

정적 대변형에 중첩된 미소 동적 하중을 받는 고무재료의 점탄성 구성방정식에 관한 연구

김 봉 규[†] · 윤 성 기^{*}

(2000년 6월 21일 접수, 2001년 1월 31일 심사완료)

A Viscoelastic Constitutive Model of Rubber Under Small Oscillatory Loads Superimposed on Large Static Deformation

Bong-Kyu Kim and Sung-Kie Youn

Key Words : Viscoelasticity(점탄성), Constitutive Model(구성방정식), Rubber(고무), Small Oscillatory Load(미소 동적 하중), Large Static Deformation(정적 대변형)

Abstract

A viscoelastic constitutive equation of rubber is proposed under small oscillatory load superimposed on large static deformation. The proposed model is derived through linearization of Simo's nonlinear viscoelastic constitutive model and reference configuration transformation. Statically pre-deformed state is used as reference configuration. The model is extended to a generalized viscoelastic constitutive equation including widely-used Morman's model. Static deformation correction factor is introduced to consider the influence of pre-strain on the relaxation function. The model is tested for dynamic behavior of rubbers with different carbon black fractions. It is shown that the constitutive equation with static deformation correction factor agrees well with test results.

1. 서 론

제진 및 방진용으로 사용되는 대부분의 고무 제품들은 정적 대변형에 추가되는 동적 하중을 받고 있다. 이러한 하중 하의 고무의 거동은 선형화된 조화 정상 응답(linearized steady state harmonic response)을 표현하는 점탄성 구성방정식을 통하여 기술할 수 있으나 대변형하의 고무의 비선형 거동을 생각하면 매우 복잡하다는 것을 알 수 있다. 따라서 정적 대변형 하의 고무의 동적거동을 정확히 기술하는 구성방정식은 방진 및 제진 고무 부품의 동적 거동의 예측과 설계에 필수적이다.

점탄성 물질의 변형 이력(deformation history)의 영향은 소멸 기억 가정(fading memory hypothesis)⁽¹⁾에 의하여 없어지므로 정적변형에 의한 정적 응력

은 정적 변형 상태 만의 함수이다. 즉 점탄성 효과는 정적 변형에 추가된 작은 동적 변형 만의 함수이다. 그리고 정적으로 변형된 상태를 기준 상태(reference configuration)로 사용하면 비교적 쉽게 추가된 변형이 작다는 가정으로부터 선형화된 구성방정식을 이끌어 낼 수 있다. 따라서 정적 대변형에 부과된 동적 하중을 받고 있는 점탄성체의 구성방정식에서 변형 이력을 정적 변형 상태를 기준으로 기술하는 것은 효과적이고 쉬우며 당연하다고 할 수 있다. 그러나 일반적으로 대부분의 비선형 점탄성 구성방정식들^(2,3)은 변형 전 상태(undeformed state)를 기준 상태로 사용하고 있기 때문에 시간 영역에서 정의된 구성방정식으로부터 바로 정상 조화 구성방정식을 이끌어 낼 수 없다.

정적변형에 중첩된 동적하중을 받고있는 점탄성 재료의 구성방정식으로는 Morman의 구성방정식⁽⁴⁻⁶⁾이 널리 사용되고 있다. Morman의 구성방정식은 Coleman과 Noll의 유한 선형 점탄성 모델(finite linear viscoelasticity)에서 그 기원을 찾을 수 있다. Coleman과 Noll은 점탄성 구성방정식의

[†] 책임저자, 회원, 한국과학기술원 대학원 기계공학과
E-mail : kbongk@skylab.kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3074 FAX : (042)869-3095

^{*} 회원, 한국과학기술원 기계공학과

Fréchet 미분 가능성과 물질 객관성(material objectivity)을 이용하여 등방 물질이 천천히 변형 하거나 변형양이 작은 경우에 적용 가능한 구성방정식을 제안하였다.⁽⁷⁾ Lianis 는 Coleman 과 Noll 의 유한 선형 점탄성 모델에 비가역 열역학(irreversible thermodynamics)에서 사용되는 Onsager 의 원리(Onsager's principle)를 적용하여 완화함수를 간단하게 하였다.⁽⁸⁾ Morman 은 Lianis 의 모델에 점탄체의 거동은 시간효과와 정적 대변형의 효과로 분리될 수 있음을 가정하여 보다 간결한 정적 대변형 하의 점탄성 구성방정식을 유도하고 천연 고무의 거동을 성공적으로 묘사하였다. Morman 의 모델에서는 정적 대변형이 점탄성체의 동적 거동에는 영향을 미치지 않는다는 분리가능성(separability) 가정에 의하여 완화 함수(relaxation function)는 변형에 무관한 간단한 함수로 기술된다. Morman 모형의 핵심 가정인 분리가능성은 충전되지 않은 고무(unfilled rubber)에는 적용할 수 있으나⁽⁹⁾ 충전된 고무에는 적용할 수 없음⁽¹⁰⁾이 알려져 있다. 또 공학적으로 사용되는 대부분의 고무에는 기계적 성질을 향상시키기 위하여 카본 블랙(carbon black)과 같은 충전제를 첨가하여 충전된 고무(filled rubber) 형태로 사용한다. 따라서 정적 대변형에 추가되는 작은 하중을 견디는 점탄성체의 구성방정식에서 동적 거동에 미치는 정적 대변형의 영향을 고려하는 것은 공학적으로 매우 중요하다.

본 논문에서는 점탄성체가 정적 대변형에 추가되는 작은 하중을 받고있을 때 정적 변형이 동적 거동에 미치는 영향을 기술할 수 있는 새로운 구성방정식을 제안하고자 한다. 정적으로 변형된 상태를 기준 상태로 사용하여 선형화 된 Simo 의 점탄성 구성방정식(LSVM, linearized Simo's viscoelastic model)을 유도하였다. 유도된 구성방정식을 객관 응력 증분(objective stress increment)을 사용하여 기존의 Morman 의 모형을 포함하는 일반화된 점탄성구성 방정식으로 확장하였다. 새로운 구성방정식에 정적 변형 보정 계수를 도입하여 기존의 모델로는 기술이 불가능한 점탄성체의 동적 거동에 미치는 정적변형의 영향을 고려하였다. 제안된 구성방정식의 타당성은 서로 다른 충전체의 양을 가지는 고무 시편의 동적 압축 실험(dynamic compression test)을 통하여 확인하였다.

2. 점탄성 구성방정식

2.1 텐서 표기법

정적 변형에 추가된 동적 변형을 표현하기 위

하여 먼저 Φ_t , Φ_0 , Φ_s 를 각각 변형 전 상태, 정적으로 변형된 상태, 현재 상태라고 하자. 시간 η 일 때 텐서 T 의 값은 상태(configuration) Φ_s 를 기준으로 $T^\xi(\eta)$ 로 표기한다. 또 표기의 편의를 위하여 본 논문에서는 다음과 같은 간략화 된 표기법을 동시에 사용하였다.

$$T(\eta) = T'(\eta), \quad T_0^\xi = T^\xi(t_0) \quad (1)$$

$$T^0(\xi) = T^0(\xi), \quad T^\xi = T^\xi(t) \quad (2)$$

변형구배(deformation gradient) F^ξ 와 체적 보존 변형구배 \bar{F}^ξ 는 다음과 같다.

$$\left(F^\xi(t) \right)_j = \left(\frac{\partial x_i(t)}{\partial X_j(\xi)} \right), \quad \bar{F}^\xi = (J^\xi)^{-1/3} F^\xi \quad (3)$$

여기서 J^ξ 는 $\det(F^\xi)$ 이다.

Cauchy-Green 텐서 C^ξ 와 Green 텐서 E^ξ 는 아래와 같다.

$$C^\xi = F^{\xi T} F^\xi, \quad \bar{C}^\xi = \bar{F}^{\xi T} \bar{F}^\xi \quad (4)$$

$$E^\xi = \frac{1}{2}(C^\xi - I), \quad \bar{E}^\xi = \frac{1}{2}(\bar{C}^\xi - I) \quad (5)$$

여기서 I 는 단위 텐서이다.

2.2 선형화된 Simo 의 점탄성 구성방정식

본 논문에서는 정적 대변형에 추가되는 작은 하중을 견디는 점탄성체의 구성방정식을 Simo 의 비선형 점탄성 구성방정식의 선형화를 통하여 유도하였다. Simo 는 표준 선형 고체로부터 대변형을 처리할 수 있고 변형 정도에 상관없이 편차변형과 체적변형이 분리되는 특성을 가지는 점탄성 구성방정식을 유도하였다. Simo 모델은 계산 효율이 좋기 때문에 많은 상용 유한요소 코드에서 채택되고 있다.^(11,12)

2.2.1 서로 다른 기준 상태에서의 응력 증분과 변형을 증분

본 절에서는 정적 대변형에 중첩된 미소하중을 견디는 고무 재료의 점탄성 구성방정식을 유도함에 있어서 필수적인 서로 다른 기준 상태를 가지는 응력과 변형을 증분들의 관계를 살펴본다. 응력은 정적인 응력과 중첩된 변형에 의한 동적인 응력 증분으로 간주할 수 있다.

$$S(t) = S_0 + \Delta S(t) \quad (6)$$

$$S^0(t) = S_0^0 + \Delta S^0(t) = \sigma_0 + \Delta S^0(t) \quad (7)$$

여기서 S 는 2nd Piola-Kirchhoff 응력이고 σ 는 Cauchy 응력이다. 서로 다른 기준 상태를 사용하는 응력 증분들 사이에는 다음과 같은 관계가 있다. ^(13,14)

$$S_0^0 = \sigma_0 = \frac{1}{J_0} F_0 S_0 F_0^T \quad (8)$$

$$\Delta S^0 = \frac{1}{J_0} F_0 \Delta S F_0^T \quad (9)$$

여기서 J_0 는 $\det(F_0)$ 이다.

또 Green 변형률 증분들의 관계는 식 (5)로부터 다음과 같은 관계식을 이끌어 낼 수 있다.

$$\Delta E = \frac{1}{J_0} F_0^T \Delta E^0 F_0 \quad (10)$$

정의에 의해서 Green 변형률의 증분 ΔE^0 는 다음과 같이 변위의 증분 Δu 로 표시할 수 있고 Δu 가 작으므로 다음과 같이 ε 으로 근사 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta E_{ij}^0 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} \right] \\ &\cong \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

응력 증분 ΔS 가 다음과 같은 구성방정식에 의해 결정된다고 가정하자.

$$\Delta S = \Xi(t, E_0, \Delta E(t)) \quad (12)$$

식 (9), 식 (10), 식 (11)을 사용하면 위에서 정의된 구성관계식(constitutive relation)은 상태 Φ_0 를 기준으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta S^0 = \varphi(t, E_0, \varepsilon(t)) = \frac{1}{J_0} F_0 \Xi(t, E_0, \varepsilon^0(t)) F_0^T \quad (13)$$

여기서 $\varepsilon^0(t) = F_0 \varepsilon(t) F_0^T$ 이다. Cauchy 응력 σ 는 2nd P-K 응력과 다음과 같은 관계가 있다.

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta \sigma = \frac{1}{J^0(t)} F^0(t) S^0(t) F^{0T}(t) \quad (14)$$

위식의 1 차 근사식은 다음과 같이 표시된다. ⁽¹⁵⁾

$$\begin{aligned} \Delta \sigma &= -\varepsilon_{kk} \sigma_0 + \varepsilon \cdot \sigma_0 + \sigma_0 \cdot \varepsilon \\ &\quad + \omega \cdot \sigma_0 - \sigma_0 \cdot \omega + \Delta S^0 \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} \right)$ 이다. 따라서 ΔS 의 구성방정식을 알면 식 (13)과 식 (15)를 사용하여 ΔS^0 와 $\Delta \sigma$ 의 관계식을 유도할 수 있다.

2.2.2 Simo 의 점탄성 구성방정식의 선형화

정적 대변형에 중첩된 미소하중을 다룰 때는 정적으로 변형된 상태를 기준 상태로 사용하여 선형화된 구성방정식을 이끌어 내는 것이 자연스러우면서 효율적이거나 Simo 의 모델은 변형 전 상태를 기준상태로 사용하므로 기준상태의 변환(transformation)이 필요하다. Simo 의 비선형 점탄성 구성방정식⁽²⁾은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} S &= J C^{-1} \frac{\partial U}{\partial J} + J^{-2/3} DEV \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{E}} \right) \right] + \\ &\quad J^{-2/3} DEV \left[\int_0^t g(t-\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} DEV \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{E}} \right) d\xi \right] \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $DEV[\bullet] = (\bullet) - \frac{1}{3} [C : (\bullet)] C^{-1}$ 이고 ($A : B$ 는 텐서 A 와 B 의 중복축약(double contraction)), U 와 Ψ 는 각각 자유 에너지 함수(free energy function)의 체적과 편차 부분이다. 완화 함수 $g(t)$ 는 선형점탄성 구성방정식의 전단 완화 계수(shear relaxation modulus) $G(t)$ 와 다음과 같은 관계가 있다.

$$g(t) = \frac{G(t)}{G_x} - 1 \quad (17)$$

여기서 $G_x = \lim_{t \rightarrow \infty} G(t)$ 이다. 정적 응력 σ_0 는 식 (16)으로부터 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\sigma_0 = P_0 I + dev[\hat{\sigma}_0] \quad (18)$$

여기서 $P = \frac{\partial U}{\partial J}$, $\hat{\sigma}_0 = \frac{1}{J_0} \bar{F}_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{E}} \bar{F}_0^T$ 이고

$dev[\bullet] = (\bullet) - \frac{1}{3} [I : (\bullet)] I$ 이다. Simo 모델의 정적인 거동은 정확히 자유에너지가 $\hat{\Psi} = U + \Psi$ 로 주어지는 초탄성 거동을 한다는 것을 식 (18)로부터 알 수 있다.

식 (16)에 연쇄의 법칙을 연속적으로 적용하면 2-nd Piola-Kirchhoff 응력의 증분 ΔS 의 관계식을 다음과 같이 얻는다. ⁽¹⁶⁾

$$\begin{aligned} \Delta S &= \left[\left(J^2 \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} + J P \right) C^{-1} \otimes C^{-1} + J P C \right] : \Delta E + \\ &\quad - J^{-2/3} \frac{2}{3} \left[DEV \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{E}} \right) \otimes C^{-1} : \Delta E \right] \end{aligned} \quad (19)$$

$+C^{-1} \otimes \text{DEV} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial E} \right) : \Delta E$
 $+ \mathcal{E} : \Delta E + J^{-2/3} \int_0^1 g(t-\xi) \mathcal{E} : \Delta \dot{E} d\xi$
 여기서 \otimes 는 텐서적(tensor product)을 의미하고
 $C_{ijkl} = \frac{\partial C_{ij}^{-1}}{\partial E_{kl}} = -(C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{kl}^{-1} C_{ij}^{-1})$ 이며 탄성 텐서
 (elasticity tensor) \mathcal{E} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} = & -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial E} : C \right) \left(C + \frac{2}{3} C^{-1} \otimes C^{-1} \right) \\
 & + J^{-2/3} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial E^2} - \frac{1}{3} \left(\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial E^2} : C \right) \otimes C^{-1} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + C^{-1} \otimes \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial E^2} : C \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{9} \left(C : \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E^2} : C \right) C^{-1} \otimes C^{-1} \right]
 \end{aligned} \quad (20)$$

식 (19)의 기준 상태(reference configuration)를 식 (13)을 이용하여 정적으로 변형된 상태로 변환하면 다음과 같은 선형화된 Simo의 점탄성 구성방정식(LSVM, linearized Simo's viscoelastic model)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \Delta S^0 = & \left(J \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} + P \right) \varepsilon_{kk} I - 2P \varepsilon \\
 & - \frac{2}{3} \left[\text{dev}(\hat{\sigma}) \otimes I + I \otimes \text{dev}(\hat{\sigma}) \right] \varepsilon \\
 & + \mathcal{E} : \varepsilon + \int_0^1 g(t-\xi) \mathcal{E} : \dot{\varepsilon} d\xi
 \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)에서 사용된 Truesdell 탄성 텐서 \mathcal{E} 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} = & \frac{2}{3} (\hat{\sigma} : I) \left(\hat{I} - \frac{1}{3} I \otimes I \right) \\
 & + \mathcal{F} - \frac{1}{3} [(\mathcal{F} : I) \otimes I + I \otimes (\mathcal{F} : I)] \\
 & + \frac{1}{9} (I : \mathcal{F} : I) I \otimes I
 \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 $\mathcal{F}_{ij} = \frac{1}{J} \bar{F}_i \bar{F}_j \bar{F}_k \bar{F}_l \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial E^2} \right)_{ijkl}$ 이고 \hat{I} 는 4차 단위 텐서이다.

동적으로 부가되는 변형이 $\varepsilon = \varepsilon' e^{i\omega t}$ 로 표현할 수 있는 정상 조화 변형이라면 식 (21)에서 다음과 같은 복소 구성방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 \Delta S^{0*} = & \left(J \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} + P \right) \varepsilon'_{kk} I - 2P \varepsilon' \\
 & - \frac{2}{3} \left[\text{dev}(\hat{\sigma}) \otimes I + I \otimes \text{dev}(\hat{\sigma}) \right] \varepsilon' \\
 & + (1 + i\omega g^*) \mathcal{E} : \varepsilon'
 \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 g^* 는 $g(t)$ 의 Fourier 변환 즉 $g^*(\omega) = \int_0^\infty g(t) e^{-i\omega t} dt$ 이고 g^* 와 복소 전단계수 $G^* = G' + iG''$ 는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\omega g^* = \frac{G''}{G_\infty} + \left(1 - \frac{G'}{G_\infty} \right) i \quad (24)$$

2.2.3 선형 점탄성 구성방정식

만약 정적 변형이 없다면 모든 응력 값은 0 이 되고 모든 응력 증분과 변형을 증분은 Cauchy 응력과 미소변형 변형률로 표시할 수 있다.

$$p = 0, \quad \sigma_0 = 0 \quad (25)$$

$$J = 1, \quad F = I \quad (26)$$

$$\Delta S^0 = \Delta \sigma \quad \rightarrow \quad \sigma \quad (27)$$

$$\Delta E = \Delta E^0 = \varepsilon \quad \rightarrow \quad \varepsilon \quad (28)$$

위와 같은 조건에서는 $\hat{\sigma}$ 와 \mathcal{E} 는 다음과 같다.

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{J} \bar{F}_0 \frac{\partial \Psi}{\partial E} \bar{F}_0^T = 2[\Psi_{,1} + 2\Psi_{,2}] I \quad (29)$$

$$\mathcal{E} = 4(\Psi_{,1} + \Psi_{,2}) \left(\hat{I} - \frac{1}{3} I \otimes I \right) \quad (30)$$

여기서 $\Psi_{,1} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1}$, $\Psi_{,2} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_2}$ 이고 체적 계수(bulk modulus)와 전단 계수(shear modulus)는 다음과 같은 관계가 있다.

$$G_\infty = 2(\Psi_{,1} + \Psi_{,2}), \quad K = \frac{\partial^2 U}{\partial J^2}. \quad (31)$$

식 (25) ~ 식 (31)을 식 (21)에 대입하면 다음과 같은 선형점탄성 구성방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 \sigma = & K \varepsilon_{kk} I + 2G_\infty \varepsilon' + 2 \int_0^1 g(t-\xi) G_\infty \dot{\varepsilon}' d\xi \\
 = & K \varepsilon_{kk} I + 2 \int_0^1 G(t-\xi) \dot{\varepsilon}' d\xi
 \end{aligned} \quad (32)$$

여기서 $\varepsilon' = \text{dev}[\varepsilon]$ 이다. 따라서 선형점탄성 구성방정식은 LSVM에서 정적 변형이 없는 특별한 경우라는 것을 알 수 있다.

2.3 구성방정식의 일반화

객관 응력 증분(objective stress increment)을 사용하면 식 (21)로 표시되는 구성방정식을 보다 일반

적인 점탄성 구성방정식으로 확장할 수 있다. 먼저 점탄성체가 비압축성이라고 가정하고 식 (15)를 이용하면 식 (21)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \overset{T}{\Delta}\sigma &= \Delta\sigma - \varepsilon \cdot \sigma_0 - \sigma_0 \cdot \varepsilon - \omega \cdot \sigma_0 + \sigma_0 \cdot \omega \\ &= -\Delta PI + \mathcal{E} : \varepsilon + \int_0^t g(t-\xi) \mathcal{E} : \dot{\varepsilon} \, d\xi \end{aligned} \quad (33)$$

Morman의 구성방정식은 다음과 같다^(6,17).

$$\begin{aligned} \overset{J_0}{\Delta}\sigma &= \Delta\sigma + \sigma_0 \omega - \omega \sigma_0 \\ &= -\Delta PI + \mathcal{L} : \varepsilon + \int_{-}^+ g(t-\tau) \mathcal{L} : \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (34)$$

여기서 Jauman 탄성 텐서 \mathcal{L} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mu\mu} &= 2(\Psi_{,1} + I_1 \Psi_{,2}) (\delta_{ik} B_{0,ji} + B_{0,ik} \delta_{ji}) \\ &\quad - 2\Psi_{,2} (\delta_{ik} B_{0,ji} B_{0,pi} + B_{0,ip} B_{0,pk} \delta_{ji} + 2B_{0,ik} B_{0,ji}) \\ &\quad + 4(\Psi_{,11} + \Psi_{,2} + 2I_1 \Psi_{,12} + I_1^2 \Psi_{,22}) B_{0,ij} B_{0,kl} \\ &\quad - 4(\Psi_{,12} + I_1 \Psi_{,22}) (B_{0,ip} B_{0,ji} B_{0,kl} + B_{0,ij} B_{0,lp} B_{0,ki}) \\ &\quad + 4\Psi_{,22} B_{0,ip} B_{0,ji} B_{0,lp} B_{0,ki} \end{aligned} \quad (35)$$

위의 식들에 객관 응력 증분을 도입하여 다음과 같이 일반화된 객관 응력 증분 구성방정식을 정의해 보자.

$$\Delta \dot{\sigma} = -\Delta PI + \dot{\mathcal{E}} : \varepsilon + \int_0^t g(t-\xi) \dot{\mathcal{E}} : \dot{\varepsilon} \, d\xi \quad (36)$$

여기서 $\Delta \dot{\sigma}$ 는 객관 응력 증분이고 $\dot{\mathcal{E}}$ 는 객관 탄성 텐서(objective elasticity tensor)이다. $\dot{\mathcal{E}}$ 는 매우 느린 변형시에 $\Delta \dot{\sigma}$ 를 결정하고 자유 에너지 함수 Ψ 에 의하여 정의된다. 식 (36)으로 표현되는 구성방정식은 다음과 같은 성질을 가짐을 관찰할 수 있다.

- i) 구성방정식은 좌표계 무관의 원리(principle of material frame-indifference)를 만족한다.
- ii) 매우 느린 변형과 빠른 변형에 대하여 탄성 거동을 한다.
- iii) 시간 효과와 변형효과는 분리 가능하다.
- iv) LSVM과 Morman의 모형은 식 (36)에 각각 객관 응력 증분으로 Truesdell 응력 증분과 Jaumann 응력 증분이 사용된 경우이다.

위에서 열거한 점들을 생각할 때 식 (36)은 분리 가능 가정하에서 정적 대변형에 부가되는 동적 미소 변형하의 점탄성체의 거동을 묘사하는 가장 일반적인 구성방정식이라 생각된다.

2.4 정적 변형 보정 계수

지금까지 시간 효과를 표시하는 $g(t)$ 는 정적 변형에 영향을 받지 않는다고 가정하였다. 이러한 분리가능성(separability) 가정은 카본 블랙과 같은

충전제를 포함하지 않는 고무의 거동에서 관찰할 수 있다. 그러나 충전된 고무는 $g(t)$ 가 정적 변형의 함수라는 것이 알려져 있다.⁽¹⁰⁾ 본 절에서는 정적 변형 보정 계수($c^*(B_0)$)를 사용하여 충전된 고무의 분리불가능성(nonseparability)을 기술한다. 식 (23)에서 시간 효과를 표시하는 $1+i\omega g^*$ 의 정적 변형의 영향을 보정한 계수로 다음과 같이 \bar{g}^* 를 정의한다.

$$\bar{g}^* = (1+i\omega g^*) c^*(B_0) \quad (37)$$

여기서 $c^*(B_0)$ 는 정적 변형의 함수로 복소 값을 가진다. c^* 는 식 (23)으로 표시되는 정적 변형 보정을 포함하지 않은 구성방정식의 계산값과 실험값의 비교를 통하여 결정된다. c^* 의 구체적인 형식을 결정하기 위하여 일반적인 정적 변형의 크기를 계량(measure)할 필요가 있다. 본 연구에서는 일반화된 팔면체 변형률(generalized octahedral shear strain)과 균일화 자유 에너지(normalized free energy)를 변형의 척도로 사용하였다. 일반화된 팔면체 변형률은 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{I}_v = \frac{1}{6} (2\bar{I}_1^2 - 6\bar{I}_2)^{1/2} \quad (38)$$

\bar{I}_v 는 B_0 (left Cauchy-Green tensor)의 불변량이고 미소 변형하에서는 팔면체 변형률로 환원된다.⁽¹⁸⁾ 균일화 자유 에너지는 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{I}_w = \frac{\Psi(B_0)}{G_-} \quad (39)$$

\bar{I}_w 는 정적변형에 의하여 점탄성체에 저장된 자유 에너지 양에 비례한다. 정적 변형이 없을 때는 c^* 의 값이 1이므로 다음과 같은 다항식으로 정적 변형 보정 계수(static deformation correction factor)를 표현할 수 있다.

I. 일반화된 팔면체 변형률

$$c_v^*(\bar{I}_v) = c_v e^{i\alpha_v} \quad (40)$$

$$c_v(\bar{I}_v) = 1 + z_{v1} \bar{I}_v + z_{v2} \bar{I}_v^2 \quad (41)$$

$$\theta_v(\bar{I}_v) = \theta_v z_v \bar{I}_v \quad (42)$$

II. 균일화 자유에너지

$$c_w^*(\bar{I}_w) = c_w e^{i\alpha_w} \quad (43)$$

$$c_w(\bar{I}_w) = 1 + z_{w1} \bar{I}_w + z_{w2} \bar{I}_w^2 \quad (44)$$

$$\theta_w(\bar{I}_w) = \theta_w z_w \bar{I}_w \quad (45)$$

여기서 z_{v1} , z_{v2} , $\theta_v z_v$ 와 z_{w1} , z_{w2} , $\theta_w z_w$ 는 상수이고

실험을 통하여 결정한다.

3. 실험

3.1 동적 압축 실험(dynamic compression test)

본 연구에서는 가황 고무의 비선형 점탄성 거동을 확인하고 2 장에서 제시한 구성방정식들의 적용성을 확인 하기 위하여 동적 압축 실험을 하였다. 충전된 고무(filled rubber)는 $g(t)$ 가 정적변형의 크기에 영향을 받는다는 것⁽¹⁰⁾이 실험적으로 알려져 있고 실제 고무 재료는 대부분 충전된 상태로 사용되므로 충전제의 양을 달리하는 천연고무와 SBR 고무 시험 편에 정적 변형을 가한 상태에서 동적 변형을 부가하는 시험을 하였다. 본 연구의 실험에서 사용된 고무는 일반적으로 많이 사용되는 천연고무와 SBR 고무를 카본블랙(carbon black)의 양을 달리하는 5 종류의 시험편을 제작하였고 가황은 160°C에서 20 분 동안 하였다. 시험편의 구성 성분은 Table 1 에 실었다. 압축 시험편은 Fig. 1 에 보인 것처럼 원통형 고무의 아래와 위에 시험기와 체결을 위한 알루미늄 판을 접착제로 붙인 형상이다.

압축 실험은 유압을 사용하는 Instron 사의 동적 고무 시험기인 Instron-5802 를 사용하여 수행하였다. 실험은 상온(20°C)에서 행하여 졌고 정적 변형을 부과하고 10 분의 경과 후 동적 시험(dynamic test)을 수행하였다. 정적 변형정도를 바뀌가면서 동적 실험을 수행하였고 어떤 특정 정적 변형하에서 압축 시험을 수행한 후 2 시간 동안 시험편의 응력 완화 시킨 후 다음 시험을 수행하였다. 비가역적인 물질 구조(irreversible material structure)를 제거하는 동적시험의 기계적 조정(mechanical conditioning) 작업으로 압축 시험 12 시간 전에 최대 정적 변형하에서 최고의 시험 주파수로 변형을 가하였다.⁽¹⁹⁾

3.2 구성방정식을 이용한 압축 실험 예측

구성방정식을 이용한 계산에서는 고무를 비압축성 Neo-Hookean 물질로 모델 하였고 자유 에너지 함수는 다음과 같다.

$$\Psi = c_1(I_1 - 3) \tag{46}$$

c_1 은 정적 실험에서 구한 축 방향 힘과 정적 유한 요소 변형 해석을 통해서 구한 축 방향 힘의 비교를 통하여 결정하였다. 단축 변형일 때는 정적 응력, B_0 , 변형 증분, 회전 증분 은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{011} \\ \sigma_{022} \\ \sigma_{033} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2c_1(\lambda^2 - \lambda^{-1}) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{47}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \tag{48}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon_x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon_x}{2} \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$\omega = 0 \tag{50}$$

여기서 λ 는 연신율(stretch) 이다. 위의 조건과 $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ 의 조건을 사용하면 식 (33)으로부터 다음과 같은 일차원 LSVM 구성방정식을 유도할 수 있다.

$$\Delta\sigma_{11} = 2c_1(\lambda^2 - \lambda^{-1})\varepsilon_x + \varepsilon_i \varepsilon_x + \int_0^{\varepsilon_x} g(t-\xi)\varepsilon_i \varepsilon_x d\xi \tag{51}$$

여기서 $\varepsilon_i = 2c_1(\lambda^2 + 2\lambda^{-1})$ 이다. 입력 하중이 정상

Table 1 Recipes of specimens

	Rubber	Carbon black GPF (phr)	Other ingredient (phr)
SBR/CB70	SBR	70	Sulfur: 175
NR/CB50	NR	50	TBBS: 1.0
NR/CB70	NR	70	Stearic acid: 1.0
SBR/CB0	SBR	0	ZnO: 3
NR/CB0	NR	0	

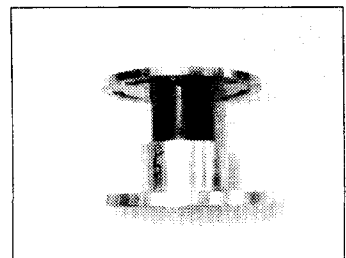


Fig. 1 Compression test specimen

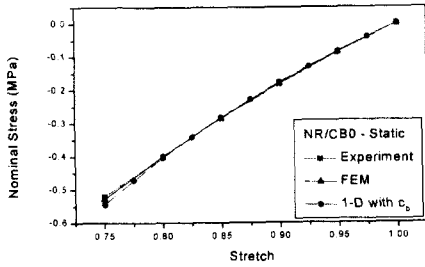


Fig. 2 Nominal stress versus stretch of specimen NR/CB0

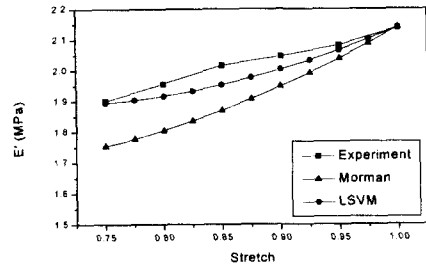


Fig. 4 Storage modulus against static stretch of specimen NR/CB0 at 30Hz

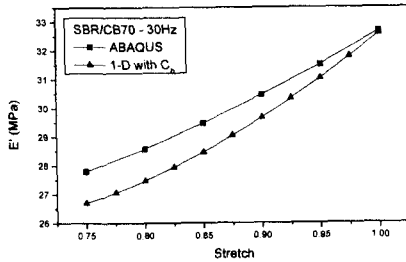


Fig. 3 Storage modulus against static stretch of specimen SBR/CB70 at 30Hz

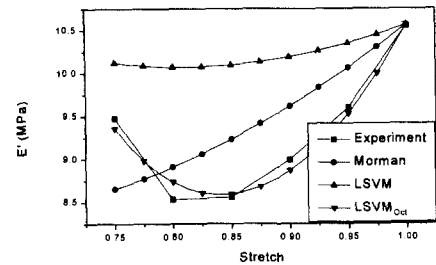


Fig. 5 Storage modulus against static stretch of specimen NR/CB50 at 30Hz

조화 하중이라 가정하고 정적변형에 의한 효과를 정적변형 보정계수를 사용하여 보정하면 식 (51)에서부터 다음과 같은 복소 구성방정식을 얻는다.

$$\Delta \sigma_{11}^* = 2c_1(\lambda^2 - \lambda^{-1})\hat{e}_x^* + \hat{g}^* \zeta_1 \epsilon_x^* \quad (52)$$

\hat{g}^* 는 복소 전단 계수와 정적 변형 보정계수에 의하여 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{g}^* &= (1 + i\alpha g^*)c^*(B_0) = c^*(B_0)G^* \\ &= c^*(B_0) \left(\frac{G'}{G_x} + \frac{G''}{G_x} i \right) \end{aligned} \quad (53)$$

비슷한 방법으로 Morman의 모형은 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\Delta \sigma_{11}^* = \hat{g}^* \zeta_1 \epsilon_x^* \quad (54)$$

여기서 $\zeta_1 = 2c_1(2\lambda^2 + \lambda^{-1})$ 이다.

식 (52)와 식 (54)는 일차원 변형을 가정하고 유도된 식이다. 그러나 실제 압축 실험에서 시편은 양끝이 알루미늄 평판에 접촉되어 있다. 따라서 본 논문에서는 식 (52)와 식 (54)에 경계조건 보정 계수 c_b 를 곱하여 양끝이 고정된 효과를 고려하였다. c_b 의 물리적 의미는 감쇠기(damper) 해석에

서 형상계수와 같다.⁽²⁰⁾ c_b 는 정적변형이 없을 때 유한요소법으로 구한 해와 식 (52), 식 (54)를 비교하여 결정되었고 본 논문에서는 1.23을 사용하였다. Fig. 2에는 정적 응력과 연신율을 그렸다.

유한요소법을 이용해서 구한 값과 c_b 와 식 (47)을 사용해서 구한 값이 잘 일치함을 알 수 있다. Fig. 3에는 구성방정식으로 Morman 모형을 사용하고 정확한 경계조건을 부과한 ABAQUS⁽⁶⁾의 동적 결과와 c_b 와 식 (52)를 이용한 계산 결과를 비교하였다. 정적 실험의 계산에서 보다는 그 정확도가 떨어지나 여전히 경계조건 차이에 의한 계산 값의 차이는 적다는 것을 알 수 있다(최고 4% 오차). 따라서 일차원 가정을 사용한 식과 c_b 를 이용한 계산이 유용하다는 것을 알 수 있다.

3.3 실험 결과 및 토의

여러 가지 구성방정식들의 성능을 비교하기 위하여 Fig. 4 ~ Fig. 10에 정적으로 변형된 상태를 기준으로 저장 계수(storage modulus, E')의 실험값과 계산 값을 비교하였다. 복소 Young 율 $E^* = E' + iE''$ 는 측정된 힘과 변위로부터 다음과

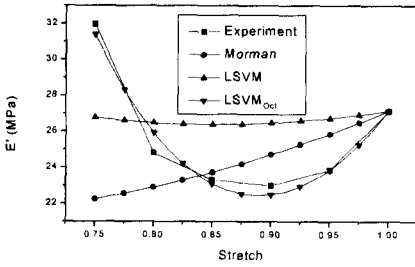


Fig. 6 Storage modulus against static stretch of specimen NR/CB70at 30Hz

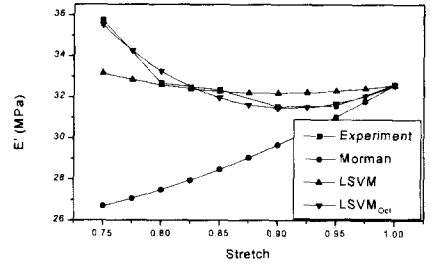


Fig. 8 Storage modulus against static stretch of specimen SBR/CB70 at 30Hz, LSVM_{Oct} means LSVM with c_r

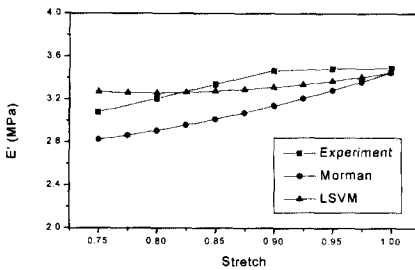


Fig. 7 Storage modulus against static stretch of specimen SBR/CB0at 30Hz

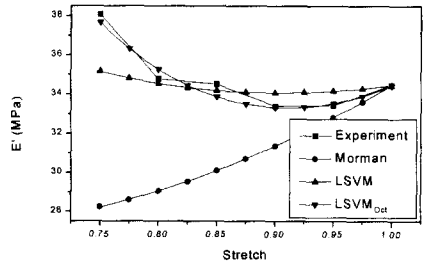


Fig. 9 Storage modulus against static stretch of specimen SBR/CB70at 60Hz, LSVM_{Oct} means LSVM with c_r

같은 식을 사용하여 계산한다.

$$E' = \frac{\Delta\sigma^*}{\varepsilon^*} = \frac{\Delta F^*/A}{\Delta l^*/l} = \lambda^2 \frac{\Delta F^*/A_0}{\Delta l^*/l_0} \quad (55)$$

여기서 ΔF^* 는 동적 힘의 크기, Δl^* 는 복소 변위 증분, A 는 시편의 단면적 그리고 l 은 시편의 길이를 의미한다.

LSVM과 Morman의 모형은 충전되지 않은 고무의 거동을 상당히 잘 묘사함을 Fig. 4와 Fig. 7에서 알 수 있다. 충전된 고무는 정적 변형이 증가함에 따라 E' 이 처음에는 감소하다가 증가하는 것을 Fig. 5, Fig. 6, Fig. 8 ~ Fig. 10에서 관찰할 수 있다. 작은 정적변형에서 저장 계수가 감소하는 것은 충전제의 격자망(network)이 분리되는 것에 기인하고 더 큰 정적 변형 하에서 저장 계수 값의 증가는 고무 분자 사슬의 신장가능성의 한계 때문이다.⁽⁹⁾

충전된 고무에 있어서는 정적 변형 보정 계수를 포함하지 않은 구성방정식을 사용한 계산값과 실험값은 상당한 차이를 보이고 심지어는 정적 변형에 대한 E' 값의 변화 경향조차 일치하지 않는 것을 볼 수 있다. 이것은 정적변형에 의하여 구

성방정식의 시간 영역이 영향을 받지않다는 분리가능성이 충전되지 않은 고무의 거동에만 적용될 수 있음을 말해주고 충전된 고무의 동적 거동을 정확히 해석하기 위해서는 정적 보정계수가 필요함을 의미한다. 또 계산값과 실험값의 차이는 충전제인 카본 블랙의 양에 따라 증가함을 NR/CB50과 NR/CB70의 거동 비교를 통해서 알 수 있다. 즉 고무의 비선형성은 충전제의 양에 비례한다는 것을 의미한다. 정적 변형 보정 계수를 사용하는 점탄성 구성방정식은 실제 고무의 동적거동을 잘 표현함을 Fig. 4 ~ Fig. 10에서 알 수 있다.

Fig. 8 ~ Fig. 10에서 사용된 정적 변형 보정계수는 30Hz 실험결과를 사용하여 결정되었다. 특정 주파수에서 결정된 정적 보정계수는 다른 주파수에서도 효과적이라는 것을 Fig. 9와 Fig. 10에서 알 수 있다. 이것은 본 논문의 가정한 정적 보정계수는 정적 변형만의 함수라는 것을 확인시켜주는 결과이다.

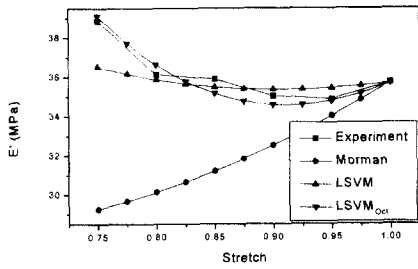


Fig. 10 Storage modulus against static stretch of specimen SBR/CB70at 90Hz, LSVM_{Oct} means LSVM with c_y'

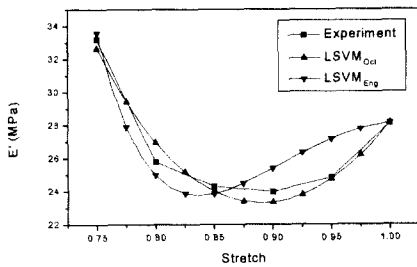


Fig. 11 Comparison between $c_y(I_y)$ and $c_w(I_w)$ of specimen NR/CB70at 60Hz

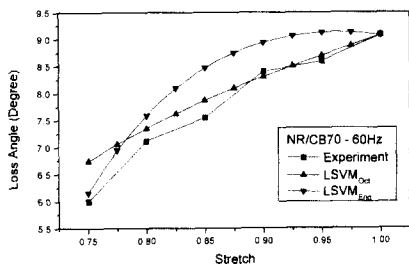


Fig. 12 Comparison between $\theta_y(I_y)$ and $\theta_w(I_w)$ of specimen NR/CB70 at 60Hz

본 논문에서는 정적 보정계수는 변형의 척도로 균일화 자유 에너지를 사용하는 것(c_w')과 일반화된 팔면체 변형률을 사용하는 것(c_y') 두 가지를 제안하였다. c_w' 와 c_y' 의 성능을 비교하기 위하여 Fig. 11 과 Fig. 12 에 서로 다른 보정계수를 가지는 계산값들을 실험값과 비교하였다. \bar{I}_w 를 변

형의 척도로 사용하는 정적 보정계수가 변형이 작은 영역에서 그 성능이 떨어짐을 Fig. 11 과 Fig. 12 에서 알 수 있다. 변형이 작을 때 c_w' 의 성능이 떨어지는 이유는 다음과 같다. 정적 응력은 자유 에너지 함수의 미분 값이고 \bar{I}_w 는 자유 에너지 함수와 상수 배 차이가 나므로 변형이 작을 때의 \bar{I}_w 의 기울기는 0 에 가까운 값이어야 한다. \bar{I}_w 의 기울기가 0 에 가까다는 것은 변형이 작을 때는 상대적으로 보다 작은 보정값으로 이어지기 때문이다. 결론적으로 일반화된 팔면체 변형률을 사용하는 정적 보정계수가 정적 변형의 영향을 표현함에 있어서 \bar{I}_w 를 사용하는 정적변형 보정계수보다 우수한 성능을 보여주고 있다.

4. 결론

본 논문에서는 점탄성체가 정적 대변형에 부가되는 작은 하중을 받고있을 때 정적 변형이 동적 거동에 미치는 영향을 기술할 수 있는 새로운 구성방정식을 제안하였다. 기존 상태를 정적으로 변형된 상태로 사용하여 정적 대변형에 부가되는 동적 하중을 받는 점탄성체의 거동을 기술하는 선형화 된 Simo 의 점탄성 구성방정식(LSVM, linearized Simo's viscoelastic model)을 유도하였다. 또한 새로이 유도된 구성방정식을 객관 응력 증분(objective stress increment)를 사용하여 널리 사용되는 Morman 모형을 포함하는 일반화된 점탄성구성방정식으로 확장하였다. 유도된 구성방정식에 정적 변형보정 계수를 도입하여 기존의 모델로는 기술이 불가능한 점탄성체의 동적 거동에 미치는 정적변형의 영향을 고려하였다. 정적 변형 보정 계수는 일반화된 팔면체 전단 변형률(generalized octahedral shear strain)과 균일화 자유 에너지를 변형의 척도로 사용하여 그 형태를 제안하였다. 제안된 구성방정식의 타당성은 서로 다른 충전제의 양을 가지는 고무 시편의 동적 압축 실험(dynamic compression test)을 통하여 확인하였다. 제안된 점탄성 구성방정식은 실제 고무의 동적거동을 잘 표현함을 저장 계수(storage modulus)와 손실 각(loss modulus)의 실험값과 계산값의 비교를 통하여 확인할 수 있었다.

후 기

본 논문에서 사용된 시편을 제공해 주신 한국 타이어㈜의 권순남 과장님께 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) Truesdell, C. and Noll, W., 1965, *The Non-linear Field theories of Mechanics*, Springer-Verlag, New York, Encyclopedia of Physics, Edited by S. Flügge.
- (2) Simo, J.C., 1987, "A Fully Three-dimensional Finite-strain Viscoelastic Damage Model: Formulation and Computational Aspects," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 60, pp. 153 ~ 173.
- (3) Drozdov, A. D., 1998, "A Model for the Nonlinear Viscoelastic Response in Polymers at Finite Strains," *International Journal of Solids Structures*, Vol. 35, No. 18, pp. 2315 ~ 2347.
- (4) Sullivan, J. I., Morman, K.N. and Pett, R.A., 1980, "A Non-linear Viscoelastic Characterization of a Natural Rubber Gum Vulcanizate," *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 53, pp. 805 ~ 822.
- (5) Zdunek, A. B., 1992, "Determination of Material Response Functions for Prestrained Rubbers," *Rheologica Acta*, Vol. 31, pp. 575 ~ 591.
- (6) Hibbit, Karlsson and Sorenson Inc., 1997, *ABAQUS theory manual*, Version 5.7.
- (7) Coleman, B. D. and Noll W., 1961, "Foundations of Linear Viscoelasticity," *Reviews of Modern Physics*, Vol. 33, pp. 239 ~ 249.
- (8) Lianis, G., 1965, "Application of Irreversible Thermodynamics in Finite Viscoelastic Deformations," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, pp. 623 ~ 629.
- (9) Voet, A. and Morawski, J.C., 1974, "Dynamic Mechanical and Electrical Properties of Vulcanizates at Elongations up to Sample Rupture," *Rubber Chemistry and Technology*, pp. 765 ~ 777.
- (10) Kramer, O., Hvidt, S. and Ferry, J. D., 1994, "Dynamic Mechanical Properties," Academic Press, San Diego, Science and Technology of rubber, edited by James E. Mark, Burak Erman and Frederick R. Eirich.
- (11) Govindjee, S. and Reese, S., 1997, "A Presentation and Comparison of Two Large Deformation Viscoelasticity Models," *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 119, pp. 251 ~ 255.
- (12) Becker, E. B. and Miller, T., 1989, *User's Manual for the TEXPAC Computer Code*, MSI, Austin, Texas.
- (13) Bathe, K. J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, New Jersey.
- (14) Kleiber, M., 1989, *Incremental Finite Element Modelling in Non-linear Solid Mechanics*, John Wiley & Sons, New York.
- (15) Washizu, K., 1982, *Variational Methods in Elasticity & Plasticity*, Pergamon Press, 3rd ed.
- (16) Kim, B.-K. and Youn, S.-K., 1999, "A Viscoelastic Constitutive Model of Rubber Under Small Oscillatory Loads Superimposed on Large Static Deformation," *Int. J. Solids and Structures*, Submitted.
- (17) Zdunek, A.B., 1993, "Theory and Computation of the Steady State Harmonic Response of Viscoelastic Rubber Parts," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 105, pp. 63 ~ 92.
- (18) 정규동, 윤성기, 김봉규, 1999, "고체 추진체의 3차원 비선형 점탄성 구성방정식에 관한 연구," 대한기계학회논문집 A, 제 23 권, 제 3 호, pp. 469 ~ 477.
- (19) Brown, R.P., 1996, *Physical Testing of Rubber*, Chapman & Hall, London, 3rd Ed.
- (20) Nashif, A. D., Jones, D. I. G. and Henderson, J. P., 1985, *Vibration Damping*, John Wiley & Sons, New York.