수평 환형 공간에서의 중간 Prandtl 수 유체의 혼돈 열대류: Pr=0.2

유 주 식† · 김 용 진**

(2000년 9월 8일 접수, 2001년 1월 8일 심사완료)

Chaotic Thermal Convection of a Intermediate Prandtl-Number Fluid in a Horizontal Annulus: Pr=0.2

Joo-Sik Yoo and Yong-Jin Kim

Key Words: Oscillatory Convection(진동 대류), Bifurcation (분기), Chaos(혼돈), Periodic Flow(주기적인 유동), Quasi-Periodic Flow(준주기적인 유동)

Abstract

Natural convection of a fluid with intermediate Prandtl number of Pr=0.2 in a horizontal annulus is considered, and the bifurcation phenomena and chaotic flows are numerically investigated. The unsteady two-dimensional streamfunction-vorticity equation is solved with finite difference method. The steady 'downward flow' with two counter-rotating eddies bifurcates to a simple periodic flow with a fundamental frequency. And afterwards, second Hopf bifurcation occurs, and a quasi-periodic flow with two incommensurable frequencies appears. However, a new time-periodic flow is established after experiencing quasi-periodic states. As Rayleigh number is increased further, the chaotic flow regime is reached after a sequence of successive Hopf bifurcation to quasi-periodic and chaotic flow regimes. A scenario similar to the Ruelle- Takens-Newhouse scenario of the onset of chaos is observed.

기호설명

$C(\tau)$	: correlation function
D_i	: 안쪽 실린더의 지름
f	: 주파수
f_1	: 기본 주파수
f_2	: 두 번째 기본 주파수
g	: 중력 가속도
L	: 환형의 폭, R_o - R_i
P	: 진동 주기
$P(f)$	: autospectral density function
Pr	: Prandtl 수, ν/α
R_i	: 안쪽 실린더의 반경
R_o	: 바깥쪽 실린더의 반경
Ra	: Rayleigh 수, $\alpha g(T_i - T_o)L^3/\alpha\nu$
r	: 반경 방향의 좌표
r_i	: 무차원 안쪽 실린더 반경
r_o	: 무차원 바깥쪽 실린더 반경
t	: 시간
Δt_S	: 데이터의 sampling time step
T_i	: 안쪽 실린더의 온도
T_o	: 바깥쪽 실린더의 온도
u	: 반경 방향의 속도 성분
$u(t)$	: $(r_c, \pi/2)$에서의 반경 방향의 속도
v	: 원주 방향의 속도 성분

† 책임저자, 회원, 안동대학교, 기계공학교육과
E-mail : jsyoo@andong.ac.kr
TEL : (054)850-5671 FAX : (054)853-1766
** 회원, 한국기계연구원, 열유체환경연구부

그리스문자

α : 열 팽창 계수
η : 확장된 반경 방향의 좌표
θ : 무차원화 된 온도
χ : 열 확산 계수
ν : 동점성 계수
τ_d : 지연 시간(delay time)
ρ_0 : 밀도
ϕ : 원주 방향의 좌표
Ψ : 유선 함수
ω : 와도

1. 서 론

가열되는 안쪽 실린더를 갖고 있는 수평 환형 공간은 매우 흥미로운 물리적 구조를 형성한다. 왜냐하면 환형의 수직 부분에서는 수력학적 불안정(hydrodynamics instability)이 일어날 수 있고,[1] 열적으로 불안정한 상태인 위 부분에서는 Rayleigh- Bénard 열불안정(thermal instability)이 일어날 수 있기 때문이다.[2] 한 시스템 내에 동시에 공존하는 이 두 가지의 불안정은 매우 흥미로운 자연 대류 현상을 일으킬 것으로 예측할 수 있다. 그러나 수평 환형 공간의 자연 대류 문제에 대한 지금까지의 대부분의 연구들은 거의 정상 상태의 열전달 특성에 관심을 두고 수행되었으며[3,4] 유동장의 천이 현상이나 진동 대류에 대해서는 상대적으로 많은 연구를 수행하지 않았다. 특히 Prandtl 수가 유동 형태에 미치는 영향에 대한 연구는 매우 적다. 최근 Yoo[5~8]는 여러 가지의 Prandtl 수에 따른 대류 현상과 분기 현상을 체계적으로 조사하여 환형에서 일어나는 열적 및 수력학적 불안정성은 Prandtl 수에 따라 매우 다양한 형태의 유동과 천이 현상을 일으킨다는 것을 보였다. 특히 좁은 틈새를 갖고 있는 환형 공간에서 중간 Prandtl 수인 $Pr=0.1\sim0.4$에서는 여러 개의 셀을 갖는 다양한 형태의 진동 대류를 관찰하였다.

그런데 기존의 연구들은 모두 유동장의 공간적 특성에 관심을 두고서 진동 대류의 시간적 특성은 더 이상 조사하지 않았다. 그러나 진동하는 대류는 유동의 시간적 거동에 따라 단순 주기적인 운동, subharmonic 주파수를 갖는 주기적인 운동, 2개 혹은 3개의 약분할 수 없는 (incommensurable) 주파수를 갖는 준주기적인 운동 등으로 나눌 수 있으며 최종적으로는 불규칙적인 혼돈 유동(chaotic flow)으로 발전된다.

이와 같은 시간적인 혼돈(temporal chaos)으로의 천이 경로는 아주 흥미 있는 현상으로서 유체 역학 뿐만 아니라 여러 분야의 비선형 시스템에 걸쳐 광범위하게 연구되어 왔다.[9]

Gollub and Benson[10]은 Rayleigh- Bénard 대류에서 4 가지의 서로 다른 경로를 실험적으로 발견하였으며, McLaughlin and Orszag[11]는 수치 실험을 통하여 주기적인 운동, 준주기적인 운동, 혼돈 운동을 보였다. 그리고 Yoo and Kim[12]은 공간 주기적인 온도 분포를 갖는 수평 유체층 내의 자연 대류에서 주기 배가 분기 현상(period-doubling bifurcation)이나 준주기적인 상태를 거친 후에 혼돈 운동이 일어난다는 것을 보였다. 한편 Guzmán and Amon[13]은 주기적인 형태의 벽면을 갖는 채널 내의 유동에서는, 3 번의 Hopf bifurcation을 거친 후에 카오스(chaos)에 도달한다는 것을 보였다. 그리고 Vittori and Blondeaux[14]는 둥근 실린더 주변의 2차원 유동에서 준주기 상태와 phase locking 경로를 관찰하였다. 한편, Mukutmoni and Yang[15]은 직육면체 공간 내의 Rayleigh Benard 대류에서 혼돈 상태 사이에 존재하는 주기 4 의 창을 발견하였다. 최근 유주식 과 김용진[16] 은 수평 환형 공간에서 $Pr=0.1$인 유체의 혼돈 열 대류로의 분기 현상을 조사하여 주기 3배(period-tripling)와 주기 배가 (period-doubling) 분기 현상을 보였다.

이와 같이 여러 가지의 시스템에 대해 혼돈 상태로의 천이 경로가 연구되어 왔으며 각 시스템마다 독특한 경로가 발견되기도 하였다. 그러나 혼돈 상태로의 경로는 매우 복잡하여 모든 가능한 천이 경로로의 완전한 이해까지는 아직 멀기만 하다. 그러나 많은 시스템에서 발견된 대표적인 천이 경로는 주기 배가 분기(period-doubling bifurcation)를 통한 Feigenbaum scenario,[17] 준주기 상태를 경유하는 Ruelle-Takens-Newhouse scenario,[18] 및 간헐적인(iniermittent) 노이즈(noise)에 의한 Manneville-Pomeau scenario[19] 등이다.

진동하는 대류에 있어서 혼돈 상태로의 천이 현상을 조사하기 위해서는 매우 긴 시간 동안 아주 정확한 계산을 수행해야 한다. 본 연구에서는

비정상 상태의 방정식을 매 시간마다 빠르고 정확하게 풀 수 있는 수치적인 방법을 사용하여 혼돈 대류로의 천이 경로를 조사한다. 고려하는 환형은 $D_i/L=2$의 적당한 폭을 갖는 환형이며 $Pr=0.2$인 중간 Prandtl 수 유체에 대해 진동 대류의 분기 현상을 조사한다. 주기 3배와 주기 배가 분기 현상을 보여 주는 $Pr=0.1$[16]과는 달리 준주기 운동으로의 분기 현상이 일어났으며 Ruelle-Takens-Newhouse scenario가 관찰되었다.

2. 해 석

고려하는 시스템의 구조와 좌표계는 Fig. 1과 같다. 일정한 표면 온도를 유지하고 있는 두 개의 무한히 긴 수평 실린더 사이에 유체가 있다. Boussinesq 근사 하에서 부력 항을 제외하고는 유체에서의 밀도 변화는 무시하며, 그 외의 다른 물성치들은 모두 일정하다고 가정한다. 질량, 운동량과 에너지에 대한 보존 방정식을 특성 길이, 시간, 속도, 압력과 온도를 각각 L, L^2/ν, ν/L, $\rho_0\nu^2/L^2$, (T_i-T_o)로 택하여 무차원화시킨다. 그리고 $Pr=\nu/\kappa$, $Ra=\alpha g(T_i-T_o)L^3/\kappa\nu$ 를 각각 Prandtl 수와 Rayleigh 수로 정의한다.

유선함수(streamfunction) Ψ와 와도(vorticity) ω에 대한 무차원 지배 방정식과 경계 조건은 다음과 같다.[7]

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = J(\Psi,\omega) + Pr\nabla^2\omega - PrRa\left[\sin(\phi)\frac{\partial\theta}{\partial r} + \cos(\phi)\frac{\partial\theta}{r\partial\phi}\right] \quad (1)$$

$$\omega = -\nabla^2\Psi \quad (2)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = J(\Psi,\theta) + \nabla^2\theta \quad (3)$$

여기에서 와도(ω)와 유선함수(Ψ) 및 Jacobian은 다음과 같이 정의된다.

$$\omega=\frac{\partial}{r\partial r}(rv)-\frac{\partial}{r\partial\phi}(u),\quad u=\frac{\partial\Psi}{r\partial\phi},\quad v=-\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

$$J(f,g) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial\phi} - \frac{\partial f}{\partial\phi}\frac{\partial g}{\partial r}\right) \quad (4)$$

그리고 벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r} = 0,\ \omega = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2},\ \theta = 1 \quad \text{at} \quad r=r_i \quad (5)$$

$$\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r} = 0,\ \omega = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2},\ \theta = 0 \quad \text{at} \quad r=r_o \quad (6)$$

각도 방향으로는 다음과 같은 대칭 조건을 적용한다.

$$\Psi=\omega=\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}=\frac{\partial\theta}{\partial\phi}=0 \quad \text{at} \quad \phi=0,\pi \quad (7)$$

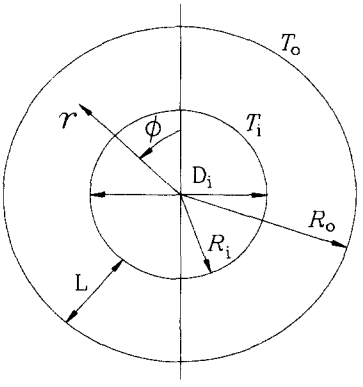

Fig. 1 A sketch of an annulus and coordinate system

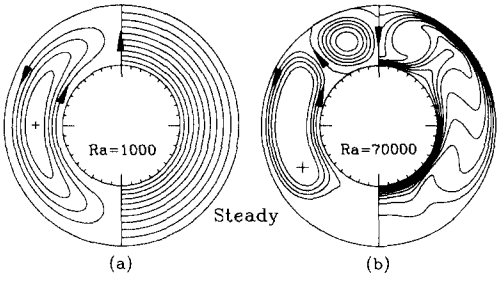

Fig. 2 Steady-state streamlines and isotherms of 'upward' and 'downward' flows: (a) $Ra=10^3$('upward flow'); (b) $Ra=7\times10^4$('downward flow')

식 (1)-(7)의 방정식은 Yoo[7]에서 사용한 것과 같은 유한 차분법을 사용하여 푼다. 식 (1)과 (3)을 차분화 시키는 데 있어서는 시간 미분 항과 확산 항에 대해 Dufort-Frankel의 leap-frog 방법[20]을 적용하고 Jacobian 항에 대해서는 중앙 미분을 사용한다. 그리고 차분화된 Poisson 방정식은 Buzbee 등[21]의 순환적인 짝홀 제거 방법을 사용하여 반복 계산을 하지 않고 바로 푼다. 이 방법은 매우 빠르고 정확하다. 공간주기적인 자연 대류에서도 Yoo and Kim[12]은 이와 같은 방법을 사용하여 카오스로의 천이 경로를 잘 규명한 바가 있다. 각 방향으로는 균일 격자를 이용하고 반경 방향으로는 벽면에서의 얇은 경계층을 분해하기 위해 다음과 같은 좌표 확장을 이용한다.

$$r = r_i + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\tanh\{C(2\eta-1)\}}{\tanh(C)}\right]$$

$$\text{with } C=1.5,\ 0\le\eta\le1 \qquad (8)$$

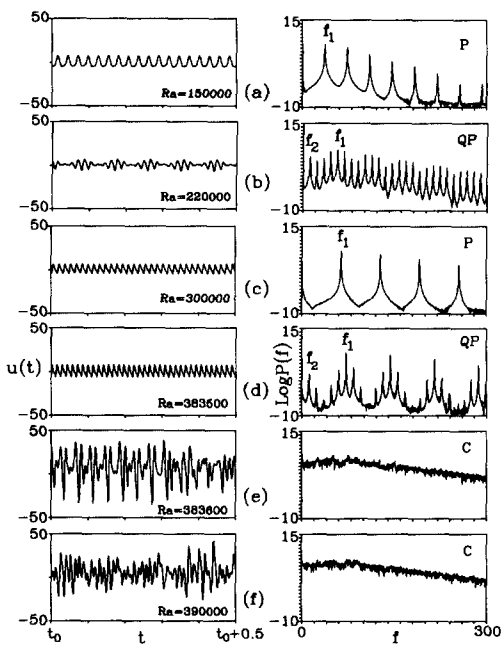

Fig. 3 Records of $u(t)$ and power spectra showing the bifurcation sequence to chaos: (a) $Ra=1.5\times10^5$; (b) $Ra=2.2\times10^5$; (c) $Ra=3\times10^5$; (d) $Ra=3.835\times10^5$; (e) $Ra=3.836\times10^5$; (f) $Ra=3.9\times10^5$

본 연구에서 사용한 $(r\times\phi)$ 격자계는 (35×65)이며 time step은 $\Delta t=2\times10^{-4}$이다.

진동하는 대류를 관찰하기 위하여 계산 기간 동안에 다음과 같이 환형의 중심에서의 반경 방향의 속도를 기록한다.

$$u(t)=u(r_c,\pi/2,t)$$

$$\text{여기에서 } r_c=(r_i+r_o)/2 \qquad (9)$$

그리고 $u(t)$의 Power spectrum을 분석하여 대류의 시간적인 거동 특성과 분기 현상(bifurcation phenomena)을 조사한다. Power spectrum은 다음과 같이 정의된다.[9]

$$u(f)=\lim_{T\to\infty}\int_0^T \exp(i2\pi ft)u(t)dt \qquad (10)$$

$$P(f)=|u(f)|^2 \qquad (11)$$

Power spectrum 을 구하는데 있어서는 Cooly-Tukey의 FFT algorithm[22]을 이용하며, 데이터의 유한한 시간 간격 $T=$ (Number of data) $\times\Delta t_S$에서 일어나는 side lobe를 제거하기 위해 Hanning window를 씌운다. 이때의 주파수 해상도(frequency resolution)는 $1/T$이 되는데 aliasing error를 없애기 위해 FFT를 하기 전에 저주파 대역 필터(low pass filter)를 거침으로써 주파수(frequency)의 범위를 제한한다. anti-aliasing filter cut off frequency는 Nyquist frequency $f_N=1/2\Delta t_S$의 70%로 택하였다. 하나의 Rayleigh 수에 대해 6×10^4 time step을 계산하였다. 분기 현상을 조사하기 위하여 여러 가지의 Rayleigh 수에 대해 약 3×10^6 time step 의 계산이 소요되었다. 데이터의 sampling time step을 $\Delta t_S=4\times10^{-4}$으로 하여 데이터를 축적한 다음 축적된 데이터의 후반부에 있는 2^{13} 개의 연속된 데이터로써 Power spectrum을 구하였다.

그리고 다음과 같은 Autocorrelation function $C(\tau)$를 조사하기도 한다.[9]

$$C(\tau)=\frac{1}{(T_2-T_1)}\int_{T_1}^{T_2}u(t)u(t+\tau)dt \qquad (12)$$

$C(\tau)$는 비정상 상태의 유체 유동을 조사하는 하나의 유용한 척도로써 이용된다. 주기적인 신호에 대해서는, $C(\tau)$는 주기 함수가 되고, 그에 반해 불규칙적인 혼돈 신호에 대해서는 $C(\tau)$가 영

으로 접근해 간다.

3. 결과 및 논의

전도(conduction)가 지배적인 작은 Rayleigh 수에서는 하나의 셀(cell)을 갖는 정상 상태의 대류가 유지된다. 이 경우 유체는 따뜻한 안쪽 실린더 벽면을 따라 위로 올라가서 차가운 바깥쪽 실린더를 타고 흘러내린다(Fig. 2 (a)). 그러나 큰 Rayleigh 수에서는 환형의 위 부분에 반대 방향으로 회전하는 하나의 작은 셀이 형성됨에 따라 환형의 꼭대기 부근의 유체가 아래로 내려오는 '내려가는 유동(downward flow)'이 확립된다. Fig. 2(b)에는 Ra= 7×10^4에서의 '내려가는' 유동을 도시하였다. Ra= 8×10^4까지는 이와 같은 형태의 정상 상태의 유동이 유지된다. 그러나 $Ra\geq 9\times10^4$에서는 주기적으로 진동하는 대류가 일어나며 더욱 더 큰 Rayleigh 수에서는 마침내 불규칙적인 혼돈 대류(chaotic convection)가 일어난다.

진동 대류가 일어난 후에 혼돈 대류로 천이하는 경로를 보여주는 $u(t)$의 시간 기록과 Power spectrum을 Fig. 3에 도시하였다. 관측된 현상은 다음과 같다.

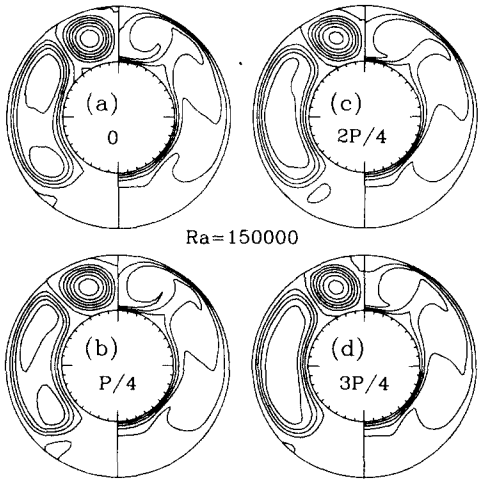

Fig. 4 Instantaneous streamlines and isotherms over one period of oscillation at $Ra=1.5\times10^5$ in the first periodic regime: (a) at $t=t_1$ at which $u(t)$ takes its minimum value; (b) at $t=t_1+P/4$; (c) $t=t_1+2P/4$; (d) at $t=t_1+3P/4$

(1) $9\times10^4\leq Ra\leq1.9\times10^5$: 하나의 기본 주파수(fundamental frequency) f_1을 갖는 단순 주기적인 운동이 일어난다 (Fig.3(a)). 가장 큰 peak는 f_1에 있으며 다른 주파수들은 모두 f_1의 정수배 ($f=mf_1$; m=1, 2, 3...) 로 표시된다. Rayleigh 수가 증가함에 따라 진동이 점점 빨라짐으로 인해 기본 주파수 f_1은 점점 더 커진다. $Ra=9\times10^4$에서 $f_1\approx28.99$이며 $Ra=1.9\times10^5$에서 $f_1\approx40.89$이다.

Fig. 4에는 $Ra=1.5\times10^5$ 에서의 한 주기 동안의 순간적인 유동장을 도시하였다. 진동하는 기간 동안에 환형의 수직 부분에 형성된 하나의 큰 셀과 환형의 위 부분에 형성된 반대 방향으로 회전하는 하나의 작은 소용돌이가 나타난다. 그리고 진동하는 유동장은 큰 셀 내부에서 같은 방향으로 회전하는 두 개의 소용돌이의 주기적인 생성과 합체 형상을 보여준다.

(2) $2\times10^5\leq Ra\leq2.5\times10^5$: Rayleigh 수가 커질수록 초기의 단순 주기적인 운동은 노이즈(noise)에 의해 방해를 받게 된다. 그리하여 이 영역에서는 두 개의 약분할 수 없는 주파수 f_1, f_2를 갖는 준주기적인(quasi-periodic) 운동이 일어난다. Fig. 3(b)에는 $Ra=2.2\times10^5$에서의 $u(t)$와 power spectrum을 도시하였다. 준주기적인 영역에서는 두 개의 기본 주파수 f_1, f_2를 가지며 다른 peak의 주파수들은 모두 f_1과 f_2의 선형 조합, $f=mf_1+nf_2$ 으로 표현된다. Fig. 3(b)에서 f_1 =55.54, f_2=11.29이며 다른 peak의 주파수들은 $2f_2$, f_1-2f_2, f_1-f_2, f_1+f_2... 등으로 표현된다. Fig. 5에는 단순 주기적인 영역과 준주기적인 영역에 있는 $u(t)$의 phase space를 도시하였다. 단순 주기적인 영역인 $Ra=1.5\times10^5$ 에서는 하나의 닫힌 궤도(orbit)를 형성한다(Fig. 5(a)). 그러나 준주기적인 영역인 $Ra=2.2\times10^5$에서는 하나의 strange attractor를 보여주고 있다 (Fig. 5(b)). Fig. 5(b)의 phase space는 매우 복잡하여 혼돈 영역의 궤도처럼 보이기도 한다. 그러나 Fig. 6(a)에 도시된 Poincare map은 Fig. 6(b)의 혼돈 상태와는 달리 유한한 점들을 보여 줌으로써 두 상태를 구분해 준다.

(3) $2.6\times10^5\leq Ra\leq3.82\times10^5$: 하나의 기본 주파수 f_1을 갖는 단순 주기적인 운동이 다시 일어난다 (Fig. 3(c)). Power spectrum에서 나타나는 peak들의 주파수는 모두 f_1의 super harmonics에 있다. 기본 주파수 f_1은 Rayleigh 수가 커질수록 증가한다. $Ra=2.6\times10^5$에서 $f_1\approx59.81$이며 $Ra=3.82\times10^5$에서 $f_1\approx71.72$ 이다. 다시 확립된 주기적인 운동 영역의 기본 주파수는 초기의 주기운동($9\times10^4\leq Ra\leq1.9\times10^5$)보다 약 두배 정도 더 큰 값을 갖는다.

새로 확립된 주기적인 유동장을 $Ra=3\times10^5$에 대해 Fig. 7에 도시하였다. 초기의 주기적인 유동 Fig. 4 ($Ra=1.5\times10^5$) 와 마찬가지로 진동하는 기간 동안에 환형의 수직 부분에 위치한 하나의 큰 셀과 환형의 위 부분에 형성된 반대 방향으로 회전하는 하나의 작은 소용돌이가 나타난다. 그리고 진동하는 유동장은 큰 셀 내부에서 일어나는 같은 방향으로 회전하는 소용돌이의 주기적인 생성과 합체 형상을 보여준다. 그러나 같은 방향으로 회전하는 두 개의 소용돌이의 생성과 합체 현상을 보여주는 Fig.4와는 달리 진동하는 기간 동안에 세 개의 소용돌이가 큰 셀 내부에 주기적으로 형성된다. 즉, 준주기적인 상태를 거쳐서 새로운 공간적인 구조를 갖는 주기적인 운동이 다시 확립된다는 것을 알 수 있다.

(4) $3.83\times10^5\leq Ra\leq3.835\times10^5$: 다시 확립된 주기적인 운동도 Rayleigh 수가 커질수록 노이즈에 의해 방해를 받게 되며 준주기적인 운동이 다

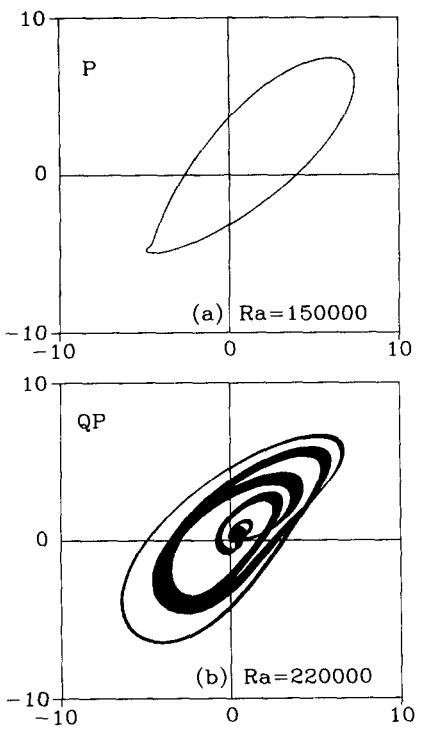

Fig. 5 Phase-space trajectories of $u(t)$ versus $u(t+\tau_d)$ with τ_d=0.002 showing the simple periodic and quasi-periodic solutions: (a) $Ra=1.5\times10^5$; (b) $Ra=2.2\times10^5$

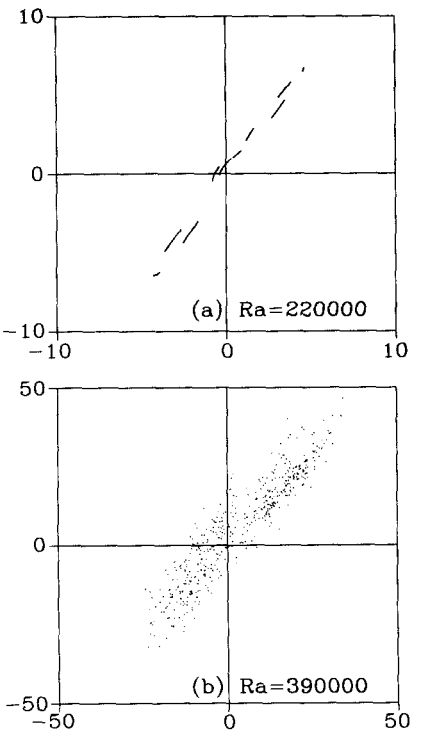

Fig. 6 Poincare section of $u(t)$ in the quasi-periodic and chaotic regimes with a delay time of τ_d=0.002: (a) $Ra=2.2\times10^5$; (b) $Ra=3.9\times10^5$

시 일어난다. Fig. 3(d)에는 $Ra=3.835\times10^5$에서의 $u(t)$와 power spectrum을 도시하였다. Fig. 3(d) 에서 f_1=71.72, f_2=11.9이다. Fig. 3(d)의 power spectrum은 아주 작은 노이즈들을 갖는다. 그러나 $LogP(f)>-2$에서의 peak들의 주파수들은 모두 f_1과 f_2의 선형 조합으로 표현된다. Fig. 3(d)에서의 peak들의 주파수들은 f_2, $2f_2$, f_1-2f_2, f_1-f_2, f_1, f_1+f_2... 등이다.

(5) $Ra\geq3.836\times10^5$: $u(t)$의 요동은 매우 복잡하며(Fig. 3(e), (f)) power spectrum이 광대역 잡음(broadband noise)을 보이는 비주기적인 혼돈 대류가 일어난다. Fig. 6(b)에는 $Ra=3.9\times10^5$에서의 Poincare map을 도시하였다. Fig. 6(b)는 여러 개의 점들이 흩어져서 나타남으로써 충분히 발달된 혼돈 상태를 잘 보여주고 있다.

끝으로 Fig. 8에는 혼돈 영역에 있는 $Ra=4\times10^5$에서의 $u(t)$와 power spectrum, Autocorrelation function $C(\tau)$, 및 phase space를 도시하였다. $u(t)$의 요동은 매우 불규칙적이며 phase space는 복잡한 궤도를 보인다. 그리고 $C(\tau)$가 zero 근방의 값으로 접근함에 따라 강한 혼돈 상태를 잘 보여주고 있다.

이상에서 관찰한 분기 현상 (bifurcation phenomena)을 요약하면 다음과 같다: steady → simple periodic(f_1) → quasi-periodic(f_1, f_2) → simple periodic(f_1) → quasi-periodic(f_1, f_2) → chaos.

본 연구에서 나타나는 하나의 흥미 있는 현상은, 주기적인 운동으로부터 준주기적인 운동으로의 분기가 일어난 후에 단순 주기적인 운동이 다시 일어난다는 것이다. 이와 같은 현상은 유동장의 공간적인 구조가 바뀌어서 새로운 형태의 시간적인 변화를 보여주는 대류가 일어나기 때문이다.

새로운 주기적인 운동이 확립된 후에는 다시 두 개의 약분할 수 없는 주파수를 갖는 준주기적인 운동 상태를 경유한 후에 혼돈 대류가 일어난다. 따라서 본 시스템에서의 혼돈 대류로의 천이

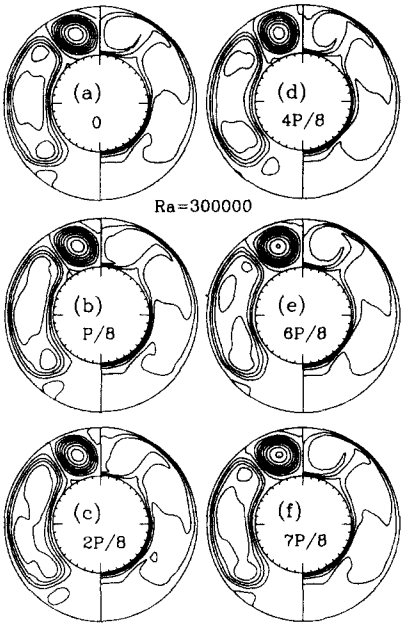

Fig. 7 Instantaneous streamlines and isotherms over one period of oscillation at $Ra=3\times10^5$ in the second periodic regime: (a) at $t=t_1$ at which $u(t)$ takes its minimum value; (b) at $t=t_1+P/8$; (c) $t=t_1+2P/8$; (d) at $t=t_1+4P/8$; (e) $t=t_1+6P/8$; (f) at $t=t_1+7P/8$

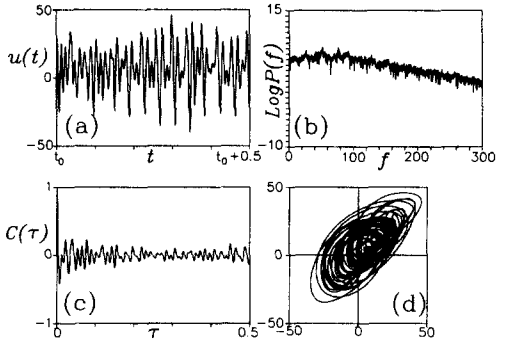

Fig. 8 (a) Fluctuation of $u(t)$, (b) Power spectrum, (c) Correlation function $C(\tau)$, and (d) phase space trajectory in the chaotic regime with $Ra=4\times10^5$

는 Ruelle-Takens-Newhouse scenario를 따른다고 할 수 있다.

4. 결 론

일정 온도를 유지하고 있는 두 개의 수평 동심 실린더 사이의 환형($D_i/L=2$)에서 일어나는 $Pr=0.2$인 유체의 혼돈 대류로의 천이 현상을 수치적으로 조사하였다. 유한 차분법을 이용하여 비정상 유선함수-와도 방정식을 풀었다. Rayleigh 수가 증가함에 따라 정상 상태의 '내려가는 유동'으로부터 주기적으로 진동하는 대류로의 Hopf bifurcation이 일어난다. 그리고 두 번째의 Hopf bifurcation이 일어난 후에 두 개의 약분할 수 없는 주파수를 갖는 준주기적인 운동이 일어난다. 그러나 다음에는 새로운 공간적인 구조를 갖는 주기적인 운동이 다시 일어난다. 새로 확립된 주기적인 운동은 두 번의 Hopf bifurcation을 거쳐 두 개의 약분할 수 없는 주파수를 갖는 준주기적인 운동 상태를 경유한 다음에 혼돈 대류에 도달한다. 즉, 혼돈 대류로의 천이 경로는 Ruelle-Takens-Newhouse scenario를 보여준다.

참고문헌

(1) Lee, Y. and Korpela, S. A., 1983, "Multicellular Natural Convection in a Vertical Slot," *J. Fluid Mech.*, Vol. 126, pp. 91~121.

(2) Busse, F. H., "Transition to Turbulence in Rayleigh- Bénard Convection," In Topics in Applied Physics, Vol. 45, Edited by H. L. Swinney and J. P. Gollub. Springer-Verlag, 1981, pp. 97~137.

(3) Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R. L. and Sammakia, B., 1988, "Buoyancy-Induced Flows and Transport," Springer-Verlag, pp. 761~771.

(4) Kuehn, T. H. and Goldstein, R. J., 1976, "An Experimental and Theoretical Study of Natural Convection in the Annulus Between Horizontal Concentric Cylinders," *J. Fluid Mech.* Vol. 74, pp. 695~719.

(5) Yoo, J.-S., 1998, "Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, pp. 3055~3073.

(6) Yoo, J.-S.,1999, "Transition and Multiplicity of Flows in Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus : $Pr=0.4$," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 709~722.

(7) Yoo, J.-S., 1999, "Prandtl Number Effect on Bifurcation and Dual Solutions in Natural Convection in a Horizontal Annulus," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 3275~3286.

(8) Yoo, J.-S., 1999, "Prandtl Number Effect on Transition of Free-Convective Flows in a Wide-Gap Horizontal Annulus," *Int. Comm.. Heat Mass Transfer*, Vol. 26, pp. 811~817.

(9) Schuster, H. G., 1984, "Deterministic Chaos," Physik-Verlag, pp. 1~136.

(10) Gollub, J. P., Benson, S. V., 1980. "Many Routes to Turbulent Convection," *J. Fluid Mech.* Vol. 100, pp. 449~470.

(11) McLaughlin, J. B., Orszag, S. A., 1982, "Transition from Periodic to Chaotic Thermal Convection," *J. Fluid Mech.* Vol. 122, pp. 123~142.

(12) Yoo, J.-S., Kim, M.-U., 1991. "Two-Dimensional Convection in a Horizontal Fluid Layer with Spatially Periodic Boundary Temperatures," *Fluid Dynamics Research*, Vol. 7, pp. 181~200.

(13) Guzmán, A. M., Amon, C. H., 1994, "Transition to Chaos in Converging -Diverging Channel Flows: Ruelle -Takens -Newhouse Scenario," *Phys. Fluids A*, Vol. 6, pp. 1994~2002.

(14) Vittori, G., Blondeaux, P., 1993. "Quasiperiodicity and phase locking route to chaos in the 2-D oscillatory flow around a circular cylinder," Phys. Fluids A 5, pp. 1866~1868.

(15) Mukutmoni, D. and Yang, K. T., 1993, "Rayleigh-Benard Convection in a Small Aspect Ratio Enclosure: Part II- Bifurcation to Chaos," *J. Heat Transfer*, Vol. 115, pp. 367~376.

(16) 유주식, 김용진, 2000, "수평 환형 공간에서의 혼돈 열대류로의 분기," 대한기계학회논문집 B권, 제 24권 제 9호, pp. 1~9.

(17) Feigenbaum, M., 1980, "The Transition to Aperiodic Behavior in Turbulent Systems," *Commun. Math. Phys.* Vol. 77, pp. 65~80.

(18) Ruelle, D. and Takens, F., 1971, "On the Nature of Turbulence," *Commun. Math. Phys.* Vol. 20, pp. 167~185.

(19) Manneville, P. and Pomeau, Y., 1980, "Different Ways to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems," *Physica D.*, Vol. 1, pp. 219~235.

(20) Roache, P. J., 1972, "Computational Fluid Dynamics," *Hermosa*, pp. 53~64.

(21) Buzbee, B. L., Golub, G. H. and Nielson, C. W., 1970, "On Direct Methods for Solving Poisson's Equations," *SIAM J. Numerical Analysis*, Vol. 7, pp. 627~656.

(22) Bendat, J. S. and Piersol, A. G., 1986, *Random data : Analysis and Measurement Procedures*, John Wiley and Sons, New York, pp. 325~424.