

랑주방형 압전 비틀림 변환기의 진동특성

권 오 수* · 김 진 오†

(2000년 9월 28일 접수, 2001년 5월 17일 심사완료)

Vibration Characteristics of Langevin-Type Piezoelectric Torsional Transducers

Oh Soo Kwon and Jin Oh Kim

Key Words: Piezoelectrics(압전), Torsional Vibration(비틀림 진동), Langevin-Type Transducer(랑주방형 변환기), Natural Frequency(고유진동수), Mode Shape(모드형상)

Abstract

The vibrational characteristics of Langevin-type piezoelectric torsional transducers, which consist of a couple of piezoelectric discs and a couple of elastic blocks, have been studied theoretically and experimentally in this paper. The differential equations of piezoelectric torsional motion have been derived in terms of the circumferential displacement and the electric potential. Solutions of the boundary-value problem have yielded the natural frequencies and mode shapes of the transducers. The theoretical solutions have been verified by comparing the numerical results with experimental ones.

1. 서 론

압전 변환기(transducer)는 전기신호를 받아 초음파를 발생시키는 역압전 현상과 감지된 초음파를 전기신호로 바꿔주는 정압전 현상을 모두 활용한다.^(1,2) “볼트 체결 랑주방형 변환기(BLT : bolt-clamped Langevin-type transducer)는 Fig. 1에 보인 바와 같이 압전 소자의 양쪽에 탄성체를 결합하여, 원하는 주파수의 진동을 효율적으로 발생시키는 변환기이다.⁽³⁾ 이는 여러 분야에서 센서와 액추에이터로 사용되어지고 있는데, 대부분 두께방향의 종진동을 이용한다. 반면에 본 논문은 탄성봉에 비틀림 진동을 발생시킬 필요에 의해 제작되고 있는 비틀림 변환기를 대상으로 한다.

압전 비틀림 변환기는 종진동 변환기에 비해 복잡하나, 제작에 관한 아이디어가 이미 제시된 것도 있고^(4,5) 실제로 제작된 사례도 보고되어 있다.⁽⁶⁾ 랑주방형 비틀림 변환기 제작이 완성되면 봉의 비틀림 진동과 인접 점성유체의 상호작용^(7,8)에 대한 실험적 검증이 가능하게 될 것이다.

랑주방형 비틀림 변환기를 설계 제작하는 과정에서 선행연구⁽⁹⁾가 있었다. 압전 원판만으로 이루어진 비틀림 변환기에 대한 진동특성 해석에 의해 압전 고유진동수와 모드 형상을 구하고 실험에 의해 고유진동수를 비교 검증하였다. 또한 랑주방형 변환기에서 탄성블록이 고유진동수에 미치는 영향을 해석을 통해 정량적으로 파악하였다.

본 논문은 일반 형태의 랑주방형 비틀림 변환기에 대한 진동특성 해석을 다룬다. 이를 위해 비틀림 진동용 압전 원판의 진동특성 해석결과를 토대로 하고, 탄성블록 2개가 부착된 랑주방형 변환기의 진동 특성을 해석하여 고유진동수와 모드형상을 구한다. 변환기를 제작하여 압전 고유진동수를 측정하고, 계산 결과와 비교하여 이론을 검증한다.

* 회원, 숭실대학교 대학원 기계공학과
(현재, 삼성전기(주) 정보기기사업부 SPK팀)

† 책임저자, 회원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과

E-mail : jokim@saint.ssu.ac.kr

TEL : (02)820-0662 FAX : (02)820-0668

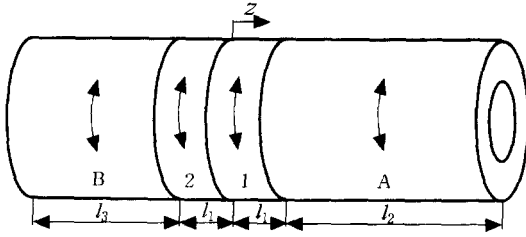


Fig. 1 Schematic diagram of the Langevin-type transducer, consisting of two piezoelectric disks and two elastic blocks

2. 압전 비틀림 운동 방정식

압전층의 두께 방향 진동에 대해서는 전기-역학적 관계식이 잘 정리되어 있다.⁽¹⁰⁾ 그와 같은 방식을 따라서, 비틀림 진동을 하는 원통형 압전체의 운동을 표현하기 위하여 원주 방향 변위 $u(r, z, t)$ 와 전기 퍼텐셜 $\phi(r, z, t)$ 를 사용한다. 이때 원형(또는 환형) 단면에서의 원주방향 전단 응력 $\tau_{z\theta}$ 와 단면의 전기적 변위 D 는 전단 변형률 $(\partial u/\partial z)$ 및 전기장 $(-\partial \phi/\partial z)$ 과의 관계가 다음과 같다.

$$\tau_{z\theta} = G \frac{\partial u}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{1}$$

$$D = \epsilon \frac{\partial u}{\partial z} - \zeta \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{2}$$

여기서 G 는 전단탄성계수(shear modulus), ϵ 는 압전응력정수(piezoelectric stress constant), ζ 는 유전율(permittivity)이다.

힘의 평형으로부터 얻은 식과 정전기적 방정식에 식 (1)과 (2)를 대입하여, 다음과 같은 지배방정식을 얻는다.⁽⁹⁾

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\epsilon}{\zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{4}$$

여기서 파동방정식 (3)의 $c = [\hat{G}/\rho]^{1/2}$ 는 비틀림 파동의 전파속도이고, $\hat{G} (= G + \epsilon^2/\zeta)$ 는 압전 현상이 포함되도록 수정된 전단탄성계수이며, ρ 는 밀도이다.

전극에 가해지는 전기신호가 진동수 ω 로 시간 t 에 따라 조화함수 형태로 변화하는 신호라면, 진동 변위들도 시간 t 에 대한 조화함수 형태로

간주할 수 있다. 또한 식 (3)과 (4)는 반경방향 좌표 r 에 무관하므로, $u(r, z, t)$ 와 $\phi(r, z, t)$ 를 다음과 같이 변수분리 할 수 있다.

$$u(r, z, t) = \tilde{u}(z)R(r)e^{j\omega t} \tag{5}$$

$$\phi(r, z, t) = \tilde{\phi}(z)R(r)e^{j\omega t} \tag{6}$$

여기서 $R(r)$ 은 비틀림 운동의 반경방향 기본 모드인 경우 반지름 r 에 비례하는 함수인데, 좀 더 일반적인 상황을 표현할 수 있도록 r 의 함수로 남겨둔다. 식 (5)와 (6)을 식 (3)과 (4)에 대입하면 다음과 같이 $\tilde{u}(z)$ 와 $\tilde{\phi}(z)$ 에 대한 지배방정식을 얻는다.

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dz^2} + k^2 \tilde{u} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dz^2} = \frac{\epsilon}{\zeta} \frac{d^2 \tilde{u}}{dz^2} \tag{8}$$

여기서 $k (= \omega/c)$ 는 파동수이다.

헬름홀츠(Helmholtz) 방정식 (7)의 해는 다음과 같은 형태로 된다.

$$\tilde{u}(z) = A \cos kz + B \sin kz \tag{9}$$

식 (9)를 식 (8)에 대입한 후 $\tilde{\phi}(z)$ 의 해를 구하면 다음 식을 얻는다.

$$\tilde{\phi}(z) = \frac{\epsilon}{\zeta} (A \cos kz + B \sin kz) + az + b \tag{10}$$

식 (9)와 (10)에서 결정되지 않은 A, B, a, b 는 경계조건에 따라 결정된다.

전기적 변위 $D(r, z, t)$ 도 다음과 같이 변수분리된다.

$$D(r, z, t) = \tilde{D}(z)R(r)e^{j\omega t} \tag{11}$$

식 (5), (6), (11)을 식 (2)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\tilde{D}(z) = \epsilon \frac{d\tilde{u}}{dz} - \zeta \frac{d\tilde{\phi}}{dz} \tag{12}$$

여기에 식 (9)와 (10)을 대입하면 다음과 같이 간단해진다.

$$\tilde{D} = -\zeta a = \text{constant} \tag{13}$$

즉 전기적 변위 $D(r, z, t)$ 는 두께 방향으로 일정하다.

3. 비틀림 변환기 원판의 진동

량주방향 변환기는 Fig. 1에 보인 바와 같이, 압전체로 제작된 원판과 탄성체인 블록이 볼트체결로 결합된다. 따라서 량주방향 비틀림 변환기의 진동특성을 규명하기 위해서는 우선 압전 비틀림 변환기 원판의 진동특성을 규명할 필요가 있다. 이를 위해서, 앞절에서 유도한 운동방정식과 해의 형태를 이용하며 역학적 경계조건과 전기적 경계조건을 적용하여, 역학적 진동 변위와 전기적 진동 변위를 구한다.

3.1 단층 변환기

원통형의 압전 비틀림 변환기 하나가 Fig. 2에 보인 바와 같이 있다. 압전 변환기의 두께는 l 이고, 양쪽 면 사이에 작용하는 전압 $V_0 e^{j\omega t}$ 에 의해 구동되고 있다.

변환기의 한쪽 면이 고정되고 다른 쪽 면이 자유로운 경우 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

$$z=0 \text{ 에서 } \begin{aligned} \tilde{u} &= 0 & (14a) \\ \tilde{\phi} &= 0 & (14b) \end{aligned}$$

$$z=l \text{ 에서 } \begin{aligned} \tilde{r} &= 0 & (14c) \\ \tilde{\phi} &= V_0 & (14d) \end{aligned}$$

전단응력 $\tau_{z\theta} (= \tilde{r}(z)R(r)e^{j\omega t})$ 는 식 (1)에 표현된 관계를 가지므로, 식 (9)와 (10)에 (14a~d)를 적용하여 해를 구하면 다음과 같다.

$$\tilde{u}(z) = \frac{\varepsilon V_0}{\Delta_1} \sin kz \quad (15)$$

$$\tilde{\phi}(z) = \frac{V_0}{\Delta_1} \left(\frac{\varepsilon^2}{\zeta} \sin kz - \hat{G}k \cos kl z \right) \quad (16)$$

$$\tilde{D} = \frac{\zeta V_0}{\Delta_1} \hat{G}k \cos kl \quad (17)$$

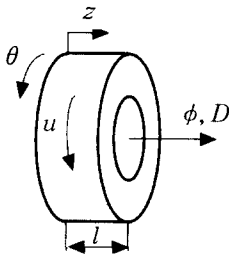


Fig. 2 Schematic diagram of a single-layer transducer

여기서 Δ_1 은 다음과 같다.

$$\Delta_1 = \frac{\varepsilon^2}{\zeta} \sin kl - \hat{G}kl \cos kl \quad (18)$$

따라서 $\Delta_1=0$ 은 한쪽면이 고정되고 다른쪽 면이 자유로운 단층 압전 비틀림 변환기의 공진을 나타내는 특성 방정식이다.

변환기의 양쪽 면이 자유로울 때 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

$$z=0 \text{ 에서 } \begin{aligned} \tilde{r} &= 0 & (19a) \\ \tilde{\phi} &= 0 & (19b) \end{aligned}$$

$$z=l \text{ 에서 } \begin{aligned} \tilde{r} &= 0 & (19c) \\ \tilde{\phi} &= V_0 & (19d) \end{aligned}$$

경계조건(19a~d)를 적용하여 해를 구하면 다음과 같다.

$$\tilde{u}(z) = \frac{\varepsilon V_0}{\Delta_2} [\cos kz - \cos k(l-z)] \quad (20)$$

$$\tilde{\phi}(z) = \frac{V_0}{\Delta_2} \left\{ \frac{\varepsilon^2}{\zeta} [\cos kz - \cos k(l-z) + \cos kl - 1] + \hat{G}k \sin kl z \right\} \quad (21)$$

$$\tilde{D} = -\frac{\zeta V_0}{\Delta_2} \hat{G}k \sin kl \quad (22)$$

여기서 Δ_2 는 다음과 같다.

$$\Delta_2 = \hat{G}kl \sin kl - 2\frac{\varepsilon^2}{\zeta} (1 - \cos kl) \quad (23)$$

단 $\cos kl = 1$ 이면 $\tilde{u}(z) = 0$ 과 $\tilde{\phi}(z) = 0$ 이 되어 무의미하므로, $1 - \cos kl \neq 0$ 이다. $\Delta_2=0$ 은 양쪽 면이 자유로운 단층 압전 비틀림 변환기의 공진을 나타내는 특성방정식이다.

변환기의 한쪽 면이 고정되고 다른 쪽 면이 자유로운 경우와 변환기의 양쪽 면이 자유로운 경우에 대해서 압전 고유진동수를 $\Delta_1=0$ 와 $\Delta_2=0$ 로부터 각각 계산하고 그 결과를 실험으로 검증한 바 있다.⁽⁹⁾ 한쪽면이 고정되고 다른 쪽 면이 자유로운 변환기의 진동모드는 식 (15)로부터 계산할 수 있는데, 압전효과가 없는 탄성 원판에서 나타나는 모드들이 유사하게 존재한다. 반면에, 양쪽면이 자유로운 변환기의 진동모드를 식 (20)으로부터 계산해보면, $1 - \cos kl \neq 0$ 이라는 단서로 인해 탄성 원판의 진동모드와 달리, 대칭(even)모드는 존재하지 않고 반대칭(odd)모드만 존재한다.

3.2 이층 변환기

동일한 압전 비틀림 변환기 원판 2개가 서로 반대방향으로 분극되어 Fig. 3에 보인바와 같이 한 쌍으로 결합되어 있다. 두께가 l 인 압전원판 1과 2로 구성된 2층 변환기는 각 층의 양면 사이에 작용하는 전압 $V_0 e^{j\omega t}$ 에 의해 구동되고 있으므로, 가운데를 대칭면으로 하여 양쪽 면에 전압 $V_0 e^{j\omega t}$ 가 작용하고 대칭면에서 전압이 0이라고 간주한다. 변환기의 양쪽 면이 자유로울 때, 경계 조건은 다음과 같이 설정된다.

$$z=0 \text{ 에서 } \tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 \quad (24a)$$

$$\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2 \quad (24b)$$

$$\tilde{\phi}_1 = 0 \quad (24c)$$

$$\tilde{\phi}_2 = 0 \quad (24d)$$

$$z=l \text{ 에서 } \tilde{\tau}_1 = 0 \quad (24e)$$

$$\tilde{\phi}_1 = V_0 \quad (24f)$$

$$z=-l \text{ 에서 } \tilde{\tau}_2 = 0 \quad (24g)$$

$$\tilde{\phi}_2 = V_0 \quad (24h)$$

여기서 첨자 1과 2는 각각 대응하는 압전 원판을 나타낸다. 원판 2에 대해서는 분극이 반대방향으로 되어 있기 때문에 지배방정식 (8) 대신에 다음 식을 사용해야 한다.

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dz^2} = -\frac{\epsilon}{\xi} \frac{d^2 \tilde{u}}{dz^2} \quad (25)$$

8개의 경계조건(24a~h)를 적용하여 해를 구하면 다음과 같다.

$$\tilde{u}_1(z) = \frac{\epsilon V_0}{\Delta_1} \sin kz \quad (26)$$

$$\tilde{\phi}_1(z) = \frac{V_0}{\Delta_1} \left(\frac{\epsilon^2}{\xi} \sin kz - \hat{G} k \cos kl z \right) \quad (27)$$

$$\tilde{D}_1 = \frac{\xi V_0}{\Delta_1} \hat{G} k \cos kl \quad (28)$$

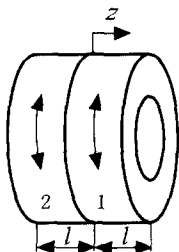


Fig. 3 Schematic diagram of a two-layer transducer

$$\tilde{u}_2(z) = \frac{\epsilon V_0}{\Delta_1} \sin kz \quad (29)$$

$$\tilde{\phi}_2(z) = -\frac{V_0}{\Delta_1} \left(\frac{\epsilon^2}{\xi} \sin kz - \hat{G} k \cos kl z \right) \quad (30)$$

$$\tilde{D}_2 = \frac{\xi V_0}{\Delta_1} \hat{G} k \cos kl \quad (31)$$

따라서 양쪽면이 자유로운 이층 압전 변환기의 공진을 나타내는 특성방정식도 $\Delta_1=0$ 이다.

그러므로 대칭적으로 결합된 이층 비틀림 변환기의 경우, 대칭면을 기준으로 한쪽 부분만을 대상으로 하여 대칭면이 고정되고 다른쪽 면이 자유로운 경계조건을 적용하여 해석을 하면 전체의 고유진동수를 구할 수 있다. 이러한 사실은 진동형상을 나타내는 식 (26)과 (29)가 단층 변환기의 진동형상을 나타내는 식 (15)와 동일한 것으로도 뒷받침된다.

한편, 식 $\Delta_2=0$ 에서 l 을 $2l$ 로 대체하여 식을 정리하면 식 $\Delta_1=0$ 과 동일한 특성방정식을 얻는다. 따라서 이층 변환기를 해석할 때 이층 두께에 해당하는 단층변환기로 간주하여 해석하는 것도 가능하다.⁽⁹⁾

4. 랑주방형 비틀림 변환기의 진동

앞 절의 해석 대상인 이층 변환기의 양쪽에 탄성체 블록이 결합된 랑주방형 비틀림 변환기의 진동특성을 파악하고자 한다. 두개의 탄성블록이 동일한 경우 랑주방형 변환기가 대칭구조임을 감안하여 해석할 수 있다. 두개의 탄성블록이 동일하지 않은 경우 일반적인 비대칭 구조로서 다루게 된다.

4.1 대칭 변환기의 진동 특성 해석

본 절에서는 Fig. 1의 랑주방형 변환기의 특별한 경우로서, 탄성블록 A와 B가 동일한 대칭구조 랑주방형 변환기에 대해서 진동 특성을 해석한다. 즉, 두께가 l_1 인 압전 원판 1과 2가 결합되고, 그 양쪽에 두께가 l_2 인 탄성 블록 A와 B가 각각 결합된 구조이다($l_3=l_2$). 다섯 개의 경계면에 대한 경계조건을 설정하여 해를 구하려면 대단히 복잡한 수식을 얻게될 것이다. 따라서앞 절에서 확인한 바를 토대로, Fig. 4와 같이 대칭면의 한쪽 부분만을 대상으로, 대칭면이 고정된 경계조건을 설정하여 해를 구한다.

Fig. 4와 같이 탄성블록이 부착된 단층 압전 비틀림 변환기의 대칭면이 고정된 상태에서 압전체가 전압 $V_0 e^{j\omega t}$ 에 의해 구동되고 있을 때 경계 조건은 다음과 같이 설정된다.

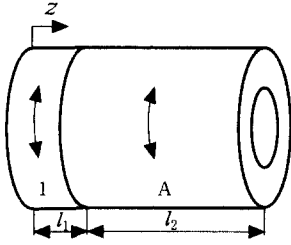


Fig. 4 Symmetric half of the Langevin-type transducer

$$z=0 \text{ 에서 } \begin{aligned} \tilde{u}_1 &= 0 & (32a) \\ \tilde{\phi}_1 &= 0 & (32b) \end{aligned}$$

$$z=l_1 \text{ 에서 } \begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \tilde{u}_A & (32c) \\ \tilde{\tau}_1 &= \tilde{\tau}_A & (32d) \\ \tilde{\phi}_1 &= V_0 & (32e) \end{aligned}$$

$$z=l_1+l_2 \text{ 에서 } \tilde{\tau}_A = 0 \quad (32f)$$

압전층의 지배방정식은 식 (7), (8)과 동일하고, 탄성블록의 지배방정식은 $\epsilon=0$ 로 하였을 때의 식 (7)과 동일하다.

6개의 경계조건(32a~f)을 적용하여 랑주방형 비틀림 변환기의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\tilde{u}_1(z) = \frac{\epsilon V_0}{\Delta_3} \frac{\cos k_2 l_2}{\sin k_1 l_1} \sin k_1 z \quad (33)$$

$$\tilde{\phi}_1(z) = \frac{1}{\Delta_3} \frac{\epsilon^2 V_0}{\zeta} \frac{\cos k_2 l_2}{\sin k_1 l_1} \sin k_1 z - \left(\frac{1}{\Delta_3} \frac{\epsilon^2 V_0}{\zeta} \cos k_2 l_2 + \frac{V_0}{l_1} \right) z \quad (34)$$

$$\tilde{D}_1 = \frac{1}{\Delta_3} \epsilon^2 V_0 \cos k_2 l_2 + \frac{\zeta V_0}{l_1} \quad (35)$$

$$\tilde{u}_A(z) = \frac{\epsilon V_0}{\Delta_3} \cos k_2 (l_1 + l_2 - z) \quad (36)$$

여기서 Δ_3 는 다음과 같다.

$$\Delta_3 = \left(\frac{\epsilon^2}{\zeta} \sin k_1 l_1 - \hat{G}_1 k_1 l_1 \cos k_1 l_1 \right) \cos k_A l_2 + G_A k_A l_1 \sin k_1 l_1 \sin k_A l_2 \quad (37)$$

따라서 $\Delta_3=0$ 는 대칭구조의 랑주방형 변환기의 공진을 나타내는 특성방정식이다.

탄성 블록 A와 B가 없다면, $G_A=0, l_2=0$ 이므로 식 (37)은 식 (18)과 같게 된다. 이는 앞 절에서 이중변환기에 대해 살펴본 것과 같다.

Table 1 Electromechanical properties of a PZT (EDO EC-65)

| Electromechanical Properties | Values |
|---|--|
| mass density, ρ | 7500 kg/m ³ |
| permittivity, ζ | 8002×10^{-12} C ² /Nm ² |
| piezoelectric strain constant, d_{15} | 584×10^{-12} C/N |
| elastic constant, s_{44}^E | 46.9×10^{-12} m ² /N |
| piezoelectric stress constant, $\epsilon (= d_{15}/s_{44}^E)$ | 12.45 C/m ² |
| shear modulus, $G (= 1/s_{44}^E)$ | 21.3 GPa |
| modified shear modulus, $\hat{G} (= G + \epsilon^2/\zeta)$ | 40.7 GPa |

Table 2 Elastic properties of aluminum alloy (2014-T6) and stainless steel(SUS-302)

| | Properties | Values |
|---------|----------------------|------------------------|
| 2014-T6 | mass density, ρ | 2800 kg/m ³ |
| | shear modulus, G | 28 GPa |
| SUS-302 | mass density, ρ | 7920 kg/m ³ |
| | shear modulus, G | 75 GPa |

식 (37)에 형상수치와 물성치를 대입하여 고유진동수를 구하고, 4.3절에서 실험결과와 비교하였다. 계산과 실험에 사용된 압전소자는 미국 EDO사의 PZT (EC-65)로서, 필요한 물성치들이 Table 1에 정리되어 있는데 일반 문헌에 나와있는 물성치와 비슷하다.^(11,12) 압전 원판 한층의 두께는 4mm이다. 또한 탄성블록의 재질은 알루미늄 합금 2014-T6이고, 그 물성치⁽¹³⁾가 Table 2에 정리되어 있다. 탄성블록의 두께는 30mm이다.

특성방정식 $\Delta_3=0$ 으로부터 압전 고유진동수를 계산한다. 식에서 미지수인 k 는 Mathematica⁽¹⁴⁾의 FindRoot 기능을 사용하여 계산할 수 있으며 진동수 f 는 다음 식을 통해 계산된다.

$$f = \frac{kc}{2\pi} \quad (38)$$

계산된 고유진동수를 Table 3에 기재하였다. 그리고 고유진동수에 대응하는 진동형상을 식 (33)과 (36)으로부터 계산하여 Fig. 5에 나타내었다.

Table 3 Comparison of the calculated and measured natural frequencies of a symmetric Langevin-type piezoelectric transducer

| mode | natural frequency (kHz) | | difference (%) |
|------|-------------------------|----------|----------------|
| | calculated | measured | |
| 1 | 22.4 | 19.8 | 13 |
| 2 | 65.7 | 58.2 | 13 |
| 3 | 107 | 90.7 | 18 |
| 4 | 148 | 161 | -8 |

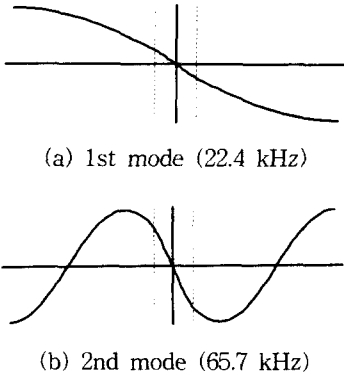


Fig. 5 Mode shapes of the symmetric Langevin-type transducer

해석이 생략된 대칭면 반대쪽의 진동형상은 반대칭(odd) 모드가 되도록 그렸다. 점선은 압전 원판과 탄성블록의 경계면 위치를 나타낸다.

4.2 비대칭 변환기의 진동 특성 해석

랑주방형 변환기의 양쪽 탄성블록이 동일하지 않은 비대칭 구조가 일반적으로 더 많이 사용된다. Fig. 1에 보인 바와 같이 두께가 l_1 인 압전 원판 1과 2가 결합되고, 그 한쪽에는 두께가 l_2 인 탄성블록 A가 결합되고 다른 쪽에는 두께가 l_3 인 탄성블록 B가 결합된 구조에 대해서 진동 특성을 해석한다. 이 경우에 압전 원판 1과 2는 3.2절에서 이해한 바에 따라 Fig. 6과 같이 두께가 $2l_1$ 인 단층 압전 원판으로 간주하는 것이 해석을 단순화하는데 도움이 된다. 비대칭 랑주방형변환기가 전압 $2V_0 e^{j\omega t}$ 에 의해 구동되고 있을 때 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

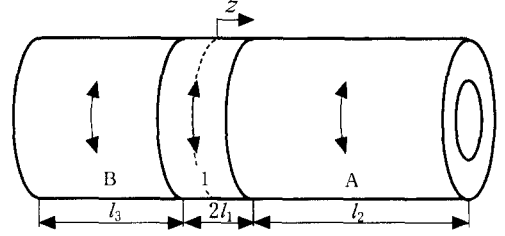


Fig. 6 Schematic diagram of the asymmetric Langevin-type transducer

$$z = l_1 \text{ 에서 } \quad \tilde{u}_1 = \tilde{u}_A \quad (39a)$$

$$\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_A \quad (39b)$$

$$\tilde{\phi}_1 = 2V_0 \quad (39c)$$

$$z = -l_1 \text{ 에서 } \quad \tilde{u}_1 = \tilde{u}_B \quad (39d)$$

$$\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_B \quad (39e)$$

$$\tilde{\phi}_1 = 0 \quad (39f)$$

$$z = l_1 + l_2 \text{ 에서 } \quad \tilde{\tau}_A = 0 \quad (39g)$$

$$z = -(l_1 + l_3) \text{ 에서 } \quad \tilde{\tau}_B = 0 \quad (39h)$$

4.1절에서와 같은 지배방정식을 사용하고 8개의 경계조건(39a~h)를 적용하여 비대칭 랑주방형 비틀림 변환기의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\tilde{u}_1(z) = A_1 \cos k_1 z + B_1 \sin k_1 z \quad (40)$$

$$A_1 = -\frac{\epsilon V_0}{\Delta_4} [G_A k_A l_1 \sin k_A l_2 \cos k_B l_3 - G_B k_B l_1 \cos k_A l_2 \sin k_B l_3] \sin k_1 l_1$$

$$B_1 = \frac{\epsilon V_0}{\Delta_4} [2 \hat{G}_1 k_1 l_1 \sin k_1 l_1 \cos k_A l_2 \cos k_B l_3 + G_A k_A l_1 \cos k_1 l_1 \sin k_A l_2 \cos k_B l_3 + G_B k_B l_1 \cos k_1 l_1 \cos k_A l_2 \sin k_B l_3]$$

$$\tilde{\phi}_1(z) = \frac{\epsilon}{\xi} \tilde{u}_1(z) + az + b \quad (41)$$

$$a = -\frac{1}{l_1} \left(\frac{\epsilon}{\xi} \sin k_1 l_1 B_1 - V_0 \right)$$

$$b = -\frac{\epsilon}{\xi} (\cos k_1 l_1 A_1 - \sin k_1 l_1 B_1) + l_1 a$$

$$\tilde{u}_A(z) = A_2 \cos k_A z + B_2 \sin k_A z \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{2\varepsilon V_0}{\Delta_4} \left(\widehat{G}_1 k_1 l_1 \sin k_1 l_1 \cos k_B l_3 \right. \\
 &\quad \left. + G_B k_B l_1 \cos k_1 l_1 \sin k_B l_3 \right) \\
 &\quad \cdot \sin k_1 l_1 \cos k_A (l_1 + l_2) \\
 B_2 &= \frac{2\varepsilon V_0}{\Delta_4} \left(\widehat{G}_1 k_1 l_1 \sin k_1 l_1 \cos k_B l_3 \right. \\
 &\quad \left. + G_B k_B l_1 \cos k_1 l_1 \sin k_B l_3 \right) \\
 &\quad \cdot \sin k_1 l_1 \sin k_A (l_1 + l_2) \\
 \widehat{u}_B(z) &= A_3 \cos k_B z + B_3 \sin k_B z \quad (43) \\
 A_3 &= -\frac{2\varepsilon V_0}{\Delta_4} \left(\widehat{G}_1 k_1 l_1 \sin k_1 l_1 \cos k_A l_2 \right. \\
 &\quad \left. + G_A k_A l_1 \cos k_1 l_1 \sin k_A l_2 \right) \\
 &\quad \cdot \sin k_1 l_1 \cos k_B (l_1 + l_3) \\
 B_3 &= \frac{2\varepsilon V_0}{\Delta_4} \left(\widehat{G}_1 k_1 l_1 \sin k_1 l_1 \cos k_A l_2 \right. \\
 &\quad \left. + G_A k_A l_1 \cos k_1 l_1 \sin k_A l_2 \right) \\
 &\quad \cdot \sin k_1 l_1 \sin k_B (l_1 + l_3)
 \end{aligned}$$

여기서 Δ_4 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \Delta_4 &= \left[\widehat{G}_1 k_1 l_1 \sin k_1 l_1 \cos k_A l_2 \right. \\
 &\quad \left. + G_A k_A l_1 \cos k_1 l_1 \sin k_A l_2 \right] \\
 &\quad \cdot \left[\left(\frac{\varepsilon^2}{\xi} \sin k_1 l_1 - \widehat{G}_1 k_1 l_1 \cos k_1 l_1 \right) \cos k_B l_3 \right. \\
 &\quad \left. + G_B k_B l_1 \sin k_1 l_1 \sin k_B l_3 \right] \\
 &\quad + \left[\widehat{G}_1 k_1 l_1 \sin k_1 l_1 \cos k_B l_3 \right. \\
 &\quad \left. + G_B k_B l_1 \cos k_1 l_1 \sin k_B l_3 \right] \\
 &\quad \cdot \left[\left(\frac{\varepsilon^2}{\xi} \sin k_1 l_1 - \widehat{G}_1 k_1 l_1 \cos k_1 l_1 \right) \cos k_A l_2 \right. \\
 &\quad \left. + G_A k_A l_1 \sin k_1 l_1 \sin k_A l_2 \right] \quad (44)
 \end{aligned}$$

따라서 $\Delta_4 = 0$ 는 비대칭 구조의 량주방형 변환기의 공진을 나타내는 특성방정식이다.

Table 4 Comparison of the calculated and measured natural frequencies of an asymmetric Langevin-type piezoelectric transducer

| mode | natural frequency (kHz) | | difference (%) |
|------|-------------------------|----------|----------------|
| | calculated | measured | |
| 1 | 15.4 | 13.7 | 12 |
| 2 | 30.3 | 27.7 | 9 |
| 3 | 44.1 | 40.9 | 8 |
| 4 | 61.8 | 56.0 | 10 |

위에서 구한 식 (40)-(44)에 $G_A = G_B$, $k_A = k_B$, $l_2 = l_3$ 을 대입하고 정리하면 앞에서 유도한 대칭 구조의 량주방형 변환기의 해와 동일한 식을 얻는다.

탄성블록 A의 두께가 60mm이고 B의 두께가 30mm이며 그 외의 치수와 물성치는 4.1절에서와 같은 비대칭 량주방 변환기의 진동형상을 식 (40)-(44)로부터 계산하였다. 4.1절에서와 같은 방식으로 특성방정식 $\Delta_4 = 0$ 으로부터 압전 고유진동수를 계산하여 Table 4에 기재하였다. 계산결과는 4.3절에서 측정결과와 비교된다. 그리고 고유진동수에 대응하는 진동형상을 식 (40), (42), (43)으로부터 계산하여 Fig. 7에 나타내었다. 한편, 탄성블록 A와 B의 두께는 30mm로 같게 하고 A의 재질은 스텐레스 강(SUS-302)이고 B의 재질은 알루미늄 합금(2014-T6)으로 하여 계산한 진동형상은 Fig. 8에 나타내었다. 계산에 사용된 스텐레스 강의 물성치⁽¹⁵⁾도 Table 2에 기재되어 있다.

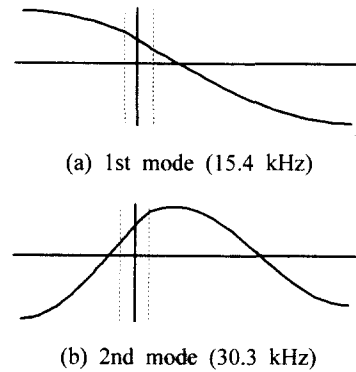


Fig. 7 Mode shapes of the asymmetric Langevin-type transducer with different block size

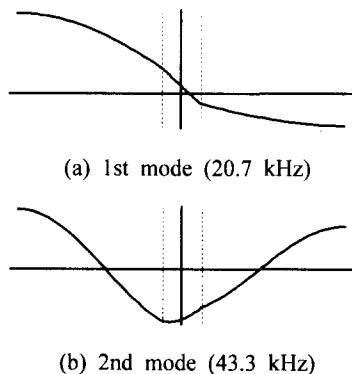


Fig. 8 Mode shapes of the asymmetric Langevin-type transducer with different block material

Fig. 7(a)와 8(a)는 각각 1차 모드를 나타내는데, Fig. 5(a)에서처럼 반대칭 모드와 유사한 형상을 보이고 있으나 절점의 위치는 비대칭적으로 나타나고 있다. Fig. 7(b)와 8(b)는 각각 2차 모드를 나타내는데, 대칭형 변환기에서는 나타나지 않았던 대칭 모드에 해당하는 형상을 보이고 있고, 절점의 위치는 비대칭적으로 나타나고 있다. Fig. 7과 Fig. 8에서 보인 바와 같이 비대칭구조의 랑주방형 변환기에서는 반대칭 모드와 대칭 모드가 모두 나타나며 절점의 위치는 비대칭으로 나타난다.

4.3 실험 및 고찰

앞 절(4.1, 4.2)에서 해석한 결과를 실험으로 확인하기 위해, 계산에 사용된 것과 동일한 치수의 대칭구조와 비대칭구조의 랑주방형 변환기들을 제작하였다. 비틀림 압전 원판의 경우 분극작업이 종진동 압전 원판에 비해 복잡하다.⁽⁶⁾ 본 연구에서는 비틀림 압전 원판을 제작하기 위해 8구간으로 나누어 분극 하였다. 이렇게 제작된 압전 원판과 탄성블록을 스텐레스 강 볼트를 이용하여

체결하여 랑주방형 변환기를 제작하였다. 압전 원판과 탄성블록 사이에는 구동 전압을 공급하기 위한 구리판 전극을 삽입하였다.

압전고유진동수를 측정하는 방법으로 Impedance Gain/Phase Analyzer(HP-4194A)를 사용하였다. 제작된 변환기의 임피던스를 주파수 함수로 측정된 결과가 Fig. 9에 보여 있다. 이 그래프에서 임피던스가 극소값을 나타내는 주파수가 압전 고유진동수이다. 이와 같이 측정된 압전 고유진동수와 앞 절에서 계산된 압전 고유진동수를 Table 3과 4에서 비교한다. 계산값에 비해서 측정값이 10% 정도 낮게 나타나고 있다. 이러한 차이는 실물 변환기에서 해석 모델에 반영되지 않은 사항들, 가령 압전 원판과 탄성 블록을 체결하는 데에 사용된 스텐레스 강 볼트, 조이기 위해 탄성 블록 바깥 곡면 일부를 평탄하게 깎은 형상 등으로 인한 오차로 보인다. 이와 같이 모델의 차이로 인한 오차를 감안하면, 어느 정도 타당한 결과로 보인다.

전기적인 방식의 실험에 의해 압전고유진동수를 측정하여 계산 결과와 비교할 수 있었다. 그러나 비틀림 진동모드를 측정할 실험장치를 갖추지 못해서 역학적 운동을 측정하지 못하였고, 변환기의 주파수별 감도 특성을 파악하지는 못하였다.

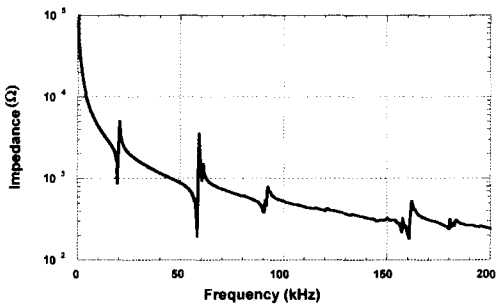
5. 결 론

랑주방형 압전 비틀림 변환기의 진동특성에 대한 해와 특성방정식을 유도하였다. 그리고 식에 물성치를 각각 대입하여 모드형상과 고유진동수를 구하고, 제작한 압전 비틀림 변환기의 고유진동수와 비교하였다

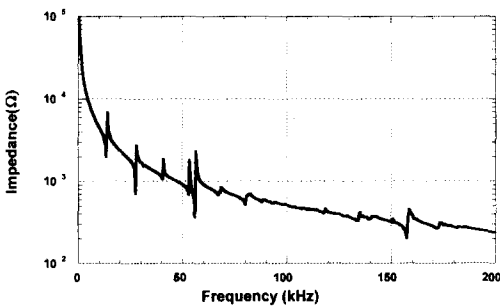
랑주방형 변환기의 특별한 경우로 양쪽 탄성블록이 동일하여 대칭구조인 경우, 대칭모드가 나타나지 않으며 대칭면의 한쪽 부분만을 대상으로 대칭면이 고정된 경계조건을 설정하여 해를 구할 수 있다. 이는 일반적인 비대칭구조의 랑주방형 변환기에 대한 해로부터 대칭구조의 경우에 대한 해로 단순화하여 확인하였다.

양쪽 탄성블록의 재질이 같으나 치수가 다른 비대칭 랑주방형 변환기의 경우, 또는 양쪽블록의 치수는 같으나 재질이 다른 랑주방형 변환기의 경우, 대칭구조 변환기와는 달리 반대칭모드와 대칭모드가 모두 나타났다. 절점의 위치는 비대칭으로 나타났다.

변환기의 진동특성에 대해 유도된 해와 특성방정식을 이용하여, 탄성 블록 부착에 따라 저하되는 고유진동수를 예상할 수 있게 되었다. 탄성블록의 두께를 적절히 선정함으로써 원하는 고유진동수의 랑주방형 변환기를 설계할 이론적 토대를 마련하였다.



(a) Symmetric transducer



(b) Asymmetric transducer

Fig. 9 Impedance curves of Langevin-type transducers measured as a function of the frequency

후 기

본 논문은 ISTEK(주)(구, ㈜신창)이 주관한 산업
기반기술개발사업의 위탁기술개발 과제를 수행하
며 얻은 연구결과임.

참고문헌

- (1) Ikeda, T., 1996, *Fundamentals of Piezo-electricity*, Oxford University Press, Oxford.
- (2) Uchino, K., 1997, *Piezoelectric Actuators and Ultrasonic Motors*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- (3) Sashida, T., Kenjo, T., 1993, *An Intro- duction to Ultrasonic Motors*, Oxford University Press, Oxford.
- (4) Mishiro, S., 1987, "Torsional Vibration Apparatus," United States Patent 4,652,786.
- (5) Mishiro, S., 1988, "Torsion Vibrator," United States Patent 4,787,265.
- (6) 根本佐久良雄, 森榮司, 1972, "ホルト締め電氣 ひす"みねし"り振動子," 日本音響學會誌, 28卷 3号, pp. 117~126.
- (7) 김진오, 전한용, 2000, "봉의 비틀림 고유진동 에 대한 인접 점성유체의 영향," 한국소음진동공 학회지, 제10권, 제1호, pp. 168~173.
- (8) 김진오, 1999, "초음파 점도계용 고체 매질의 탄성파와 인접 점성유체 간의 상호작용," 한국음 향학회지, 제18권, 제5호, pp. 28~34.
- (9) 권오수, 김진오, 2000, "압전 비틀림 변환기 의 진동특성 해석," 한국소음진동학회지, 제10권 제6호, pp. 955~962.
- (10) Miu, D. K., 1993, *Mechatronics: Electro- mechanics and Contromechanics*, Springer- Verlag, New York, Ch. 6.
- (11) 岡崎清, 1983, *セラミック誘電体工學*, 第3版, 學獻社, 第8章.
- (12) Berlincourt, D. A., Cmolik, C., and Jaffe, H., 1960, "Piezoelectric Properties of Polycrystalline Lead Titanate Zirconate Compositions," Proceedings of the IRE, pp. 220~229.
- (13) Gere, J. M., Timoshenko, S. P., 1990, *Mechanics of Materials* 3rd ed., PWS Publishing Co., pp. 777~782.
- (14) Wolfram, S., 1988, *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley Publishing Co., New York.
- (15) Beer, F. P., Johnston, E. R., 1992, *Mechanics of Materials 2nd ed. in SI units*, McGraw-Hill Book Co., Appendix B.