양의 성분과 음의 성분으로 분리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J = J^+ + J^- \quad (6)$$

식 (6)에서  $J$ ,  $J^+$ ,  $J^-$  는 각각 다음 식과 같이 나타낸다.

$$J = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ u+c & -(u-c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(u-c) & 1 \\ -(u+c) & 1 \end{pmatrix} \quad (7a)$$

$$J^+ = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ u+c & -(u-c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^+ & 0 \\ 0 & \lambda_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(u-c) & 1 \\ -(u+c) & 1 \end{pmatrix} \quad (7b)$$

$$J^- = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ u+c & -(u-c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^- & 0 \\ 0 & \lambda_2^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(u-c) & 1 \\ -(u+c) & 1 \end{pmatrix} \quad (7c)$$

여기서  $\lambda_i^+$  와  $\lambda_i^-$  는 식 8(a)와 8(b) 같이 정의된다.

$$\lambda_i^+ = \max(\lambda_i, 0) = \frac{1}{2}(\lambda_i + |\lambda_i|) \quad (8a)$$

$$\lambda_i^- = \lambda_i - \lambda_i^+ \quad (8b)$$

$\lambda_i^-$  는 식 8(c)와 같이 나타낼 수도 있다.

$$\lambda_i^- = \min(\lambda_i, 0) = \frac{1}{2}(\lambda_i - |\lambda_i|) \quad (8c)$$

이와 같은 흐름을 분할은 흐름 방향이 상류에서 하류 또는 하류에서 상류 등으로 바뀔 때 자동적으로 차분식을 바꿔 주기 때문에 상류와 하류가 동시에 존재하는 전이류의 경우에 흐름의 상황을 정확하게 모의할 수 있게 한다.

식 3(a)에서  $S$  의 Jacobian으로  $G$  를 정의하면 비균일 하도에 대한  $G$  는 식 (9)와 같다(Meselhe, 1994).

$$G = \frac{\partial S}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g \frac{A}{B^2} \frac{\partial B}{\partial x} + g(S_o - S_f) + 2gA \frac{Q_1 Q_2}{K^3} \frac{\partial K}{\partial A} & -\frac{2QA}{K^2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

여기서  $B$  는 하폭,  $K = (1/n)AR^{2/3}$ ,  $n$  은 조도계수,  $R$  은 경심이며  $\partial K/\partial A$  는 식 (10)과 같이 정의된다.

$$\frac{\partial K}{\partial A} = \frac{1}{n} \frac{\frac{5}{3} A^{2/3} (B + 2A/B) - 2A^{5/3}/B}{(B + 2A/B)^2} \quad (10)$$

식 (6)과 (9)를 이용하여 지배방정식인 식 3(a)를 음해적으로 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left[ I + \Delta t \alpha \left( \frac{\partial J^+}{\partial x} + \frac{\partial J^-}{\partial x} + G^n \right) \right] \Delta U^{n+1} \\ & = -\Delta t \left( \frac{\partial F}{\partial x} + S \right)^n \end{aligned} \quad (11)$$

여기서  $I$  는 단위행렬,  $\Delta t$  는 시간격자 크기,  $\alpha$  는 시

간가중치이며  $\Delta U^{n+1} = U^{n+1} - U^n$  이다. 식 (11)의 좌항에 있는 편미분항은 일반적인 수학적 표기와는 달리 다음 식과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (J^{+n} \Delta U^{n+1}) \\ &= \frac{J_i^{+n} \Delta U_i^{n+1} - J_{i-1}^{+n} \Delta U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (J^{-n} \Delta U^{n+1}) \\ &= \frac{J_{i+1}^{-n} \Delta U_{i+1}^{n+1} - J_i^{-n} \Delta U_i^{n+1}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (12b)$$

ENO 기법에서는 식 (11)의 우항에 나타나는  $\partial F / \partial x$ 를 식 (13)과 같이 정의한다.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (\hat{J}^+ + \hat{J}^-) \frac{\partial F^M}{\partial x} \quad (13)$$

여기서  $\hat{J}^+$  과  $\hat{J}^-$  은 정규화된 Jacobian으로 식 (14)와 같이 정의되며  $F^M$  은 식 3(b)에서 정의되는 흐름률 벡터  $F$  를 수정한 형태이다.

$$\hat{J}^\pm = T \text{diag}(\hat{\lambda}_i^\pm) T^{-1} \quad (14)$$

여기서  $T$  는 대각변환행렬,  $\text{diag}$  는 대각행렬을 의미하며,  $\hat{\lambda}_i^\pm$  는 식 (15)와 같이 정의된다.

$$\hat{\lambda}_i^\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \text{sgn} \lambda_i) \quad (15)$$

여기서  $\text{sgn}$  은 식 (16)과 같은  $\text{sign}$  함수이고,  $\lambda_i$  는 특성선의 전파속도이다.

$$\text{sgn} \lambda_i = \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \quad (16)$$

식 (13)에서  $\hat{J}^+$  와  $\hat{J}^-$  는 식 (17)과 같은 특성을 지니고 있다.

$$\hat{J}^+ + \hat{J}^- = I \quad (17)$$

$\hat{J}^\pm$  는 식 (18)과 같이 구성된다.

$$\hat{J}^\pm = \begin{bmatrix} JA & JB \\ JC & JD \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서,

$$JA = -\frac{u}{c} \left( \frac{\hat{\lambda}_1^\pm - \hat{\lambda}_2^\pm}{2} \right) + \left( \frac{\hat{\lambda}_1^\pm + \hat{\lambda}_2^\pm}{2} \right) \quad (18a)$$

$$JB = \frac{1}{c} \left( \frac{\hat{\lambda}_1^\pm - \hat{\lambda}_2^\pm}{2} \right) \quad (18b)$$

$$JC = \frac{(c^2 - u^2)}{c} \left( \frac{\hat{\lambda}_1^\pm - \hat{\lambda}_2^\pm}{2} \right) \quad (18c)$$

$$JD = \frac{u}{c} \left( \frac{\hat{\lambda}_1^\pm - \hat{\lambda}_2^\pm}{2} \right) + \left( \frac{\hat{\lambda}_1^\pm + \hat{\lambda}_2^\pm}{2} \right) \quad (18d)$$

$F^M$  은 수정 흐름률(flux) 벡터로서  $F^M = F$  가 되면 1차 정확도의 ENO 기법이 된다.

본 연구에서는 음해적 ENO 기법의 구성을 위해 식 (11)의  $\partial F / \partial x$ 에 식 (13)으로 정의되는 수식을 적용하였다. 즉 음해법의 장점과 ENO 기법의 장점을 결합하여 음해적 ENO 기법을 구성한 것이다. ENO 기법은 식 (17)에서 나타나는 바와 같이 기본방정식에는 변화를 주지 않으면서도 특성선의 전파속도에 따라 차분식을 변화시킬 수 있는 장점이 있다. Beam-Warming 기법에서는 특성선의 전파속도에 대한 고려를 위해 기본방정식을 변화시켰으며 이로 인해 기본방정식이 비보존성의 형태가 되어 도수의 발생위치를 정확하게 계산하지 못하는 한계를 갖게 된다. 이를 극복하기 위해 변형된 식을 사용하기도 하지만 이 식에서도 기본방정식을 변화시켜야 하는 단점이 있다(Jha 등, 1996). 이에 비해 ENO 기법은 대부분의 기법들이 가지는 비보존성의 문제가 없기 때문에 특성선의 전파속도를 고려할 수 있으며 이와 더불어 2차나 3차 등의 고정확도로 손쉽게 확장할 수 있는 장점이 있다. 또한 ENO 기법은 불연속 구간에서 비물리적인 수치진동의 발생없이 균일한 고정확도를 유지할 수 있는 장점이 있다. 이와 같은 장점 때문에 ENO 기법은 천이류를 정확하게 계산할 수 있다. Jin과 Fread(1997)는 1차 정확도의 양해적 ENO 기법으로 하천흐름을 해석한 바 있는데 실제 하천에 적용하여 좋은 결과를 얻은 바 있다.

2차 ENO 기법은  $F^M$ 을 식 (19)와 같이 정의함으로써 구성된다(Yang 등, 1993).

$$F_i^M = F_i^{ENO2} = F_i^n + E_i^n \quad (19)$$

벡터  $E$ 의 성분은 식 (20)과 같이 정의된다.

$$e_i = m \left[ \tilde{e}_{i-1/2} + \varepsilon \overline{m}(\Delta_- \tilde{e}_{i-1/2}, \Delta_+ \tilde{e}_{i-1/2}), \right. \\ \left. \tilde{e}_{i+1/2} - \varepsilon \overline{m}(\Delta_- \tilde{e}_{i+1/2}, \Delta_+ \tilde{e}_{i+1/2}) \right] \quad (20)$$

여기서  $\varepsilon$ 은 상수,  $\Delta_{\pm} e_i = \pm(e_{i\pm 1} - e_i)$ 을 나타낸다.

식 (20)에서  $\tilde{e}_{i+1/2}$ 는 다음 벡터의 성분을 나타낸다.

$$\tilde{E}_{i+1/2} = \text{sgn } J_{i+1/2} (I - \eta |J_{i+1/2}|) \Delta_{i+1/2} F/2 \quad (21)$$

여기서  $\eta = \Delta t / \Delta x$ 이다.

식 (21)에서  $\text{sgn } J_{i+1/2}$ 와  $|J_{i+1/2}|$ 은 각각 다음 식 22(a)와 22(b) 같이 정의된다.

$$\text{sgn } J_{i+1/2} = T \text{diag}(\text{sgn } \lambda_{i+1/2}) T^{-1} \quad (22a)$$

$$|J_{i+1/2}| = T \text{diag}(|\lambda_{i+1/2}|) T^{-1} \quad (22b)$$

Minmod 함수  $m$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$m(a, b) = \begin{cases} \min(|a|, |b|), & \text{sgn } a = \text{sgn } b = s \text{인 경우} \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases} \quad (23)$$

여기서  $a, b, s$ 는 임의의 변수이다.

식 (20)에서  $\overline{m}$ 는 식 (24)와 같이 정의된다.

$$\overline{m} = \begin{cases} a, & |a| \leq |b| \text{인 경우} \\ b, & |a| > |b| \text{인 경우} \end{cases} \quad (24)$$

식 (20)에서  $\varepsilon$ 이 0이면 2차 정확도의 TVD(Total Variation Diminishing) 기법이 되며,  $\varepsilon$ 가 0.5이면 2차 정확도의 ENO 기법이 된다.

식 3(b)에서  $S$ 항은 하상경사, 하상마찰, 종단방향

에 대한 하폭의 변화 등을 나타내는 항이다. 천이류의 수치계산에서 중요하게 고려해야 할 사항은 이들 항의 계산방법이다. 이와 같은 항이 포함되지 않는 이상적인 경우에 계산은 비교적 단순해지지만 실제 하천에서는 이들 항이 흐름계산에 큰 영향을 미치게 되며 이로 인해 계산은 복잡해진다. 본 연구에서는 비균일 하도에서 발생하는 천이류의 해석을 대상으로 하기 때문에 이들 항의 효과적인 처리는 매우 중요하다. 즉, 비균일 직사각형 하도인 경우 하상경사  $S_o$ 는 다음과 같이 정의될 수 있다(Garcia-Navarro와 Vazquez-Cedon, 1997).

$$S_{oi} \approx \frac{1}{2} (S_{o, i+\frac{1}{2}} + S_{o, i-\frac{1}{2}}) \quad (25)$$

식 (25)에서  $S_{o, i+\frac{1}{2}}$ 는 식 (26)과 같이 정의된다.

$$S_{o, i+\frac{1}{2}} = -\frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta x} \quad (26)$$

여기서  $z$ 는 하상표고이다.

또한, 식 (3b)의  $I_2$ 는 식 (27)과 같이 정의될 수 있다.

$$I_{2i} \approx \frac{1}{2} (I_{2, i+\frac{1}{2}} + I_{2, i-\frac{1}{2}}) \quad (27)$$

식 (27)에서  $I_{2, i+\frac{1}{2}}$ 는 식 (28)과 같다.

$$I_{2, i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} h_i^2 \frac{B_{i+1} - B_i}{\Delta x} \quad (28)$$

식 (3b)에서 하상마찰항은 식 (29)와 같이 정의될 수 있다(Meselhe, 1994).

$$gAS_{fi} = \frac{g}{2} \left( \frac{A_{i+1} + A_i}{2} \right) \left( \frac{Q_{i+1}|Q_{i+1}|}{K_{i+1}^2} + \frac{Q_i|Q_i|}{K_i^2} \right) \quad (29)$$

최종적으로 음해적 ENO 기법을 이용한 수치모형의 지배방정식은 식 (30)과 같이 나타낼 수 있다.

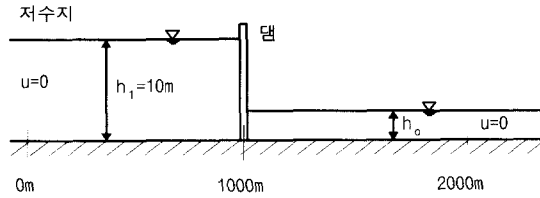


그림 2. 댐 붕괴파 해석을 위한 조건

$$\begin{aligned} & \left[ I + \Delta t \alpha \left( \frac{\partial J^{+n}}{\partial x} + \frac{\partial J^{-n}}{\partial x} + G^n \right) \right] \Delta U^{n+1} \\ & = -\Delta t \left\{ \left( \hat{J}^+ + \hat{J}^- \right) \frac{\partial F^M}{\partial x} + S \right\}^n \end{aligned} \quad (30)$$

식 (30)을 전개하여 정리하면 식 (31)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & A_i \Delta U_{i-1}^{n+1} + B_i \Delta U_i^{n+1} + C_i \Delta U_{i+1}^{n+1} \\ & = \Delta U_i^n \end{aligned} \quad (31)$$

여기서  $A_i$ ,  $B_i$  및  $C_i$ 는 각각 다음 식과 같이 정의된다.

$$A_i = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} (J_{i-1}^{+n}) \quad (31a)$$

$$B_i = I + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} (J_i^{+n} - J_i^{-n}) + \alpha \Delta t G_i^n \quad (31b)$$

$$C_i = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} (J_{i+1}^{-n}) \quad (31c)$$

본 연구에서는 FORTRAN 90을 이용하여 수치모형을 개발하였는데, 주프로그램과 9개의 부프로그램으로 구성되어 있다.

#### 4. 모형의 검증

모형의 검증을 위해 본 연구에서 개발한 음해적 ENO 모형을 균일하도에서 발생하는 댐 붕괴파 해석에 적용하였다. 마찰없는 수평수로상에서 급격한 댐 붕괴로 인해 발생하는 충격파의 전파를 음해적 ENO 모

형을 이용하여 계산하였다. 그림 2는 개략적인 댐상황을 나타낸 것으로  $h_1$ 은 댐상류부의 수위를 나타내며  $h_0$ 은 댐하류부의 수위를 나타내고 있다. 적용된 흐름 방향의 격자 간격수는 320개이며 댐 파괴 60초 후의 상황에 대한 해석을 실시하였다. 본 연구에서는 댐 상류부 수심  $h_1$ 은 10.0 m로 고정시키고 하류부 수심  $h_0$ 를 5.0 m에서 0.005 m까지 변화시키면서 음해적 ENO 모형을 검증하였다. 본 연구에서 사용한 해석해는 Stoker(1957)에 의해 제시된 방법을 사용하여 계산된 것이다.

##### (1) $h_0/h_1 = 0.5$ 인 경우

그림 3은  $h_0/h_1 = 0.5$ 인 경우의 홍수와 전파를 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 ENO 기법과 Beam-Warming 기법은 수치진동의 발생없이 해석해와 유사하게 나타나고 있다. 그러나 FLDWAV(Jin과 Fread, 1997)에 의해 계산된 결과는 해석해와 비교적 큰 차이를 보이고 있다. 그림 4는  $h_0/h_1 = 0.5$ 인 경우의 유속의 전파를 나타낸 것이다. 수위와 마찬가지로 불연속점 근처에서는 해석해와 차이가 있지만 그 외의 구간에서는 ENO 기법이 유속의 전파양상도 정확하게 재현하고 있음을 알 수 있다. 음해적 ENO 기법과 Beam-Warming 기법간에는 큰 차이가 나타나지 않고 있다.

##### (2) $h_0/h_1 = 0.05$ 인 경우

그림 5는  $h_0/h_1 = 0.05$ 인 경우의 홍수와 전파를 나타낸 것이다. ENO 기법에 의한 결과는 해석해와 거의 유사하게 나타나고 있으나 Beam-Warming 기법에 의한 계산결과는 해석해와 차이를 보이고 있다. FLDWAV 모형에 의한 계산결과는  $h_0/h_1 = 0.05$ 보다 작아지게 되면 계산의 불안정과 함께 해의 발산이 발생하였다. 그림 6은  $h_0/h_1 = 0.05$ 인 경우의 유

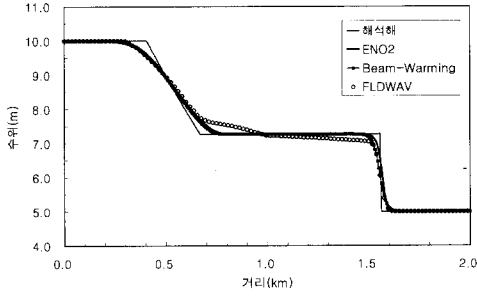


그림 3.  $h_o/h_1 = 0.5$ 인 경우의 댐 붕괴파 전파

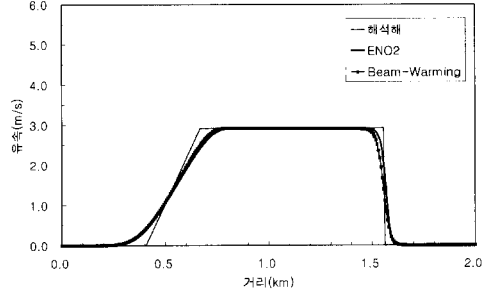


그림 4.  $h_o/h_1 = 0.5$ 인 경우의 유속분포

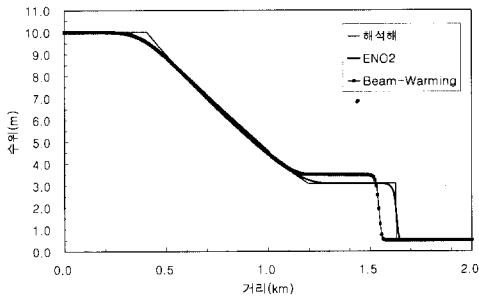


그림 5.  $h_o/h_1 = 0.05$ 인 경우의 댐 붕괴파 전파

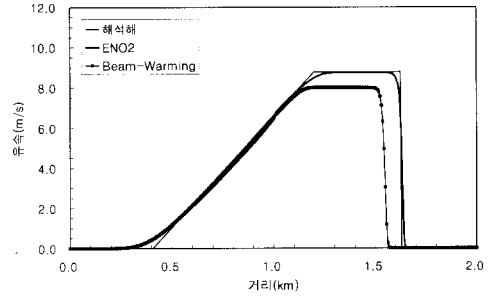


그림 6.  $h_o/h_1 = 0.05$ 인 경우의 유속분포

속의 전파를 나타내고 있다. ENO 기법이 Beam-Warming 기법에 비해 더 정확하게 유속을 계산하고 있음을 알 수 있다.

(3)  $h_o/h_1 = 0.005$ 인 경우

그림 7은  $h_o/h_1 = 0.005$ 인 경우의 홍수파 전파를 나타낸 것이다.  $h_o/h_1$ 가 0.05인 경우와 마찬가지로 ENO 기법에 의한 결과는 해석해와 거의 유사하게 나타나고 있으나 Beam-Warming 기법에 의한 계산결

과는 해석해와 많은 차이를 보이고 있다. 그림 8은  $h_o/h_1 = 0.005$ 인 경우의 유속의 전파를 나타내고 있 ENO 기법은 불연속점 근처에서 약간의 오차를 발생시키지만 전체적으로 해석해와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 그러나 Beam-Warming 기법은 해석해와 많은 차이를 보이고 있다.

(4)  $h_o/h_1 = 0.0005$ 인 경우

그림 9는  $h_o/h_1 = 0.0005$ 인 경우의 홍수파 전파를 나타낸 것이다. 이 경우에도 ENO 기법에 의한 결

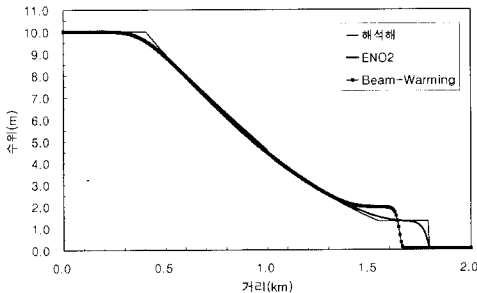


그림 7.  $h_o/h_1 = 0.005$ 인 경우의 댐 붕괴파 전파

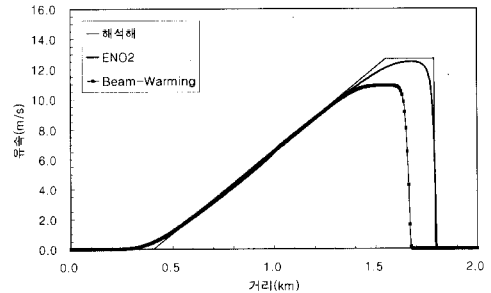


그림 8.  $h_o/h_1 = 0.005$ 인 경우의 유속분포



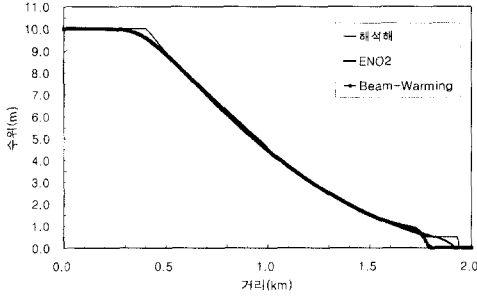


그림 9.  $h_o/h_1 = 0.005$ 인 경우의 댐 붕괴파 전파

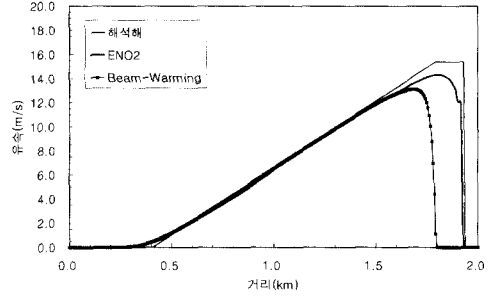


그림 10.  $h_o/h_1 = 0.005$ 인 경우의 유속분포

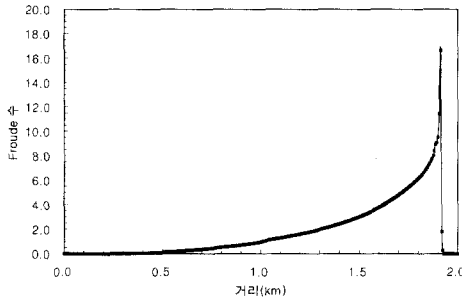


그림 11.  $h_o/h_1 = 0.0005$ 인 경우의 Froude수 변화

과는 해석해와 거의 유사하게 나타나고 있으나 Beam-Warming 기법에 의한 계산결과는 해석해와 많은 차이를 보이고 있다. 그림 10은 유속의 분포를 나타낸 것이며 그림 11은 Froude 수를 나타낸 그림으로 충격파의 크기가 커짐에 따라 최대 16.6까지 증가한 것을 알 수 있다. 흐름의 상류와 하류구간에서는 상류가 발생하고 중간부분에서는 아주 강한 사류가 발생하고 있음도 알 수 있다.

(5) CFL 조건 및 조도계수의 변화에 따른 검토

그림 12는  $h_o/h_1=0.5$ 인 경우에 대해서 Courant 수의 변화에 따른 홍수파의 변화양상을 나타내고 있다. 양해법에 비해 음해법의 가장 큰 장점은 Courant 수가 1.0보다 크게 시간간격과 거리간격을 설정할 수 있다는 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 Courant 수가 3.0 정도까지 커지더라도 전구간에 걸쳐 수치진동이나 비물리적인 현상의 발생없이 홍수파를 계산한 것을 알 수 있다. 다만 정확도면에서 Courant 수가 커질수록 계산결과는 선단부에서의 平滑化 현상 발생과 함께 해석해와 차이가 나고 있다. 또한 음해법이기는 하지만

Courant 수를 계속해서 증가시킬 수는 없는데 본 연구에서는 Courant 수가 3.5정도 보다 커지면 비현실적인 계산결과가 발생하였다. 이것은 시간간격이 커지면 급격하게 변화하는 불연속흐름의 전파를 물리적으로 해석하기 곤란한 한계에 부딪히기 때문이다. 즉 음해법이라고 하더라도 급격하게 변화하는 흐름의 해석을 위해서는 적절한 범위의 시간간격을 선택해야 한다는 것을 의미한다. 이와 같은 결과는 Jha 등(1996)이 Beam-Warming-Roe 기법으로 댐 붕괴파를 모의하면서 얻은 결과와 동일한 것이다.

그림 13은 조도계수의 변화에 따른 계산결과를 나타낸 것이다. 지금까지 본 연구에서는 하상마찰이 없는 가상적인 댐 붕괴파만을 대상으로 계산하여 해석해와 비교하였는데 하상마찰이 있는 경우에는 계산되는 수위의 양상이 하상마찰이 없는 경우와는 다른 것을 알 수 있다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 선단부의 전파속도는 조도계수와 큰 관계없이 거의 동일하게 나타나고 있다. 조도계수의 영향이 나타나는 부분은 중간부분의 수위로서 조도계수의 영향으로 선단부쪽에서는 수위가 낮고 후단부쪽에서는 수위가 높게 나타나고 있

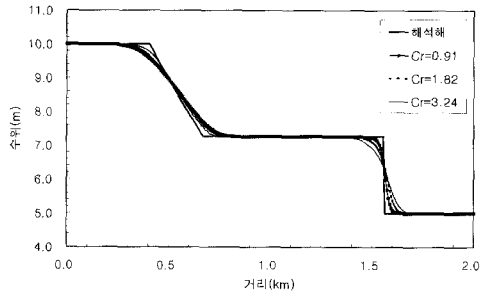


그림 12. Courant 수 변화의 영향

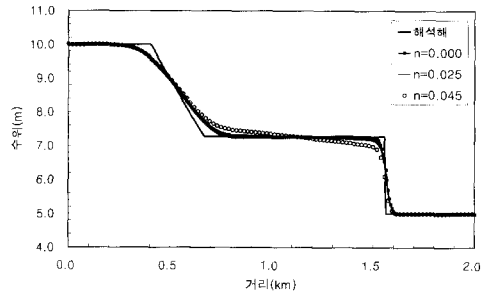


그림 13. 조도계수 변화의 영향

다.

#### (6) 모형 검증결과와 검토

천이류의 해석에서 가장 어려운 부분중의 하나가 댐 붕괴파 해석부분이다. 댐 붕괴시에는 매우 강한 충격파가 발생하기 때문에 홍수파의 선단부분에서 수치진동이 발생하여 비물리적인 계산결과가 발생하는 경우가 많다. ENO 기법에 의한 해석결과를 살펴보면 초기 수위비 ( $h_o/h_1$ )가 0.5부터 0.0005까지 변화하더라도 수치진동의 발생없이 기존의 다른 기법보다 정확하게 수위와 유속을 계산하였다. 최근에 개발된 FLDWAV 모형보다 안정적이며, 음해법의 대표적인 기법인 Beam-Warming 기법보다 정확하게 흐름을 계산하였다. 또 최근에 개발된 음해법인 MESH 기법은  $h_o/h_1$ 가 0.1정도까지만 계산할 수 있는 반면 ENO 기법은 0.0005까지도 큰 오차의 발생없이 계산할 수 있었다.

본 연구에서 사용한 ENO 기법은 음해법이기에 때문에 하천조건이 다양하게 변화하는 경우에도 쉽게 흐름을 해석할 수 있는 장점이 있다. 모형 검증을 위해서 사용한 계산조건을 살펴보면 Courant 수가 대부분 1.0 이상임에도 불구하고 계산에는 거의 영향이 없었음을 알 수 있다. 특히 댐 붕괴파의 경우에는 Courant 수가 3.0 정도까지 커지더라도 정확도에 큰 영향을 미치지 않는 것으로 나타났다.

### 5. 결 론

본 연구에서는 하천에서 발생하는 다양한 형태의 천이류를 안정적으로 해석할 수 있는 새로운 형태의 고정확도 수치모형을 개발하였다. 본 연구를 통해서 얻은 주요 결론은 다음과 같다.

(1) 본 연구에서는 수치진동없이 전구간에 걸쳐 고정확도가 동일하게 확보되는 ENO 기법과 수치적으로 무조건적 안정성이 보장되는 음해법을 결합하여 새로운 형태의 음해적 ENO 기법을 구축하고 이를 바탕으로 수치모형을 구성하였다.

(2) 본 연구에서 개발한 모형을 균일하도에서 발생하는 가상적인 댐 붕괴파에 대해 적용한 결과 약한 충격파부터 아주 강한 충격파까지 모든 경우에 수치진동의 발생없이 정확하게 흐름을 계산할 수 있었으며, 기존의 대표적인 음해법중의 하나인 Beam-Warming 기법보다 더욱 정확하고 안정되게 불연속점 부근의 수리특성을 모의할 수 있었다.

(3) 본 연구에서 개발한 모형은 음해적이기 때문에 댐 붕괴파의 경우에는 Courant 수가 1.0 보다 커지더라도 정확도에 큰 영향을 미치지 않고 흐름을 해석할 수 있는 것으로 나타났다.

### 참 고 문 헌

- 김 원 (1999). 고정확도 수치기법을 이용한 하천 천이류 해석모형의 개발. 박사학위논문, 경북대학교.
- 김 원, 한건연 (1998). "Implicit MacCormack 기법을 이용한 하천흐름의 해석." 1998년도 학술 발표회 논문집(III), 대한토목학회, pp. 293~296.
- 수해방지대책기획단 (1999). 수해방지대책 종합 백서, 대통령비서실.
- 이길성 (1987). "댐파괴파의 홍수추적에 관한 고찰." 한국수문학회지, 한국수문학회, 제20권, 제3호, pp. 191~196.
- 이길성, 이성태 (1998). "충격파 모의를 위한 2차원

- 유한체적 비정상 흐름모형.” 한국수자원학회 논문집, 한국수자원학회, 제31권, 제3호, pp. 279~290.
- 이종태, 한건연, 이정식 (1987). “Earth dam의 가상 파괴로 인한 홍수파의 예측모형.” 대한토목학회 논문집, 대한토목학회, 제6권, 제4호, pp. 69~78.
- 한건연 (1987). Fill Dam의 파괴에 따른 홍수파 예측모형의 개발. 박사학위논문, 연세대학교.
- 한건연, 박재홍, 이종태 (1994). “개수로내의 상류-사류 천이영역에 대한 부정류 해석.” 한국수자원학회지, 한국수자원학회, 제27권, 제2호, pp. 85~96.
- 한건연, 박재홍, 이종태 (1996a). “개수로내의 점변 및 급변 부정류에 대한 유한요소해석 : I. 이론 및 수치안정 해석.” 한국수자원학회지, 한국수자원학회, 제29권, 제6호, pp. 167~178.
- 한건연, 박재홍, 이종태 (1996b). “개수로내의 점변 및 급변 부정류에 대한 유한요소해석 : II. 적용예.” 한국수자원학회지, 한국수자원학회, 제30권, 제1호, pp. 35~44.
- Beam, R.M. and Warming, R.F. (1976). “An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form.” *Journal of Computational Physics*, Vol. 22, pp. 87~110.
- Dolezal, A. and Wong, S.S.M. (1995). “Relativistic hydrodynamics and essentially non-oscillatory shock capturing schemes.” *Journal of Computational Physics*, Vol. 120, pp. 266~277.
- Garcia-Navarro, P. and Vazquez-Cendon, M.E. (1997). *Some considerations and improvements on the performance of Roe's scheme for 1D irregular geometries*. University of Zaragoza, Spain.
- Jha, A.K., Akiyama, J., and Ura, M. (1996). “A fully conservative Beam and Warming scheme for transient open channel flows.” *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 34, No. 5, pp. 605~621.
- Jin, M. and Fread, D.L. (1997). “Dynamic flood routing with explicit and implicit numerical solution schemes.” *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 3, pp. 166~173.
- Meselhe, E.A. (1994). *Numerical simulation of transcritical flow in open channels*. Ph.D. dissertation, University of Iowa, Iowa.
- Nujic, M. (1995). “Efficient implementation of non-oscillatory schemes for the computation of free-surface flow.” *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 33, No. 1, pp. 101~111.
- Shu, C.W. (1997). *Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws*. ICASE Report No. 97-65, NASA Langley Research Center, Hampton, VA.
- Stoker, J. J. (1957). *Water Waves*. Interscience Publishers Inc., John Wiley and Sons, New York, N.Y.
- Yang, J.Y. (1991). “Third-order nonoscillatory schemes for the Euler equations.” *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 10, pp. 1611~1618.
- Yang, J.Y., Hsu, C.A., and Chang, S.H. (1993). “Computations of free surface flows: I. One-dimensional dam-break flow.” *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 31, No. 1, pp. 19~34.

(논문번호:00-068/접수:2000.10.16/심사완료:2001.02.02)