

# 얕은 사각용기에서의 순간 회전가속 유동에 관한 연구

임 광 옥\* · 권 태 종\*

(2000년 7월 7일 접수, 2001년 1월 17일 심사완료)

## The Study for an Impulsive Spin-Up Flow in a Shallow Rectangular Container

Kwang-Ok Lim and Tae-Jong Kweon

**Key Words:** Impulsive Spin-Up Flow(순간 회전가속 유동), Rectangular Container(사각용기), Quasi 3-D(준 3차원), Rigid Body Rotation(강체 회전운동)

### Abstract

The impulsive spin-up flow in a shallow rectangular container is analyzed numerically by quasi 3-D unsteady laminar flow. In the non-inertia coordinates, the flow is generated by the virtual forces as Coriolis force, etc.. After the boundary layers grow up near sidewalls, primary vortexes separate from the sidewalls. As the Reynolds number increases, the subsidiary vortexes take place in the boundary layer. The rigid body rotation is started from the inner region and propagated to the outer region, finally all the fluid reaches the rigid body rotation. According to the Reynolds number and the aspect ratio, the development of vortex pattern is symmetric or asymmetric.

기호설명		그리스문자	
$A$	: 수직중형비, $L/H$	$\Omega$	: 각속도
$Ek$	: Ekman 수, $\nu/\Omega H^2$	$\Omega^*$	: 시스템 회전속도
$H$	: 사각용기의 높이	$\nu$	: 유체의 동점성계수
$L$	: 사각용기의 길이	$\zeta$	: 와도(vorticity)
$P, p$	: 압력, 무차원 압력	$\rho$	: 유체의 밀도
$Re$	: Reynolds 수, $\Omega HL/\nu$	$\tau, \tau_0$	: 무차원 시간 및 가속시간
$Ro$	: Rossby 수, $(\Omega_f - \Omega_d)/\Omega^*$	$\psi$	: 유량함수
$s$	: 생성항		
$U, u$	: $x$ 방향 속도 및 무차원 속도	첨자	
$V, v$	: $y$ 방향 속도 및 무차원 속도	$i, j$	: $x, y$ 방향
$W$	: $z$ 방향 속도	$d, f$	: 디스크 및 유체
$X, Y, Z$	: 직각좌표계		
$x, y$	: 무차원 직각좌표계		

### 1. 서론

회전유동은 액정표시장치(TFT LCD), 반도체 웨이퍼 및 자기 저장장치의 박막코팅 공정 등에서 많이 응용되는 분야이다. 회전유동의 메커니즘은  $Re$  수와 기하학적 중형비에 따라 달라지며

\* 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부  
E-mail : kolim@email.hanyang.ac.kr  
TEL : (02)2290-1263 FAX : (02)2299-1485  
\* 삼성전자(주) AMLCD사업부

점성확산에 의한 경계층 유동과 비점성 강제 회전유동이 복합적으로 발생한다. 경계층 유동은 일반적으로 BEK 경계층유동(Bödewadt, Ekman and von Kármán boundary-layer flow)이라 일컬으며 벽의 각속도와 유체 각속도의 비로써 표현되는  $Ro$  수에 따라 구분한다. 강제 회전유동은 평행평판이나 여러 장의 디스크가 동심회전 가속 및 감속할 때 회전 중심축에 가까운 내부영역에서 발생한다. Table 1은 BEK 경계층유동의 분류를 설명한 것으로 Bödewadt 경계층은  $Ro$  수가 1로 등속 회전유동장에서 감속시에 발생하고, Ekman 경계층은  $Ro$  수가 0으로 유체와 디스크의 회전속도차가 적을 때 발생하는 반면에 Kármán 경계층은  $Ro$  수가 -1로 정지상태에서 가속시에 발생한다.

Lingwood<sup>(1)</sup>는 유동 불안정성이 나타나는 Ekman 경계층유동의 임계  $Re$  수와 Kármán 경계층유동의 임계반경을  $Ro$  수로 표현하였다. Weidman<sup>(2,3)</sup>은 무한 평행평판과 실린더의 회전유동에서  $Ek$  수와  $Ro$  수에 따른 유체가 강제회전 운동에 도달하는 시간척도를 조사하였다.

Heijst<sup>(4)</sup>는 비대칭 환상용기내의 유체가 회전가속될 때 세 단계의 유동형태를 거쳐 궁극적으로 강제 회전유동으로 발전함을 실험적으로 보였다. 또한 유동박리가 발생하면서 국부적으로 3차원 유동에서 2차원으로 유동천이가 일어남을 관측하였다. Savas<sup>(5)</sup>는 밀폐 실린더의 순간 회전감속에 초기 각속도에 따라 원평 파, 나선형 파, 원형 파와 나선형 파 및 난류 경계층이 복합적으로 발생함을 실험적으로 보였다. Lopez<sup>(6)</sup>와 Brown과 Lopez<sup>(7)</sup>는 실린더 용기에서 상부벽과 측벽은 정지하고 바닥벽의 회전에 의하여  $Re$  수에 따른 정상상태 측대칭 와류의 구조에 관하여 분석하였다. 소위 Ekman 펌핑현상이 나타나면서 기포(bubble)가 형성된다고 하였다. 또한  $Re$  수가 2,300~2,400이 되면 상류측 기포와 하류측 기포가 합쳐지면서 주기유동이 발생함을 밝혔다.

회전유동에 관한 대부분의 연구는 상하 디스크형이나 실린더 구조의 유동현상을 다룬 것으로 사각공간내의 회전유동에 관한 연구는 매우 드물다. Henderson 등<sup>(8)</sup>은 밀폐된 직사각형 용기를 정지상태로부터 일정 각속도로 순간회전 시에 물의 유동 변화과정을 2차원 유선-와도법으로 수치적 연구를 하였다. 유체는 정지상태에서 강제 회전

Table 1 Classification of BEK flows

Type	Process	$\Omega$	$Ro$
Bödewadt	spin-down	$\Omega_d=0, \Omega_f \neq 0$	1
Ekman	co-rotating counter-rotating	$\Omega_d \approx \Omega_f$	0
Kármán	spin-up	$\Omega_d \neq 0, \Omega_f = 0$	-1

유동으로 변화하는 과정에서 두 가지 단계를 거치며, 먼저 저  $Re$  수에서는 측벽 경계층의 박리 및 roll-up 현상으로 두 개의 싸이클론이 형성되고, 형성된 싸이클론이 용기의 내부영역으로 이동하면서 싸이클론이 합쳐지는 합병(merger)이 나타난다고 하였다. 또한 보다 높은  $Re$  수에서는 회전 대칭성은 깨어지며 복잡한 유동형태가 나타남을 보였다. 서용권<sup>(9)</sup>은 직사각형의 2차원 스핀업을 일정한  $Re$  수 조건하에서 수평 종횡비에 따른 와동의 수량 및 합병을 연구하였다. 이상의 연구들은 회전 측대칭 혹은 사각 실린더의 2차원 유동을 연구한 것이다.

본 연구에서는 칼라 액정표시장치 제조의 핵심 공정인 박막 회전코팅 공정이 연구의 동기가 되었으며, 가로 세로의 길이는 약 500mm, 높이는 불과 10mm로 밀폐된 얇은 사각용기의 회전유동을 수치적으로 분석하였다. 이미 Henderson 등<sup>(8)</sup>의 실험에서 사각형의 수직 종횡비가 매우 작을 때에는 코너에서 발생하는 싸이클론이 어느 정도는 형성되지만 더 이상 발달하지 못한다고 하였다. 따라서 본 연구에서는 얇은 사각공간의 3차원 회전유동 해석하기 위하여 포물형 Poiseuille 유동에 의한 준 3차원 모델을 제안하여 회전유동을 분석하고자 한다.

## 2. 수학적 모델링

### 2.1 준 3차원 모델

본 연구에서 고려한 기하학적 모델은 수평 종횡비( $W/L$ )는 1.0이고 반면에 수직종횡비( $L/H$ )는 25.0 또는 50.0 정도인 밀폐된 얇은 사각공간으로 Fig. 1과 같으며 사각용기의 모든 벽이 정지상태로부터 회전한다. 이때에 밀폐공간내의 공기는 코리올리력 및 구심력에 의하여 경계층 유동형태로 발달하게 되고 궁극적으로는 강제 회전운동에

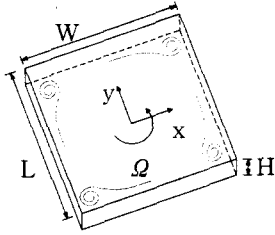


Fig. 1 Schematic diagram of rotating flow in a closed shallow rectangular container

도달하게 된다. 평행평판 혹은 동심회전 원통과 같이 동일형상을 갖는 벽면 사이의 전단유동은 두 벽간의 간격이 작고 상대속도가 없을 때에는 포물형 Poiseuille 유동<sup>(10)</sup>으로 접근한다.

좌표계의 원점을 사각용기의 중심에 위치시키고 등속회전 비관성 좌표계에서 유체의 속도벡터는 회전유동에 의한 X, Y-성분과 포물형 Poiseuille 유동에 의한 Z-성분으로 변수분리를 하면 식 (1)과 같다.

$$U(X, Y, Z, t) = U_0(X, Y, t) \left( \frac{H^2}{4} - Z^2 \right) \quad (1a)$$

$$V(X, Y, Z, t) = V_0(X, Y, t) \left( \frac{H^2}{4} - Z^2 \right) \quad (1b)$$

$$W(X, Y, Z, t) = 0 \quad (1c)$$

여기서  $U_0, V_0$ 는 속도에서 Z-방향의 포물형 성분을 분리한 것으로 차원은  $\text{m/s/m}$ 가 된다.

식 (1)에서 유체의 속도는 Z좌표에 관하여 포물형 분포를 하므로  $Z=0$ 인 중립면에서 U, V 속도는 최대가 되고  $Z=\pm H/2$ 에서 접촉조건에 의하여 "0"이 된다. 따라서, 비정상 3차원 층류유동은 포물형 비정상 준 3차원 층류유동으로 변환되었고, Z에 관한 포물형 함수는 상하부 벽의 점성영향을 나타낸다. 속도의 2차 편미분은 식 (2)와 같다.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = -8U_0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = -8V_0 \quad (2)$$

밀폐된 얇은 사각공간의 회전유동에 포물형 Poiseuille 유동을 적용한 중립면에서의 준 3차원 무차원 운동량방정식은 식 (3)과 같다. 식 (3)은 비관성 좌표계에서 표현한 것으로 우변의 세 번째 항은 상하부 벽의 점성에 의한 생성항, 네 번째 항은 코리올리력, 다섯 번째 항은 원심력에 의한 가설력의 생성항이다.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u - \frac{8}{Re} u \left( -\frac{2v}{A} - \frac{x}{A^2} \right) \quad (3a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v - \frac{8}{Re} v \left( +\frac{2u}{A} - \frac{y}{A^2} \right) \quad (3b)$$

무차원 지배방정식 유도에 사용된 무차원 변수와 결과분석에 필요한 와도 및 유량함수는 다음과 같이 정의하였다.

$$\tau = A\Omega t, \quad x = \frac{X}{H}, \quad y = \frac{Y}{H}, \quad A = \frac{L}{H}, \quad u = \frac{U_0 H^2}{\Omega L}, \quad (4)$$

$$v = \frac{V_0 H^2}{\Omega L}, \quad p = \frac{P}{\rho \Omega^2 L^2}, \quad Re = \frac{\Omega H L}{\nu}$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5)$$

### 2.2 경계조건 및 초기조건

밀폐된 사각용기이므로 모든 벽에서의 유체의 속도는 "0"이며, 초기속도는 식 (6)과 같고 초기와도는  $\zeta = -2/A$ 가 된다.

$$u(x, y, 0) = \frac{y}{A}, \quad v(x, y, 0) = -\frac{x}{A} \quad (6)$$

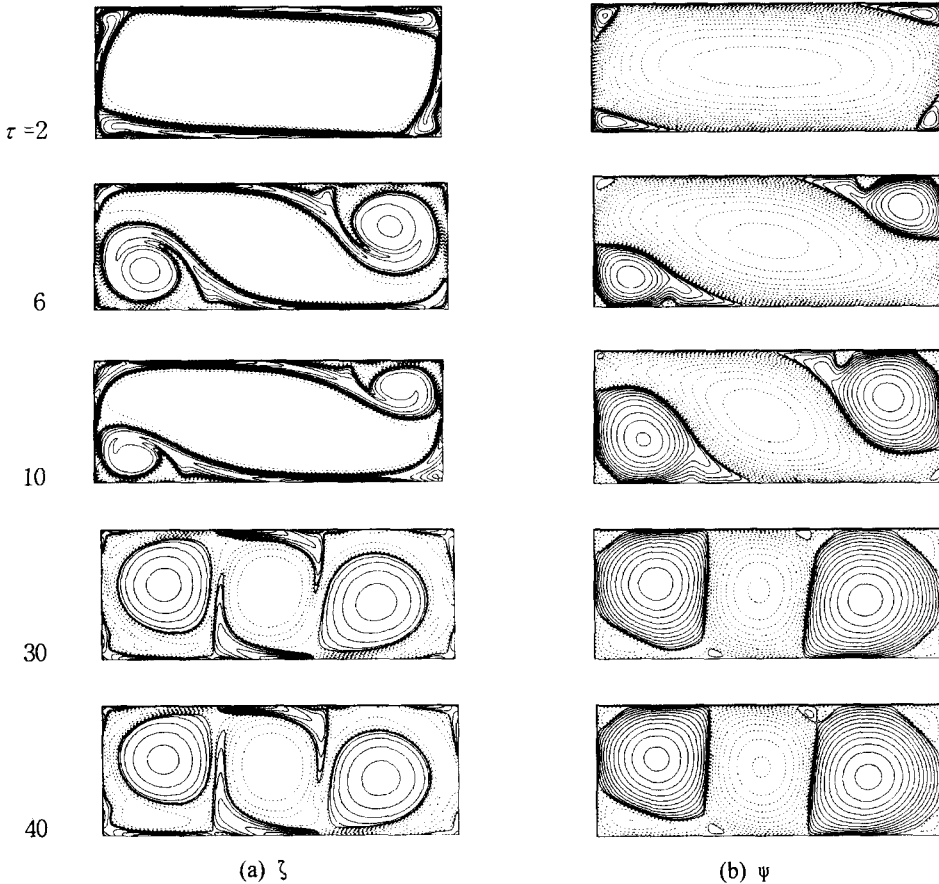
### 2.3 수치해석 및 검증

식 (3)~(6)를 유한체적법으로 이산화하고 SIMPLER<sup>(11)</sup> 알고리즘으로 해를 구하였다. 사용된 격자는  $344 \times 344$ 개의 비균일 엇갈린 격자계로 측벽근처에서의 경계층유동을 묘사하기 위하여 식 (7)에 의하여 측벽에 격자를 집중시켰다. 시간적분은 완전 묵시법으로 무차원 시간증분을 0.25로 사용하였다.

$$x_i = \delta_x (x_i + 0.1 \sin(2\pi x_i)), \quad x_i = -\frac{1}{2} + \frac{i-2}{n_x-2} \quad (7a)$$

$$y_j = \delta_y (y_j + 0.1 \sin(2\pi y_j)), \quad y_j = -\frac{1}{2} + \frac{j-2}{n_y-2} \quad (7b)$$

여기서  $n_x, n_y$ 는 각각 x, y 방향별 격자수,  $\delta_x = WL$ 는 수평 중횡비이다. 본 연구에서 사용된 수치해법의 검증을 위하여 수평 중횡비가 2.28인 직사각형 실린더의 2차원 순간 회전가속 유동을 Henderson 등<sup>(8)</sup>의 연구결과와 비교하여 Fig. 2에 나타내었다. 유동은 측벽 경계층의 박리현상과 와류의 roll-up을 거치면서 cyclonic-anticyclonic-cyclonic vortex를 이룬다.



**Fig. 2** Contours of (a)  $\zeta$  and (b)  $\psi$  at the dimensionless times as indicated for  $Re=2,360$  and  $\delta_h=2.28$  with  $\Delta\tau=1.25 \times 10^{-3}$  in two-dimensional rectangular cylinder. The contour levels are non-uniformly spaced, with 20 positive(solid lines) and 20 negative(dashed lines), determined by  $c-level(i) = Max \times (i/20)^3$  and  $c-level(i) = Min \times (i/20)^3$  respectively, with  $i=1$  to 20 and  $Max(\zeta) = -Min(\zeta) = 100$ ,  $Max(\psi) = -Min(\psi) = 0.3$

### 3. 순간 회전유동

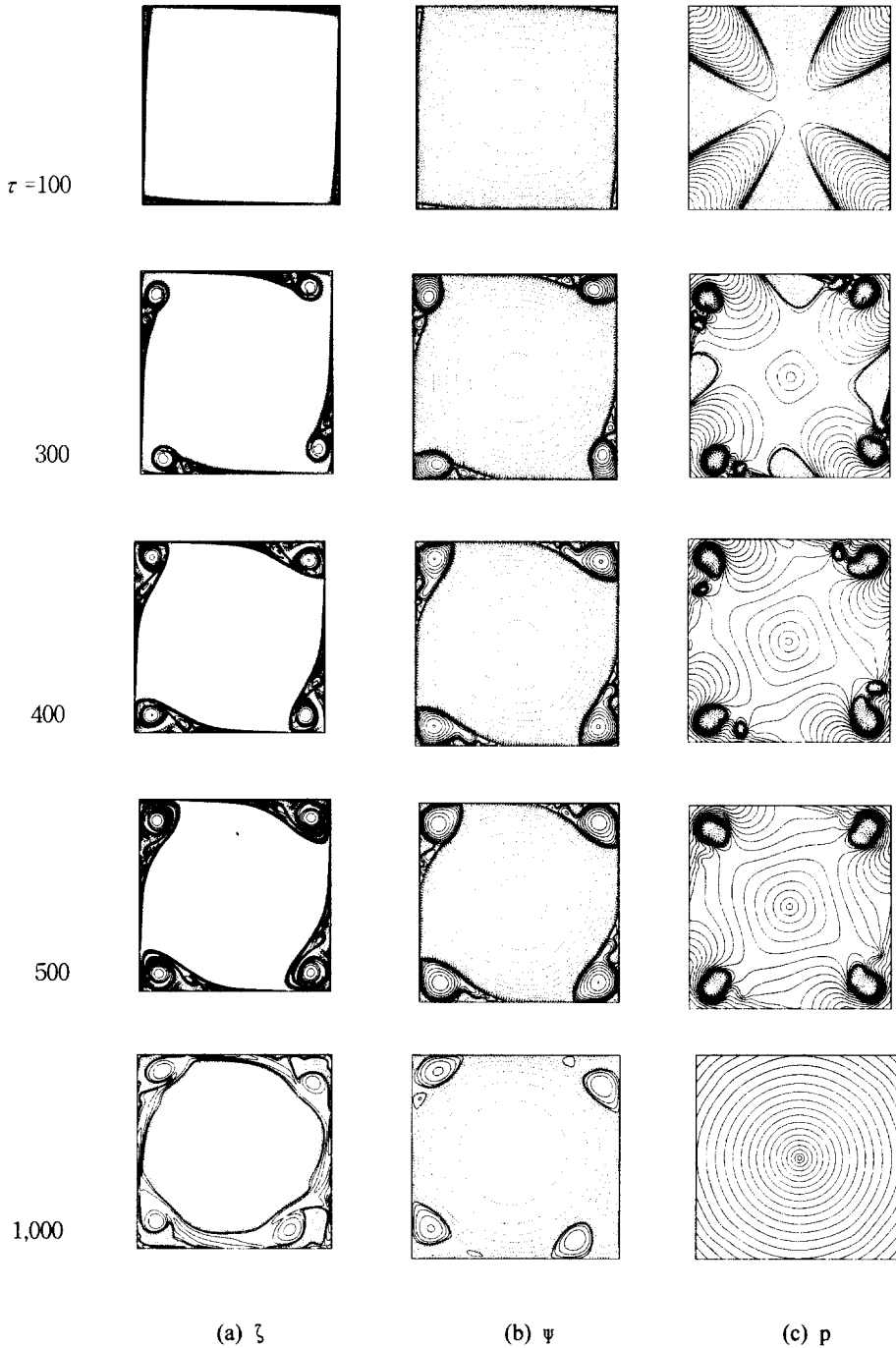
작동유체는 공기로서 동점성 계수가  $1.57 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  이고 상하 평판의 간격은  $H=0.01, 0.02 \text{ m}$ 를, 정사각형의 길이는  $L=0.25, 0.50 \text{ m}$ 를 사용하였다. 즉, 수평 종횡비는 1이고, 수직 종횡비는  $A=25$  혹은 50이 된다.

원형 실린더의 회전유동은 방위각방향으로 대칭이지만 얇은 사각용기의 대칭성은  $z=0$ 인 중립면을 기준으로 상하가 반사대칭이며, 수평방향에 대해서는 직사각형이면 Fig. 2처럼 회전축을 중심으로  $\pi$ -회전대칭, 정사각형이면 Fig. 3에서처럼

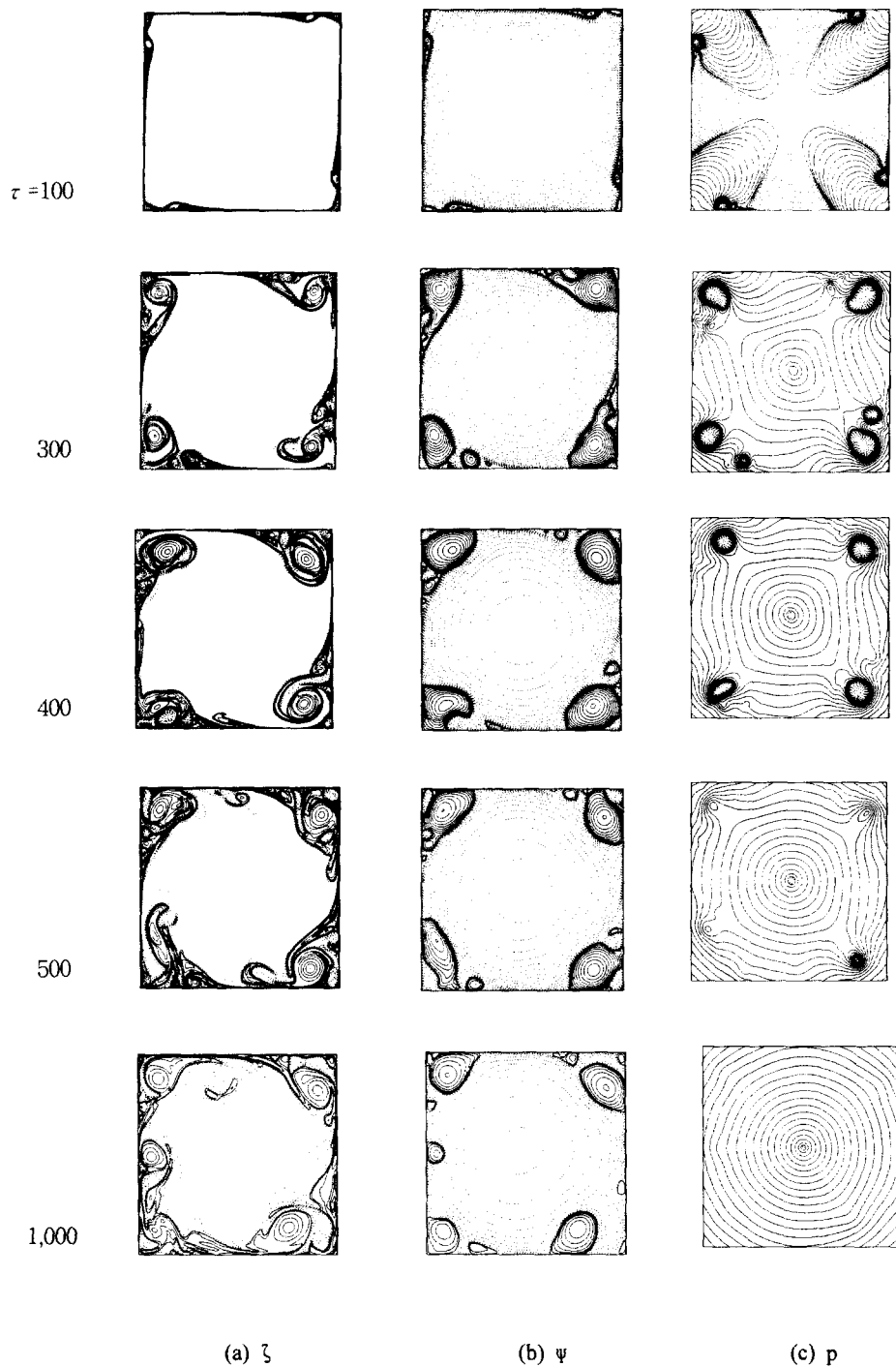
$\pi/2$ -회전대칭을 이룬다. 이러한 대칭성은 저  $Re$  수일 때에만 성립하며  $Re$  수가 증가하면 유동장의 대칭성은 깨어진다. 본 연구에서는 이러한 탈대칭성을 고려하여  $z=0$ 인 평면 전체를 해석영역으로 선정한다.

#### 3.1 주 와류유동

Fig. 3은  $L=0.250 \text{ m}, H=0.010 \text{ m}, \Omega=50 \text{ rpm}$  인 경우에 즉,  $Re=834, A=25$ 인 경우에 무차원 와도, 유량함수 및 무차원 압력을 나타낸 것이다. 압력분포는 회전 중심 축, 즉 정사각형의 중심인 원점에서의 압력을 기준으로 하는 상대압력을 나



**Fig. 3** Contours of (a)  $\zeta$ , (b)  $\psi$  and (c)  $p$  at the times as indicated for  $Re=834$ ,  $A=25$ . The contour levels are non-uniformly spaced, with 20 positive(solid lines) and 20 negative(dotted lines), determined by  $c-level(i) = Max \times (i/20)^3$  and  $c-level(i) = Min \times (i/20)^3$  respectively, with  $i=1$  to 20 and  $Max(\zeta) = -Min(\zeta) = 3$ ,  $Max(\psi) = -Min(\psi) = 3$ ,  $Max(p) = -Min(p) = 0.2$



**Fig. 4** Contours of (a)  $\zeta$ , (b)  $\psi$  and (c)  $p$  at the times as indicated for  $Re=3,335$ ,  $A=50$ . Contour levels are as determined in figure 3

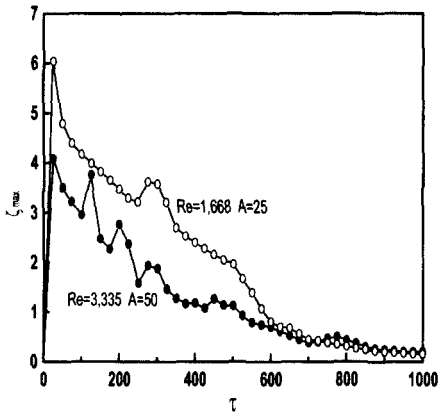


Fig. 5 Maximum vorticity of the fluid

타내었다. 초기에 4개의 측벽에서 각각 경계층이 성장하고 회전 반대방향으로 갈수록 경계층은 점차 두꺼워진다. 경계층이 발달하여 사각용기의 코너에서는 용기의 회전방향과 동일한 4개의 주 와류(primary vortex)가 형성된다. 주 와류에 연속하여 음의 방향 및 양의 방향 와류가 생성하나 영역의 크기면에서는 매우 작다. 낮은 Re 수 회전유동에서는 주 와류에 의한 점성유동이 지배적이고  $\tau=500$ 까지는  $\pi/2$ -회전 대칭성이 유지되나, 그 이후에 점차 강제운동에 도달하면서 와류 및 경계층의 소멸로 대칭성은 깨어진다.

경계층이 성장하는 회전초기에는 원점을 기준으로 하는 상대압력 분포가  $\tau=100$ 일 때처럼 회전방향으로 4개의 양압영역과 4개의 음압영역이 교차하면서 분포한다. 시간이 경과하여 주 와류가 형성되며 주 와류 내부의 압력은 상대적 저압에 의한 싸이클론과 같다. 시간이 더욱 경과하여  $\tau=1,000$  정도에서는 주 와류 및 경계층의 동시 소멸로 점성유동은 점차 약해지고 강제 회전운동으로 발전한다. 강제운동의 압력분포는 회전축을 중심으로 반경에 제곱에 비례하는 동심원을 형성하게 된다. 강제 회전운동 영역은 사각용기의 중심에서 시작하여 시간이 경과할수록 점차 바깥쪽으로 영역이 확장되어 간다.

### 3.2 탈 대칭성

Fig. 4는  $Re=3,335$ 이고 종횡비가  $A=50$ 인 경우에 무차원 와도, 무차원 유량함수 및 무차원 압력분포를 시간별로 나타낸 것이다. 측벽 경계

층의 성장과 동시에 벽면에서 와류가 형성되기 시작한다. 주 와류의 발달과 더불어 인접한 제 2, 제 3의 부차적 와류(subsidiary vortex)가 강해짐을 보이고 있다. 주 와류는 코너의 후미벽면에 부딪히고 나서 벽을 따라 이동하면서 회전대칭성은 사라진다. 시간이 경과할수록 압력분포는 회전 중심으로부터 점차 동심원 형태를 띠면서 강제 회전운동으로 도달한다.

Fig. 5는 Re 수에 따른 유체의 최대 와도를 시간별로 나타낸 것이다. 순간 회전가속에 의하여 경계층의 성장과 더불어 와도는 초기에 급격히 증가한 후에 서서히 감소하며 최종적으로는 용기의 와도와 같아진다. 그림에서 와도가 서서히 감소하는 중간에 순간적인 증감이 일어나는 것은 와류가 경계층으로부터 박리되거나 혹은 인접한 벽면에 부딪히기 때문이다.

순간 회전유동에 의한 얇은 사각용기내의 유체의 비정상 거동은 초기에는 코리올리력과 원심력에 의한 경계층과 와류에 성장으로 점성유동이 지배적이나, 시간이 경과할수록 경계층과 와류의 소멸로 강제 회전운동에 도달한다.

## 4. 결론

얇은 사각용기의 회전유동을 준 3차원 비정상 층류유동 모델의 수치해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 포물형 Poiseuille 유동에 의한 준 3차원 모델은 수직 종횡비가 큰 유동에의 적용은 매우 효율적이다.
- (2) 사각용기의 회전유동은 외부영역에서 경계층과 와류에 의한 점성유동, 내부영역은 강제 회전운동이 지배적이다.
- (3) 정사각형 용기에서는 각 코너에서 4개의 주 와류가 발생하고, 경계층과 와류의 박리가 일어나면서  $\pi/2$ -회전대칭성을 깨어진다.
- (4) 강제 회전운동은 사각용기의 회전중심으로부터 시작하여 점차 외부로 확산된다.

## 참고문헌

- (1) Lingwood, R. J., 1997, "Absolute Instability of the Ekman Layer and Related Rotating Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 331, pp. 405~428.

- (2) Weidman, P. D., 1976, "On the Spin-Up and Spin-Down of a Rotating Fluid. Part 1. Extending the Wedmeyer Model," *J. Fluid Mech.*, Vol. 77, part 4, pp. 685~708.
- (3) Weidman, P. D., 1976, "On the Spin-Up and Spin-Down of a Rotating Fluid. Part 2. Measurements and Stability," *J. Fluid Mech.*, Vol. 77, part 4, pp. 709~735.
- (4) Van Heijst, G. J. F., 1989, "Spin-Up Phenomena in Non-Axisymmetric Container," *J. Fluid Mech.*, Vol. 206, pp. 171~191.
- (5) Savas, O., 1987, "Stability of Bodewadt Flow," 1987, *J. Fluid Mech.*, Vol. 183, pp. 77~94.
- (6) Lopez, J. M., 1990, "Axisymmetric Vortex Breakdown Part 1. Confined Swirling Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 221, pp. 533~552.
- (7) Brown, G. L. and Lopez, J. M., 1990, "Axisymmetric Vortex Breakdown Part 1. Physical Mechanisms," *J. Fluid Mech.*, Vol. 221, pp. 553~576.
- (8) Henderson, D. M., Lopez, J. M. and Stewart, D. L., 1996, "Vortex Evolution in Non-Axisymmetric Impulsive Spin-Up from Rest," *J. Fluid Mech.*, Vol. 324, pp. 109~134.
- (9) 서용권, 1993, "직사각형 내부에서의 2차원 스피널업," 대한기계학회논문집, 제17권, 제7호, pp. 1805~1812.
- (10) 손병진, 맹주성, 이상환, 1995, 詳說流體力學, 회중당.
- (11) Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Mc Graw-Hill.