

유동변수 파라미터에 의한 혼합 내-외재적 열-유동장 수치해석 방법 연구

문수연[†] · 손창현* · 이충원*

(2001년 2월 9일 접수, 2001년 5월 19일 심사완료)

A Study on Flowfield-Dependent Mixed Explicit-Implicit Method in Heat and Fluid Dynamics Problems

Su-Yeon Moon, Chang-Hyun Sohn and Choong-Won Lee

Key Words : Flowfield-dependent Mixed Explicit-Implicit Generalized Galerkin Method(유동 변수 파라미터에 의한 혼합 내-외적 방법), Finite Element Method(유한 요소법), Implicitness Parameter(내적 파라미터)

Abstract

High-speed and low-speed flows are simulated numerically by flowfield-dependent mixed explicit-implicit (FDMEI) method. This algorithm depends on implicitness parameters of convection, diffusion, diffusion gradients, and source terms which are calculated from the changes of local Mach, Reynolds, Peclet, and Damköhler numbers between adjacent nodes. Convection phenomena or shock waves are resolved from Mach number-dependent implicitness parameters whereas diffusion or viscous actions are simulated by Reynolds number or Peclet number-dependent implicitness parameters. Fluctuation components of all variables are properly accommodated spatially and temporally in the FDMEI procedure. To illustrate, some benchmark example problems are presented for comparisons of the FDMEI results with other available data. These results appear to be encouraging and point toward the need for further investigations of the FDMEI theory.

기호설명

a : 음속
 \mathbf{a}_i : 대류 자코비안
 \mathbf{B} : 생성항
 \mathbf{b}_i : 확산 자코비안
 \mathbf{c}_{ij} : 확산 구배
 \mathbf{d} : 생성 자코비안
 E : 총 에너지
 \mathbf{F}_i : 대류 유속 변수
 \mathbf{G}_i : 확산 유속 변수
 K : 난류 운동 에너지

M : 마하 넘버수
 M_i : 난류 마하 넘버수
 p : 정 압력
 Re : 레이놀즈 수
 s_1, s_2 : 1, 2 차 대류 내재 매개변수
 s_3, s_4 : 1, 2 차 확산 내재 매개변수
 s_5, s_6 : 1, 2 차 생성 내재 매개변수
 t : 시간
 Δt : 시간 증가분
 \mathbf{U} : 보존형 유동 변수
 v_i : i 방향의 속도
 x_i : 직교 좌표

[†] 책임저자, 회원, 경북대학교 기계공학과
 E-mail : symoon@knu.ac.kr
 TEL : (053)950-7313 FAX : (053)956-9914

* 회원, 경북대학교 기계공학과

- ε : 운동 난류에너지 소산율
- ε_d : 팽창에 기인한 운동 난류에너지 소산
- γ : 비열비
- μ : 층류 점성계수
- μ_t : 난류 점성계수
- ρ : 밀도
- τ_{ij} : 점성 응력텐서

하첨자

i, j : 텐서 인덱스

1. 서론

전산유체역학에서 많은 관심을 끌어 왔던 문제들 중 하나는 열역학적 변수 및 유동장변수(밀도, 속도, 압력, 온도)의 불연속 혹은 급격한 구배를 다루는 문제였다.

이러한 문제들을 수치 해석적으로 수행하기 위해서는 인접한 격자 사이의 마하수(Mach Number), 레이놀즈수(Reynolds Number), 페크레이수(Peclet Number) 및 담코를수(Damköhler)등의 급격한 변화 정도와 선택한 계산 기법의 적용성이 매우 중요한 요소가 된다. 특히 충격파에 의한 난류경계층의 박리 현상등의 경우처럼 압축성과 비압축성 유동 특성⁽¹⁻³⁾이 함께 혼재하고 화학 반응을 동반한 복잡한 유동^(4,5)의 경우 수치 해석 기법에 따라 발산하거나 실제 물리적 현상을 올바로 수치해석하지 못하는 결과를 초래할 수 있다. 따라서 복잡한 열유동장의 수치 해석을 성공적으로 수행하기 위해서는 유동장에서 발생하는 물리적 현상들의 변화를 자동적으로 감지하고, 각 물리적 현상에 따라 각 격자점이나 유한요소에서 그에 따른 적절한 자유도 및 비중을 두는 계산기법을 생각할 수 있다.

본 연구에서는 불연속 또는 급격한 구배가 존재하는 복합적인 유동 문제를 신뢰성 있게 해석하기 위해서 단일화된 수학적 전개와, 수치적 관계식을 사용한 유동장의 물리적 변수의 변화에 따라 적절한 비중을 두는 FDMEI^(6,7) (Flowfield-Dependent Mixed Explicit-Implicit) 수치방법을 제시하였다. 이들 수치 기법의 정확성과 효율성을 검증하는 첫 단계로 비점성유체에 대한 아음속 영역에서부터 천음속 및 초음속 영역에 까지 모두 적용할 수 있음을 보이고자 한다.

2. 수치 기법

2.1 지배방정식

압축성 점성 난류에 대한 보존형 Navier-Stokes 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} = \mathbf{B} \tag{1}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_i \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \rho v_i \\ \rho v_i v_j + p \delta_{ij} \\ \rho E v_j + p v_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{ij} \\ -\tau_{ij} v_j + q_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

여기서 $\mathbf{U}, \mathbf{F}_i, \mathbf{G}_i, \mathbf{B}$ 는 보존형 유동 변수(Conservation Flow Variables), 대류 유속변수(Convection Flux Variables), 확산 유속변수(Diffusion Flux Variables), 그리고 생성 항(Source Terms)을 각각 나타낸다.

Taylor급수를 시간에 대하여 2차까지 전개하면 식 (2)와 같다.

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \frac{\partial \mathbf{U}^{n+s_1}}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}^{n+s_2}}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \tag{2}$$

여기서 s_1 과 s_2 는 유동변수 파라미터 (implicitness parameter)를 나타내며 식 (2)의 오른쪽 두번째 항과 세번째 항은 식 (3)으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}^{n+s_1}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} + s_1 \frac{\partial \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t} \quad 0 \leq s_1 \leq 1 \tag{3a}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}^{n+s_2}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial t^2} + s_2 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t^2} \quad 0 \leq s_2 \leq 1 \tag{3b}$$

식 (3a)와 (3b)에서 $\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$ 이다. 식 (3a)와 (3b)를 식 (2)에 대입하여 전개하면 식 (4)이 된다.

$$\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} + s_1 \frac{\partial \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial t^2} + s_2 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t^2} \right) + O(\Delta t^3) \tag{4}$$

식 (1)을 다시 정리하면 식 (5)이 된다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \mathbf{B} \tag{5}$$

식 (5)에서 대류 유속변수 \mathbf{F}_i 는 보존 유동변수 \mathbf{U} 의 함수이고, 확산 유속변수 \mathbf{G}_i 는 보존 유동변수 \mathbf{U} 와 보전 유동변수의 구배 $\mathbf{U}_{,i}$ 의 함수이다. 식 (5)을 시간에 대해 미분하면 식 (6)를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{a}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{b}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\mathbf{c}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right) + \mathbf{d} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right) \quad (6)$$

식 (6)에서 $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_{ij}, \mathbf{d}$ 는 각각, 대류, 확산 및 생성항의 자코비안이며 식 (7)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}}, & \mathbf{b}_i &= \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{U}}, \\ \mathbf{c}_{ij} &= \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{U}_{,j}}, & \mathbf{d} &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{U}} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (5)와 (6)를 식 (4)에 대입하고, 식 (4)을 전개한다. 여기서 3차의 공간 도함수의 곱은 무시하면, 식 (8)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}^{n+1} &= \Delta t \left[-\frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i^n}{\partial x_i} + \mathbf{B}^n \right] \\ &+ s_1 \left[-\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_i^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta \mathbf{G}_i^{n+1}}{\partial x_i} + \Delta \mathbf{B}^{n+1} \right] \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i) \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i^n}{\partial x_i} - \mathbf{B}^n \right) \right] \right. \\ &- \mathbf{d} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i^n}{\partial x_i} - \mathbf{B}^n \right) \quad (8) \\ &\left. + s_2 \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i) \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_j^{n+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{G}_j^{n+1}}{\partial x_j} - \Delta \mathbf{B}^{n+1} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

식 (8)에서 모든 자코비안은 n 시간 구간 내에서는 일정하며 다음 시간단계에서 다시 계산된다.

각 물리적 특성에 따른 구분된 수치 자유도를 적용하기 위해 s_1 과 s_2 는 확산과 생성항과 관련된 유동변수로 재지정 되어진다.

$$s_1 \Delta \mathbf{G}_i \Rightarrow s_3 \Delta \mathbf{G}_i, \quad s_1 \Delta \mathbf{B} \Rightarrow s_5 \Delta \mathbf{B} \quad (9a)$$

$$s_2 \Delta \mathbf{G}_i \Rightarrow s_4 \Delta \mathbf{G}_i, \quad s_2 \Delta \mathbf{B} \Rightarrow s_6 \Delta \mathbf{B} \quad (9b)$$

(9a, b)에서 유동 변수들은 다음과 같이 정의된다.

- $s_1 =$ 일차 대류 유동변수 파라미터
- $s_2 =$ 이차 대류 유동변수 파라미터
- $s_3 =$ 일차 확산 유동변수 파라미터
- $s_4 =$ 이차 확산 유동변수 파라미터
- $s_5 =$ 일차 생성 유동변수 파라미터
- $s_6 =$ 이차 생성 유동변수 파라미터

일차 변수 s_1, s_3, s_5 는 유동장 변수에 의하여 결정되며 유동장에 존재는 유동장의 구배를 고려해 줌으로써 해의 정확성의 향상에 기여한다. s_2, s_4, s_6 역시 유동장 변수에 의존하며 인공 점성계수로서 해의 수렴성에 기여한다. $\Delta \mathbf{B}$ 는 식 (10)과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{U}} \Delta \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{d} \Delta \mathbf{U}^{n+1} \quad (10)$$

식 (9)에서 정의된 유동변수 파라미터와 식 (10)을 식 (8)에 대입하면 식 (11) 또는 (12)과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{U}^{n+1} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{E}_i \Delta \mathbf{U}^{n+1}) \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\mathbf{E}_{ij} \Delta \mathbf{U}^{n+1}) + \mathbf{Q}^n + O(\Delta t^3) \quad (11) \end{aligned}$$

$$\left(\mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{E}_i + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{E}_{ij} \right) \Delta \mathbf{U}^{n+1} = -\mathbf{Q}^n \quad (12)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \Delta t s_5 \mathbf{d} - \frac{\Delta t^2}{2} s_6 \mathbf{d} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \Delta t (s_1 \mathbf{a}_i + s_3 \mathbf{b}_i) + \frac{\Delta t^2}{2} [s_6 \mathbf{d} (\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i) \\ &+ s_2 \mathbf{d} \mathbf{a}_i + s_4 \mathbf{d} \mathbf{b}_i] \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ij} &= \Delta t s_3 \mathbf{c}_{ij} - \frac{\Delta t^2}{2} [s_2 (\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j + \mathbf{b}_i \mathbf{a}_j) \\ &+ s_4 (\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j + \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j - \mathbf{d} \mathbf{c}_{ij})] \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^n &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{d} \right) (\mathbf{F}_i^n + \mathbf{G}_i^n) \right. \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} (\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i) \mathbf{B}^n \left. \right] \\ &- \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{\Delta t^2}{2} (\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i) (\mathbf{F}_j^n + \mathbf{G}_j^n) \right] \end{aligned}$$

$$0 - \left(\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{d} \right) \mathbf{B}^n \quad (16)$$

2.2 유동변수의 정의

일차 대류 유동변수 파라미터 s_1 는 식 (17)과 같이 정의 한다.

$$s_1 = \begin{cases} \min(r,1) & r) \alpha \\ 0 & r(\alpha, M_{\min} \neq 0 \\ 1 & M_{\min} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$r = \sqrt{M_{\max}^2 - M_{\min}^2} / M_{\min}$$

여기서 최대, 최소 마하수는 유한차분법에서는 근접한 격자점간에서 구하며, 유한요소법에서는 근접한 유한요소 사이에서 계산된다. α 는 사용자 지정 수치로서 0.01 정도가 적당하다.

이차 대류 유동변수 파라미터 s_2 는 식 (18)과 같다.

$$s_2 = s_1^n \quad 0 < n < 1 \quad (18)$$

일차 확산 유동변수 파라미터 s_3 는 식 (19)와 같다.

$$s_3 = \begin{cases} \min(r,1) & s) \beta \\ 0 & s(\beta, Re_{\min} \neq 0, \\ 1 & Re_{\min} = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$s = \sqrt{Re_{\max}^2 - Re_{\min}^2} / Re_{\min}$$

식 (19)에서 최대, 최소 레이놀즈수는 유한차분법에서는 근접한 격자점들 사이에서 계산하고, 유한요소법에서는 근접한 요소 사이에서 계산된다. β 는 사용자 지정 수치로서 0.01정도가 적당하다. 온도구배가 크다면 레이놀즈수 대신, 페크레이수가 확산 내재매개변수를 지배한다.

이차 확산 유동변수 파라미터 s_4 는 식 (20)와 같다.

$$s_4 = s_3^n \quad 0 < n < 1 \quad (20)$$

3. 계산 수행 과정

시험 함수, 보존 및 유속 변수와 생성항은 식 (21)과 같이 선형으로 조합함으로써 혼합 내-외적 방법을 유한 요소법에 적용할 수 있다.

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \Phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_{\alpha}(t), \quad \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, t) = \Phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_{\alpha i}(t)$$

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{x}, t) = \Phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{G}_{\alpha i}(t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \Phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_{\alpha}(t) \quad (21)$$

식 (11)에 일반적 Galerkin 근사법을 적용하면 식 (21)이 된다.

$$\int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \mathbf{R}(\mathbf{U}, \mathbf{F}_i, \mathbf{G}_i, \mathbf{B}) d\Omega = 0 \quad (22)$$

또는

$$\left(A_{\alpha\beta} \eta_{rs} + B_{\alpha\beta rs} \right) \Delta U_{\beta s}^{n+1} = H_{\alpha r}^n + N_{\alpha r}^n \quad (23)$$

여기서

$$A_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} d\Omega, \quad \eta_{rs} = \delta_{rs} - (\Delta t s_5 + \frac{\Delta t^2}{2} s_6) d_{rs}, \quad (24)$$

$$B_{\alpha\beta rs} = \int_{\Omega} \left\{ - \left[\Delta t (s_1 a_{irs} + s_3 b_{irs}) + \frac{\Delta t^2}{2} [s_2 d_{rt} a_{its} + s_6 d_{rt} (a_{its} + b_{its}) + s_4 d_{rt} b_{its}] \right] \Phi_{\alpha, i} \Phi_{\beta} - \left[\Delta t s_3 c_{ijrs} - \frac{\Delta t^2}{2} [s_2 (a_{irt} a_{jts} + b_{irt} a_{jts}) + s_4 (a_{irt} b_{jts} + b_{irt} b_{jts} - d_{rt} c_{ijts})] \right] \Phi_{\alpha, i} \Phi_{\beta, j} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ \left[\Delta t (s_1 a_{irs} + s_3 b_{irs}) + \frac{\Delta t^2}{2} [s_2 d_{rt} a_{its} + s_6 d_{rt} (a_{its} + b_{its}) + s_4 d_{rt} b_{its}] \right] \Phi_{\alpha}^* \Phi_{\beta}^* + \left[\Delta t s_3 c_{ijrs} - \frac{\Delta t^2}{2} [s_2 (a_{irt} a_{jts} + b_{irt} a_{jts}) + s_4 (a_{irt} b_{jts} + b_{irt} b_{jts} - d_{rt} c_{ijts})] \right] \Phi_{\alpha}^* \Phi_{\beta, j}^* \right\} n_i d\Gamma \quad (25)$$

$$H_{\alpha r}^n = \int_{\Omega} \left\{ \left[\Delta t (F_{\beta ir}^n + G_{\beta ir}^n) + \frac{\Delta t^2}{2} d_{rs} (F_{\beta is}^n + G_{\beta is}^n) + \frac{\Delta t^2}{2} (a_{irs} + b_{irs}) B_{\beta s}^n \right] \Phi_{\alpha, i} \Phi_{\beta} - \frac{\Delta t^2}{2} (a_{irs} + b_{irs}) (F_{\beta js}^n + G_{\beta js}^n) \Phi_{\alpha, i} \Phi_{\beta, j} + \left[\Delta t B_{\beta r}^n + \frac{\Delta t^2}{2} d_{rs} B_{\beta s}^n \right] \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} \right\} d\Omega \quad (26)$$

$$N_{ar}^n = \frac{1}{r} \left\{ \left[-\Delta t (F_{\beta ir}^n + G_{\beta ir}^n) - \frac{\Delta t^2}{2} d_{rs} (F_{\beta is}^n + G_{\beta is}^n) \right. \right.$$

4. 결과 및 고찰

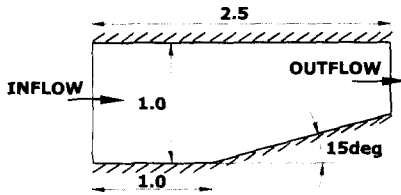
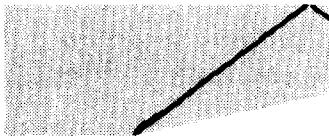


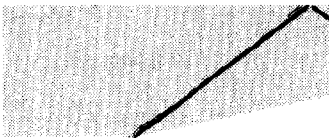
Fig. 1 Geometry of 15° ramp



(a) Density contours of Humphrey's result⁽⁸⁾



(b) Density contours of FDMEI
Fig. 2 Comparisons of FDMEI results and Humphrey's results



(a) Mach number contours



(b) s₁ contours

Fig. 3 First order convection implicitness parameter (s₁) contours. The s₁ contours are calculated from the local Mach numbers, indicative of the flowfield

$$\left. -\frac{\Delta t^2}{2} (a_{irs} + b_{irs}) B_{\beta s}^n \right\} \Phi_{\alpha}^* \Phi_{\beta}^* + \frac{\Delta t^2}{2} (a_{irs} + b_{irs}) (F_{\beta js}^n + G_{\beta js}^n) \left. \Phi_{\alpha}^* \Phi_{\beta, j}^* \right\} n_i dT \quad (27)$$

여기서 모든 자코비안은 매 반복계산때 최근값으로 계산되어지며, Φ_{α} 은 노이만 경계 시험 함수를, α, β 는 총체 노드수를, r, s 는 노드수에 대한 보존 변수의 수를 나타낸다. 본 수치 해석 기법이 급격한 압력과 밀도의 변화를 수반하는 충격파 유동현상을 잘 예측할 수 있는 지를 검증하기 위해 Fig. 1 과 같은 15° 경사의 램프의 유동해석을 수행하였다. Fig. 2 는 본 수치해석 기법인 FDMEI 의 방법으로 구한 밀도 등가선도와 Ref. (8)의 계산 결과를 각각 나타낸 것이다. 두 계산 모두 동일한 격자수인 50x30 과 입구 마하수 2.28 을 사용하였고 점성의 영향은 무시한 Euler 방정식을 사용하였으며, Humphrey 의 수치해석 기법은 Upwind Petrov-Galerkin⁽⁹⁾ 방법을 사용하였다. 15° 경사의 램프의 유동특성은 Fig. 2 의 결과에서 볼 수 있듯이 입구의 초음속 유동이 경사 램프에 의하여 경사 충격파가 발생하여 상단 벽면에서 반사 충격파로 발전되는 것을 알 수 있다. Humphrey 의 결과는 경사 충격파를 잘 예측 하고 있으나 반사 충격파가 미세하게 예측 되고 있다. 반면에 FDMEI 의 결과에서는 경사 충격파와 반사 충격파가 보다 정확히 잘 예측되고 있다. Fig. 3 은 마하곡선과 FDMEI 의 유동변수인 일차 대류 변수 파라미터 s₁ 를 나타내고 있다. 마하수가 증가함에 따라 s₁ 변수는 인접한 격자점의 마하수 차이에 의해 계산되어 Fig. 3(b)에서 보듯이 마하수 변화 특성을 충실히 따라가는 경향을 나타내고 있다. 이들 유동 변수 파라미터는 Navier-Stokes 근사식의 대류항에 관여하여 유동 특성을 정확하게 묘사하는 역할을 한다.

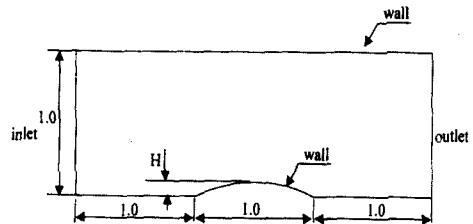
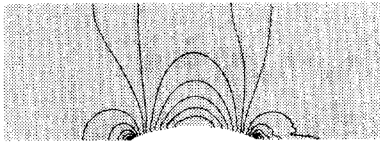
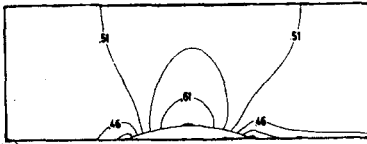


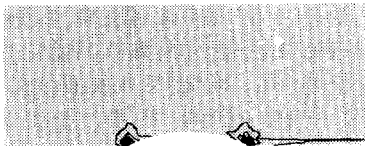
Fig. 4 Schematic geometry



(a) FDMEI scheme



(b) 1st-order Godunov scheme



(c) s_1 contours

Fig. 5 Mach no. contours and s_1 parameter for subsonic flows

이차 대류 유동변수 s_2 는 대류 자코비안과 이차 도함수와 연관되어 불연속성을 처리해줄 수 있는 적절한 수치 점성계수 역할을 함으로써 해의 안정화에 기여한다.

아음속에서부터 천음속, 초음속 영역에 까지 본 수치 기법의 적용성을 보여 주기 위해 Fig. 5와 같은 형상에 대한 유동 해석을 수행하였다. 채널내의 범프(bump) 높이 H는 아음속과 천음속의 경우에 10%이며, 초음속 유동 해석의 경우 4%이다.

Fig. 5의 계산 결과는 입구 마하수가 0.5인 아음속 유동해석의 결과로서 FDMEI의 계산 결과인 Fig. 5(a)와 Fig. 5(b)의 Godunov 해석결과를 함께 비교하였다. 아음속 유동해석결과 두 수치기법 상의 큰 차이는 보이지 않고 있으나 1차 Godunov^(10, 11) 해석 결과는 범프 뒷전에서 수치적 확산 오차에 의해 등가 마하선도를 볼 수 있다. Fig. 5(c)는 범프 앞전과 뒷전에서의 급한 마하수 변화에 따른 s_1 변수의 변화를 보여 주고 있다.

Fig. 6은 아음속 유동 해석 결과로 상하 벽면에서의 마하수를 나타낸 것이다. 본 수치 방법으로 계산한 결과가 수치적 확산 오차가 작기 때문에 Godunov 방법에 비해 좌우 대칭성을 비교적 잘 유지하고 있음을 알 수 있다.

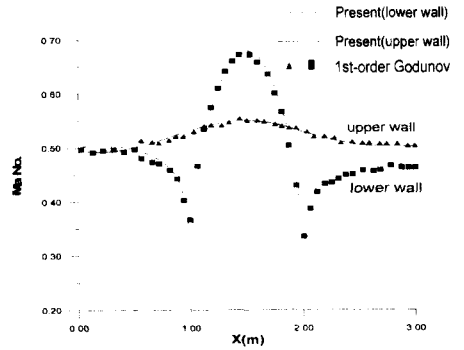
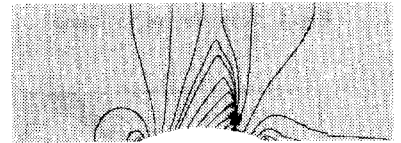
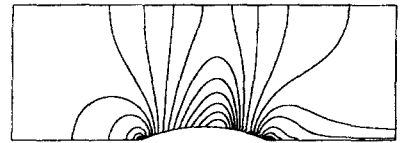


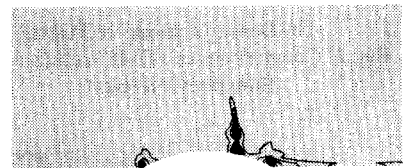
Fig. 6 Mach no. distributions for subsonic flows



(a) FDMEI scheme



(b) 1st-order upwind scheme



(c) s_1 contours

Fig. 7 Mach no. contours and s_1 parameter for transonic flows

Fig. 7(a)와 (b)는 입구 마하수가 0.675인 천음속 유동장 해석 결과로서 최대 마하수가 발생하는 위치는 앞전에서 약 72%정도로 거의 동일하지만 FDMEI기법과 1st-order upwind⁽¹²⁾ 기법의 차이는 충격파의 강도에서 차이를 나타내고 있다.

Fig. 7(c)을 보면 속도 구배가 큰 충격파의 발생 위치에서 정확한 유동해석을 보장하기 위해서 s_1 변수의 값이 함께 변화되고 있음을 알 수 있다.

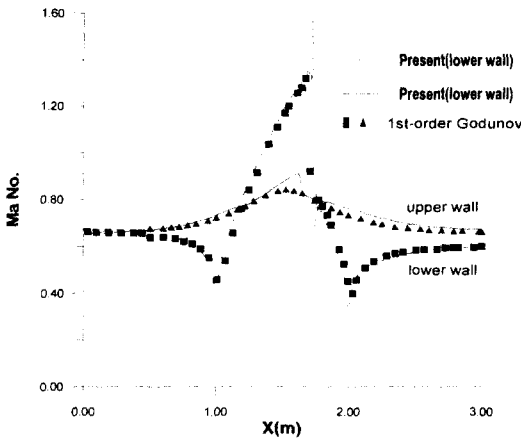


Fig. 8 Mach no. distributions for transonic flows

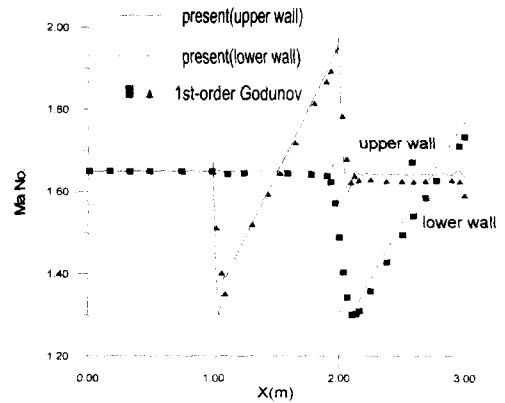
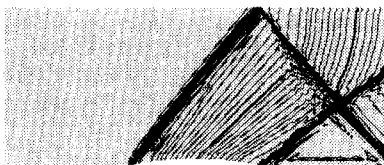
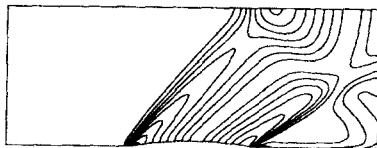


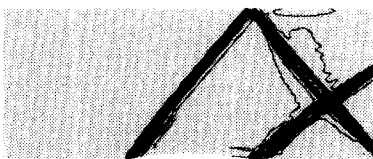
Fig. 10 Mach no. distributions for supersonic flows



(a) FDMEI scheme



(b) 1st-order upwind scheme



(c) s_1 contours

Fig. 9 Mach no. contours and s_1 parameter for supersonic flows

Fig. 8은 천음속 유동 계산의 상하 벽면에서의 마하수를 FDMEI의 계산 결과와 Godunov 해석결과를 비교한 것이다. 이 그림에서 FDMEI로 계산한 결과에서 최대 마하수가 높게 계산되었는데 이는 1차의 정확도를 가지는 Godunov의 방법에 비해서 본 수치기법이 충격과 생성위치에서의 급격한

변화를 잘 해석하였기 때문이라 판단된다.

Fig. 9는 FDMEI 수치 해석 기법과 1차 Godunov의 방법으로 계산한 입구 마하수 $M=1.65$ 이고 범프의 높이가 4%인 경우의 초음속 유동 해석 결과로 마하 분포를 보여 주고 있다. Fig. 9(a)와 (b)를 비교해보면 FDMEI 기법으로 계산한 마하 등가 곡선의 경우 경사 충격파가 벽면에 다시 반사되는 형상을 분명히 보여 주고 있으나 1차의 정확도를 가지는 Godunov 해석 결과는 이를 정확히 해석하지 못하고 있음을 알 수 있다. Fig. 9(c)는 본 수치해법에 있어서 유동변수의 구배에 따라 함께 변화하는 s_1 변수의 값이 마하수의 형상과 함께 잘 추종하고 있음을 보여주고 있다.

Fig. 10은 초음속 유동 해석 결과에 대한 상하 벽면에서의 마하수를 FDMEI의 계산 결과와 Godunov 해석결과를 비교한 것이다. Fig. 10(a)의 상부 벽면의 마하수 값을 보면 Fig. 10(b)의 계산 결과와는 달리 반사 충격파에 의해 그 값의 변화가 분명한데 반하여 1차의 정확도를 가지는 Godunov 방법은 수치적 확산 오차에 의해 상부벽면 반사 충격파의 위치에서의 마하수가 상당히 완만하게 변화됨을 볼 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 불연속 또는 급격한 구배가 존재하는 복합적인 유동 문제를 신뢰성 있게 해석하기 위해서 유동장의 물리적 변수의 변화에 따라 적절한 비중을 두는 FDMEI(Flowfield-Dependent Mixed Explicit-Implicit) 수치방법을 제시하였고 이들 수치기법의 정확성을 몇 가지 예제를 통해 살펴 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 본 수치 기법에서 사용한 일차 대류 유동 변수 s_1 은 유동장의 마하수에 의해 자동적으로 계산되어 급격한 구배를 가지는 물리적 현상을 정확히 해석하는데 중요한 역할을 한다.

(2) 이차 대류 유동변수 s_2 는 대류 자코비안과 이차 도함수와 연관되어 불연속성을 처리해줄 수 있는 적절한 수치 점성계수 역할을 함으로써 해의 안정화에 기여한다.

(3) FDMEI 방법으로 계산한 수치해석 결과는 비점성류에 대한 아음속영역에서부터 천음속 및 초음속 영역에 까지 단일 수치 기법으로 모두 적용할 수 있음을 보였고, 그 해의 정확성을 검증 할 수 있었다.

참고문헌

- (1) 조동우, 손창현, 문수연, 이충원, 2001, “공기 유입각도의 변화에 따른 액체램제트 연소기내의 3차원 유동해석,” 제 16 회 한국추진공학회 학술 발표회 논문초록집, p. 39.
- (2) Karki, K. C. and Patankar, S. V., 1989 “Pressure Based Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Arbitrary Configurations,” *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 9, pp. 1167~1174.
- (3) Demirdzic, I, Lilek, Z., and Peric, M., 1993, “A Collocated Finite Volume Method for Predicting Flows at All Speeds,” *Int. J. Numer. Method in Fluids*, Vol. 16, pp. 1029~1050.
- (4) 문수연, 손창현, 이충원, 2001, “화학반응이 있는 난류경계층과 충격파의 상호작용에 대한 수치해석,” 대한기계학회 B 권 심사중
- (5) Chen, K. H., Shuen, J. S., and Mularz, E., 1995, “A Comprehensive Study of Numerical Algorithms for Three-Dimensional Turbulent Non-Equilibrium Viscous Flows,” AIAA 95-0800.
- (6) Moon, S. Y., 1998, “Applications of FDMEI to Chemically Reacting Shock Wave Boundary Layer Interactions,” Ph. D. dissertation, UAH press.
- (7) 문수연, 손창현, 이충원, 2001, “고속 흐름에서의 충격파와 난류경계층의 상호작용에 관한 수치적 연구,” 대한기계학회 B 권 제 25 권 제 3 호 pp. 322~329.
- (8) Pepper, D. and Humphrey, J.W., January 1990 “A hybrid finite element method for compressible flow,” AIAA Paper 90-0399.
- (9) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., 1982, “Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the incompressible Navier-Stokes Equations,” *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 32, pp. 199~259.
- (10) Godunov, S. K. , 1976, “Numerical Solution of Multidimensional Problems in Gas Dynamics,” Nauka, Mosco.
- (11) Eidelman S., Colella, A. D., Shreeve, R. P., 1984, “Application of Godunov Method and Its Second-Order Extension to Cascade Flow Modeling,” *AIAA Journal*, Vol. 22, pp. 1609~1615.
- (12) 안희섭, 손창현, 문수연, 2000, “SIMPLE 알고리즘을 이용한 압축성 유동해석”, 한국전산유체공학회.