전단 증진된 난류확산의 수치적 연구

최 재 호* · 이 창 훈†

(2000년 12월 26일 접수, 2000년 5월 15일 심사완료)

Numerical Study of Shear-Enhanced Turbulent Diffusion

Jaeho Choi and Changhoon Lee

Key Words: Shear-Enhanced Diffusion(전단 증진된 확산), Lagrangian PDF Method

Abstract

The purpose of this study is to investigate the effect of shear on turbulent diffusion. Turbulent Couette flows at low Reynolds number are numerically simulated using a Lagrangian PDF method. Flow field and particle trajectories are computed and analyzed in detail. Statistics for particle dispersion obtained from numerical simulations is compared with the classical scaling relations for dispersion in a shear flow.

1. 서 론

본 연구는 난류유동에 전단속도를 가했을 때 전단방향 또는 유동의 수직방향으로 생기는 확산의 효과를 밝히기 위함이다. 전단방향 또는 유동의 수직방향의 확산 효과를 연구하는 이유는 이러한 확산이 열전달이나 물질전달 측면에서 중요한 역할을 하기 때문이다. 특히 난류전단유동의 경우 층류유동과는 달리 전단에 의하여 난류량이 생성되며 직접적으로 운동량이나 에너지의 혼합 및 전달에 결정적인 역할을 하기 때문이다.

본 연구에서는 확산에 대한 근사적인 예측만이 가능하던 기존에 전통적으로 사용되어 왔던 Eulerian 접근방식에서 벗어나 난류 확산에 대한 정확한 예측이 가능하고 관련된 난류모델의 불확실성을 최소화할 수 있는 Lagrangian 접근방식을 사용하였다.[1] 난류모델의 관점으로 볼 때 Lagrangian 모델은 $k-\varepsilon$ 모델이나 Reynolds Stress Transport Model과 같은 전통적인 모델에 비하여 몇 가지 장점을 가지고 있다. Lagrangian 입자의 방정식에 비선형 대류항이 없기 때문에 고차의 상관관계 확산 모델링에서 비롯된 불확실성이 완전히 제거된다. 또한 Lagrangian 확률밀도함수모델은 많은 입자의 확산에 대한 난류통계량을 제공하는데 이러한 양들은 보통 Eulerian 난류모델로는 쉽게 얻을 수 없는 것들이다. 여기에는 확률밀도함수, 속도구조함수, 고차 상관관계 등의 몇 가지 예를 들 수 있다.

Lagrangian 접근방식의 가장 또 다른 장점중의 하나는 속도와 같은 유동변수들을 계산할 수 있다는 것 뿐 아니라, 모델이 입자의 경로를 직접 계산하기 때문에 입자의 확산에 대한 정보를 직접적으로 얻을 수 있다는 것이다. 따라서 Lagrangian 접근방법은 물질의 확산에 대한 연구에 이상적이라 할 수 있겠다.

먼저 비교적 단순한 층류 Couette 유동장에서 점성의 효과와 전단에 의해 생기는 수직방향으로의 분자 확산에 대해 연구를 수행하였고, 그 이

* 서울시립대학교 대학원
† 책임저자, 회원, 연세대학교 기계전자공학부
Email : clee@yonsei.ac.kr
TEL : (02)2123-2846 FAX : (02)312-2159

후에 난류 Couette 유동장의 해석으로 확장하였다.

이 논문에서는 점성의 효과가 고려된 SLM(Simplified Langevin model)[2]을 사용하여 입자의 속도와 위치를 계산할 수 있는 수치적 알고리즘을 개발하였으며, 입자들의 확산에 대한 통계량들을 구하여 이를 전단이 있을 경우의 여러 척도관계식들과 비교 및 검증하였다. 최종적으로는 입자의 위치에 대한 기대분포를 확률밀도함수를 이용하여 나타내 보았다.

2. 지배방정식

우선 분자확산에 의한 입자의 위치변화를 Brownian 운동으로 고려하면 각 입자의 위치변화를 다음과 같이 쓸 수 있다.[3]

$$dX_i = U_i dt + \sqrt{2\nu}\, dW_i \tag{1}$$

여기서 X_i, U_i, dt는 유체입자의 위치, 속도, 시간스텝을 의미한다. ν는 점성계수이며 dW_i는 등방성 Wiener process의 변위로서 평균이 0이며 분산이 dt인 집합에서 임의로 추출한 값을 의미한다. 입자의 속도변화는 다음과 같이 Eulerian 속도 u_i의 Taylor 전개를 이용하고 Navier-Stokes 방정식 및 GLM(Generalized Langevin Model)을 이용하여 다음과 같이 유도할 수 있으며 자세한 유도과정은 Lee et.al[4]을 참조할 수 있다.

$$\begin{aligned} dU_i = &-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \langle P\rangle}{\partial x_i}dt + 2\nu\frac{\partial^2\langle u_i\rangle}{\partial x_j \partial x_j}dt \\ &+\sqrt{2\nu}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}dW_j - G_{ij}(U_j - \langle u_j\rangle)dt \\ &+\sqrt{C_0\langle\varepsilon\rangle}\,dW_i' \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 W_i'은 W_i와 무관한 새로운 Wiener process이다. 이 방정식에서 $\partial\langle P\rangle/\partial x_i$, $\langle\varepsilon\rangle$, k, $\langle u_i\rangle$는 유체입자의 위치에서 얻어진 평균값들이다. 마지막 항은 Kolmogorov의 scaling 결과로부터 관성영역에서 2차 Lagrangian 속도구조함수 $D_L(\tau)(\equiv\langle(U(t+\tau)-U(t))^2\rangle)$가 시간에 비례하는 성질로부터 모델링된 항이다. C_0는 Kolmogorov 상수이다. Drift coefficient tensor G_{ij}는 평균속도구배 $\partial\langle u_i\rangle/\partial x_j$, Reynolds stress $\langle u_i' u_j'\rangle$, dissipation $\langle\varepsilon\rangle$ 등의 함수이며 모델링이 필요한 항이며 난류운동에너지가 $\langle\varepsilon\rangle$의 비율로 소산되도록 모델링한 SLM(Simplified Langevin Model)을 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$G_{ij} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}C_0\right)\frac{\langle\varepsilon\rangle}{k}\delta_{ij} \tag{3}$$

식 (3)은 등방성을 지니고 있는 가장 단순한 형태의 모델이다. 식 (2)를 풀기 위하여 소산율 $\langle\varepsilon\rangle$에 대한 정보가 필요하다. 본 연구에서는 다음의 등방성 난류의 경우 사용되는 관계식을 이용하였다.

$$\langle\varepsilon\rangle = C_l\frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} \tag{4}$$

여기서 l은 길이척도이며 벽 근처에서도 적용시킬 수 있는 다음과 같은 Van Driest 관계식을 사용하였다.

$$l = C_l^{\frac{1}{4}}\kappa y\left(1-\exp\left(-\frac{yu_\tau}{\nu A}\right)\right) \tag{5}$$

k, u_τ는 각각 난류운동에너지, 벽전단 속도이며 다음과 같이 구할 수 있다.

$$k = \frac{1}{2}\langle u_i' u_i'\rangle \tag{6}$$

$$u_\tau = \sqrt{\nu\left.\frac{d\langle u_1\rangle}{dx_2}\right|_{wall}} \tag{7}$$

본 연구에서 사용된 각 계수들의 값은 다음과 같다.

$C_0 = 3.5$, $C_l = 0.09$, $\kappa = 0.41$, $A = 26$

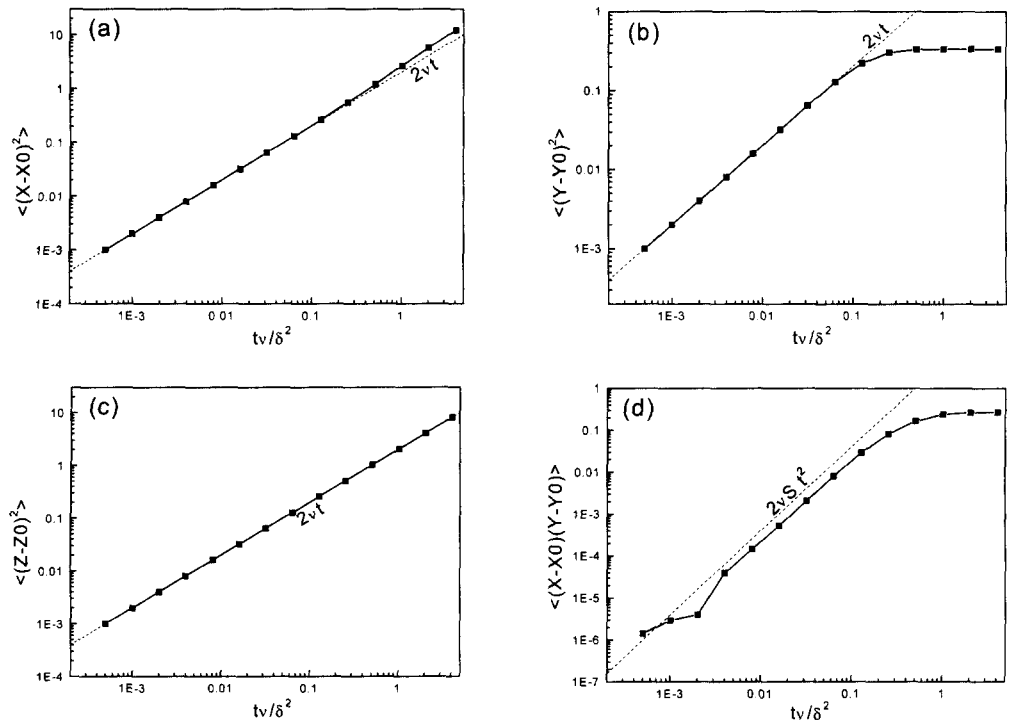

Fig. 1 Mean squared diffusion: (a) the streamwise diffusion; (b) the wall-normal diffusion; (c) the spanwise diffusion, and (d) mean cross diffusion in the streamwise and wall-normal direction in a laminar Couette flow

3. 결과 및 고찰

3.1 층류 Couette 유동

위의 모델식을 양쪽 벽이 $-U_{wall}$과 U_{wall}의 속도로 움직이는 레이놀즈수 $Re(=U_{wall}\,\delta/\nu)=2$ 인 층류 Couette 유동에 적용하여 입자의 위치에 대한 통계적 결과들을 살펴보았다. 여기서 δ는 채널의 반폭을 의미한다.

Fig. 1은 층류 Couette 유동의 중간 지점 (x0=y0=z0=0) 에서 입자들을 동시에 방출했을 때, 벽 수평방향과 수직방향 입자의 확산을 수치적으로 구한 결과를 나타낸 것이다. x축과 z축 방향의 확산에서는 Brownian 유동에 의한 입자의 확산에 대한 스케일링 관계식인 $2\nu t$ 에 거의 일치하며 점성의 지배적 영향을 받고 전단에 의해 증진된 분자확산은 시간이 충분히 지난 후 x 방향으로의 확산 외에는 거의 발생하지 않고 있음을 알 수 있다. y축 방향으로도 입자가 벽에 충돌하기 전까지는 스케일링 관계식과 정확히 일치하고 있다. (d)를 살펴보면 입자의 x 축방향 확산과 y 축방향 확산의 곱의 평균이 $2\nu S\,t^2$ 라는 스케일링식에 정확히 일치하지는 않지만 거의 근접하고 있는 것을 볼 수 있다. 여기서 $S(=d\langle U\rangle/dy)$는 전단률을 의미한다. 위의 척도식은 부록에 유도과정이 소개되어 있다. 원래 전단의 영향이 없었다면 0이 되어야 하지만 전단방향의 속도에 의해 생긴 전단률에 의해 x 축방향과 y 축방향의 확산이 서로 상관관계가 생성됨에 따른 결과임을 알 수 있다. 따라서 층류 Couette 유동에서는 입자의 x 방향의 확산과 y 방향의 확산 사이의 상관관계에만 전단의 영향이 생기고 나머지 x, y, z 축 방향의 확산에서는 전단에 의해 증진된 확산의 영향은 크게 관찰되지 않는 것을 알 수 있다.

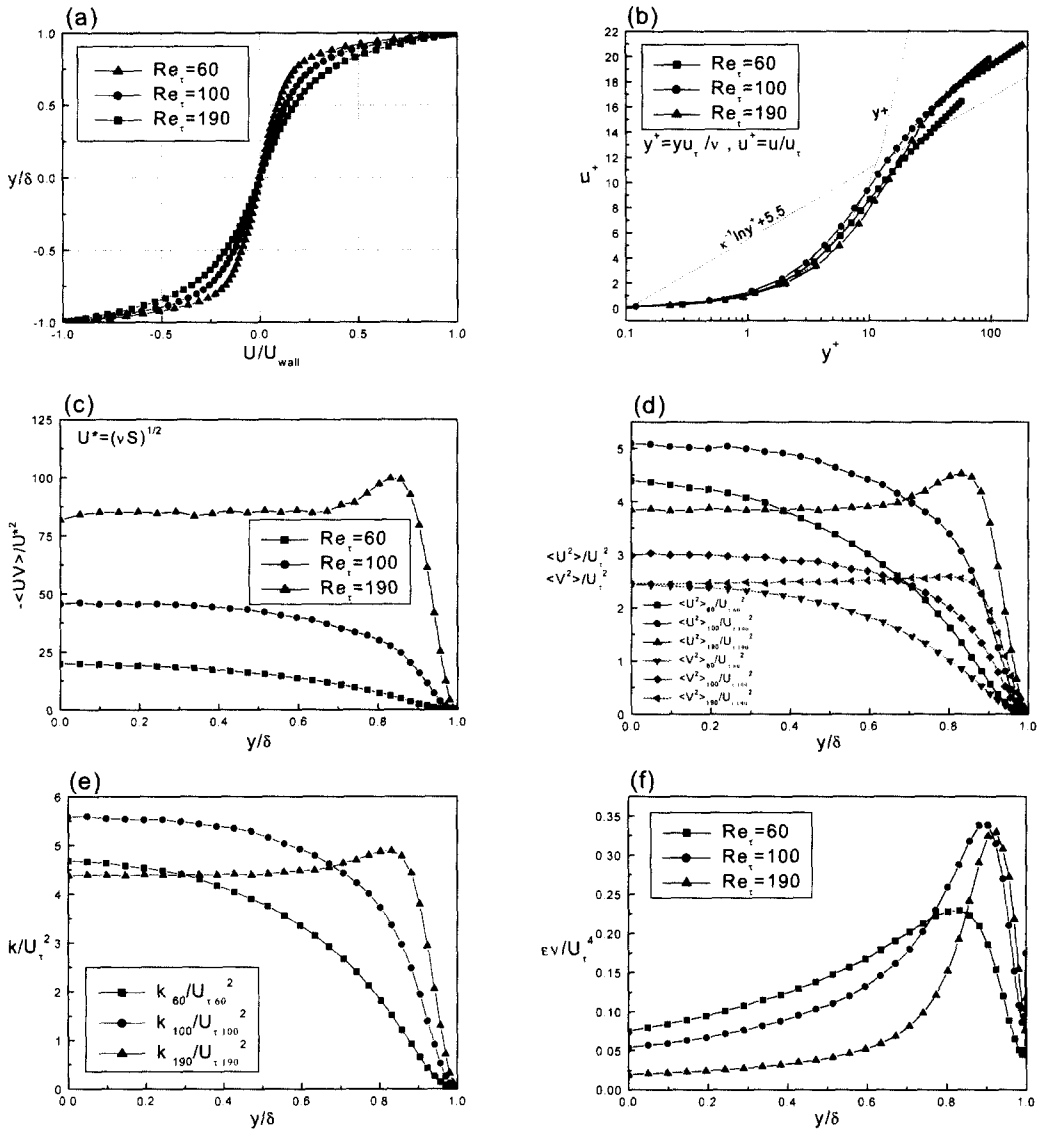

Fig. 2 Statistics for turbulent Couette flows; (a) Mean streamwise velocity normalized by the wall velocity; (b) Mean velocity profile in the semi-log axis; (c) Reynolds shear stress normalized by a shear-defined velocity; (d) mean-squared fluctuations; (e) turbulent kinetic energy; (f) turbulent dissipation rate

3.2 난류 Couette 유동

레이놀즈수 $Re_\tau(=u_\tau\delta/\nu)$가 60, 100, 190 인 세 가지 난류 Couette 유동에 대해 연구를 수행하여 입자의 위치에 대한 통계적 결과들을 살펴보았다. 특히 저레이놀즈수를 갖는 유동들을 선택한 이유는 이러한 약한 난류유동에서는 점성의 효과가 중요해지고 점성에 의한 확산과 난류확산을 비교할 수 있기 때문이다. 또한 입자의 확산과정이 벽으로 제한된 비등방성유동에서 어떠한 경향을 보이는지를 조사할 수 있다. 아울러 고레이놀즈수의 유동의 계산으로의 확장을 위하여 선행되었다.

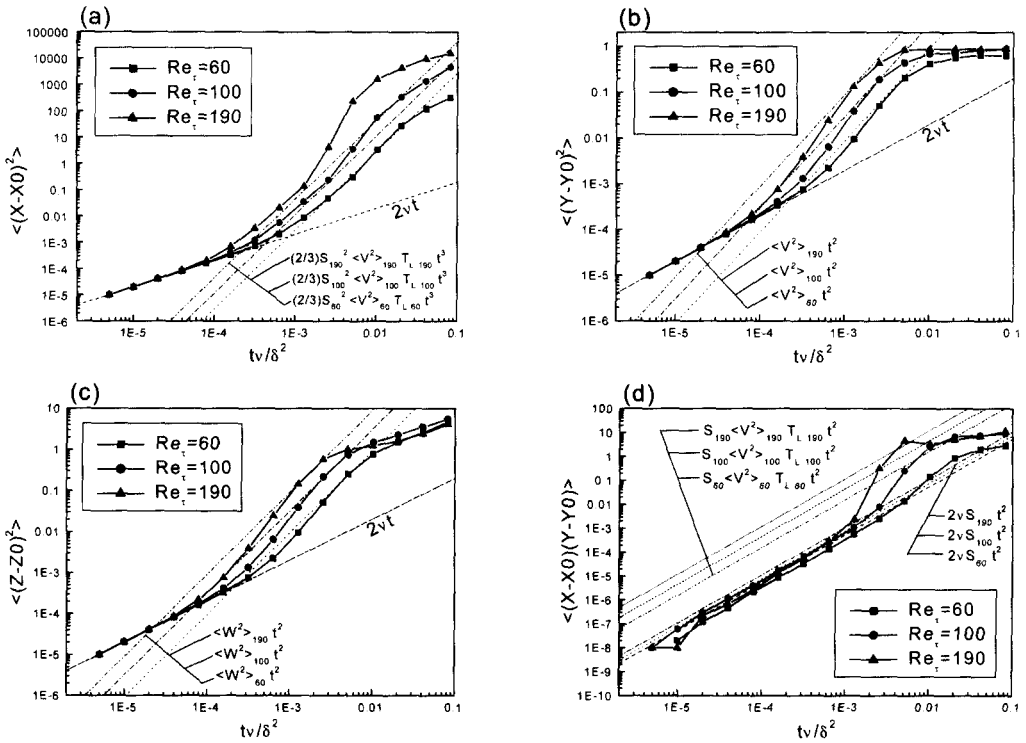

Fig. 3 Mean squared diffusion (a) the streamwise diffusion; (b) the wall-normal diffusion; (c) the spanwise diffusion; and (d) mean cross diffusion in the streamwise and wall-normal direction in the turbulent Couette flows at three different Re_τ's (60, 100, 190)

여기서 사용된 세 가지 다른 경우의 난류 Couette 유동에 대한 여러 가지 난류량들을 모델 검증의 목적으로 구하여 Fig. 2에 도시하였다. 여기서 x-축과 y-축 상의 모든 변수들은 무차원화한 값들을 사용하였다. Fig. 2(a)에서 Re_τ 값이 증가할수록 점성저층의 두께가 감소하고 채널 중간에서 전단률이 감소하고 있음을 알 수 있다. Fig. 2(b)는 벽 근처와 로그영역에서 평균속도의 분포를 조사하기 위해 속도와 벽에서의 거리를 점성스케일로 각각 무차원화하여 반로그적인 그래프 상에 나타낸 것이다. 벽 근처에서는 세 경우 모두 속도가 벽에서의 거리에 선형적으로 증가는 벽법칙을 잘 따르고 있음을 볼 수 있다. 그러나 로그영역에서는 로그방정식과 잘 일치하지 않고 있는데 이는 Couette 유동의 특성이라 할 수 있다. 레이놀즈 전단응력의 분포에서 볼 수 있듯이 채널의 중간으로 접근할수록 전단응력이 감소하지 않고 평평한 분포를 갖고 채널 중간에서 최대값을 갖는 것을 볼 수 있다. 또한 채널의 정중간에서는 대칭성에 의해 유한한 전단을 갖은 평균유동이 관찰된다. 따라서 평균속도구배가 벽으로부터의 거리에 역비례의 관계를 보이는 로그방정식과는 다른 분포를 보이고 있다. Figs. 2(c), 2(d), 2(e)에서와 같이 난류량들이 채널의 중간에서 Re_τ 값이 증가함에 따라 더 평평한 분포를 보이고 있다. 그리고 벽 근처에서 경계층의 영향을 받아 난류점성 소산의 분포가 Re_τ 값이 증가함에 따라 더 국한된 지역으로 제한되며 최대값의 위치가 점차 벽으로 가까워지고 있음을 Fig. 2(f)에서 볼 수 있다.

입자의 확산의 척도인 입자궤적 코배리언트 텐서 (Particle displacement covariant tensor)

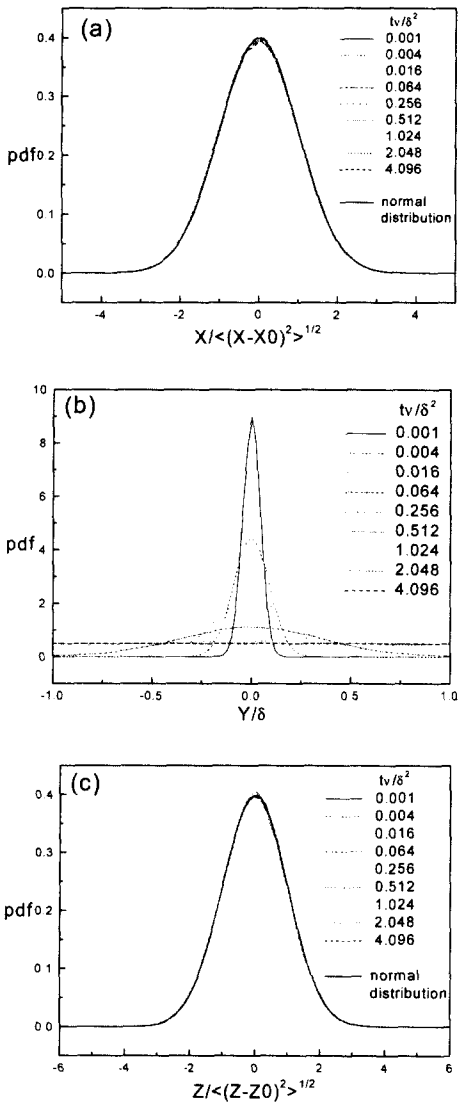

Fig. 4 Probability density function for particle's expected location: (a) x-direction; (b) y-direction; (d) z-direction in a laminar Couette flow

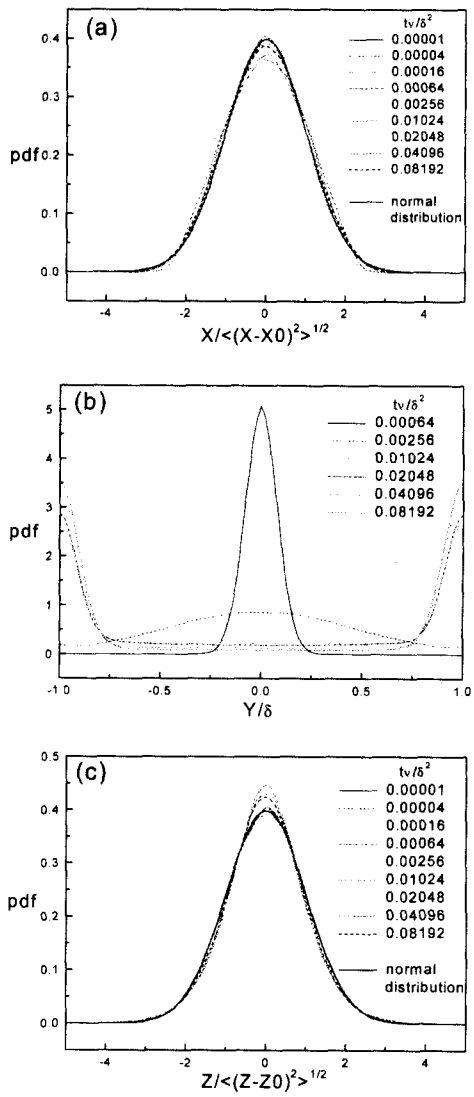

Fig. 5 Probability density function for particle's expected location: (a) x-direction; (b) y-direction; (c) z-direction in a turbulent Couette flow at Re_τ(=100)

$D_{ij}(t) \equiv \langle X_i(t) X_j(t) \rangle$[5]를 조사하기 위해서 채널 중간에서 충분히 많은 입자를 방출시켰다. 균일하게 분포시킨다는 것을 초기조건[6]으로 가정하고, 입자의 확산을 정량적으로 조사하기 위해서 전단균질유동(homogeneous shear flow)에 적용할 수 있는 텐서의 다음과 같은 척도식을 고려하자.

$$D_{11}(t) = \frac{2}{3} S^2 \langle u_2^2 \rangle T_{L2} t^3 \quad when \ t \gg T_{L2} \qquad (8)$$

$$= 2\nu t \qquad when \ t \ll T_{L2} \qquad (9)$$

$$D_{12}(t) = S\langle u_2^2\rangle T_{L2}\, t^2 \qquad when\ t \gg T_{L2} \quad (10)$$

$$= 2\nu S\, t^2 \qquad when\ t \ll T_{L2} \quad (11)$$

여기서 식 (8), (10) 은 Monin and Yaglom[7]에 의한 식이고 식 (9)는 브라운 운동에 의한 확산식이며 식 (11)은 본 연구에서 유도한 관계식이며 자세한 유도과정은 부록을 참조할 수 있다. 여기서 S는 원점에서의 전단률을 의미하고 T_{L2} 는 유동의 수직 방향 Lagrangian 섭동속도 u_2 의 적분시간스케일을 의미한다. 본 연구에서는 등방성유동의 경우의 추정식을 이용하여 적분시간스케일을 구하여 사용하였다. 위의 네 가지 관계식과 등방성 유동에 대한 입자의 확산 스케일링 관계식을 수치결과와 비교하였다. 물론 균질 전단유동에 대한 척도식이므로 본 연구에서 취급하는 Couette 유동과는 엄밀한 비교가 어려우나 채널의 정중간에서 방출되는 입자들의 초기 확산경향은 비교가 가능하다고 할 수 있다.

Fig. 3은 난류 Couette 유동의 채널 중간 지점 (x0=y0=z0=0)에 입자들을 동시에 방출했을 때 Re_τ 가 다른 세 가지 경우에 대한 벽 수평방향과 수직방향 입자의 확산을 수치적으로 구한 결과를 나타낸 것이다. Re_τ 값이 커짐에 따라 세 방향 모두 입자의 확산 경향이 크게 향상 되었음을 알 수 있다. 그러나 전단에 의한 효과는 x 방향의 확산에만 확실히 나타나고 있다. 횡방향과 벽수직방향의 확산은 난류 그 자체에 의한 확산만 관찰되고 있다. 이는 충분히 예측할 수 있는 내용이며 전단유동 방향의 확산은 시간에 세제곱에 비례하여 나타나므로 난류 자체에 의해서 증진되는 확산(시간의 제곱에 비례함)에 비해서 비교가 되지 않을 정도로 증진되고 있다. Figs. 3(b)와 3(c)에서는 입자 방출초기에 점성영역에서는 층류 Couette 유동에서와 같이 식 (9)에 잘 일치하며 점성의 지배적인 영향을 받고 있지만 어느 정도의 시간이 흘러 $t \gg T_{L2}$ 의 영역에 이르게 되면 순수하게 난류에 의한 영향을 받으며 난류 확산 스케일링 관계식을 따라 확산되고 있음을 알 수 있다. Figs. 3(a)와 3(c)를 보면 Re_τ 값이 커짐에 따라 관성영역에서의 식 (8)과 식 (10)은 제대로 관찰되지 않고 있는데 그 한가지 이유는 (10)의 관계식에 이르기 전에 대다수의 입자들이 운동 중 벽과 충돌하게 되기 때문이고 또한 식 (8)과 식 (10)은 모두 등방성 유동에 대하여 정의된 식이기 때문에 실제 비등방성인 유동을 등방성으로 가정하고 비교하게 되는데 따르는 오차도 무시할 수 없다는 것을 들 수 있겠다. 그리고 층류 Couette 유동과 비교하여 보면 시간 t가 0.1로 같을 때 x-축 방향으로의 확산이 층류에서는 약 0.1인데 반하여 난류에서는 거의 10000까지 증가된 것을 볼 수 있다. 또한 층류에서와 같이 Fig. 3(d)에서도 전단률에 의해 입자의 x-축 방향 운동과 y-축 방향 운동 사이에 상관관계가 발생하여 확산이 그 만큼 더 증진되어 일어나고 있으나 그 효과가 나타나기 전에 벽과의 충돌로 인하여 부분적으로 나타나고 있음을 알 수 있다.

Fig. 4와 5에 층류 Couette 유동과 Re_τ 가100인 난류 Couette 유동에 대해 시간이 경과함에 따라 x-, y-, z-축 세 방향으로 확산되는 입자들의 확률밀도함수를 그려서 정규분포곡선과 비교하였다. 여기서 주의할 점은 x-축과 z-축 방향으로는 각 시점의 표준편차로 무차원화한 가로축으로 나타내었다는 사실이다. 시간도 무차원화 시킨 시간을 사용하였다. 두 그림 모두에서 시간이 경과함에 따라 x-축과 z-축 방향으로 정규분포와 흡사한 분포들이 얻어지고 있음을 볼 수 있다. 난류에 의한 확산이 층류에서의 확산에 비해 비교할 수 없을 정도로 증진되는 것을 확산되는 시간을 비교하면 쉽게 알 수 있다. Fig. 4와 Fig. 5의 양 쪽 (b)그래프를 비교해보면 층류 Couette 유동에서는 시간이 경과함에 따라 지속적인 입자들의 확산이 일어나 나중에는 거의 수평적인 분포를 유지하게 되지만, 난류 Couette 유동에서는 시간이 증가함에 따라 벽에 충돌한 입자들이 벽 근처에 갇혀서 오히려 벽 근처에서의 입자의 개수가 지속적으로 증가하여 생기는 성층화된 밀도를 볼 수 있다. 그것은 벽 근처에서는 난류량들이 거의 0에 가깝기 때문에 순수한 난류에 의한 입자들의 확산은 거의 발생하지 않고 점성의 영향만을 주로 받게 되어 입자들의 확산이 상대적으로 억제되기 때문이라는 사실로부터 이해할 수 있다. 그리고 여기에는 나타내지 않았지만 Re_τ 가 60일 때는 y축 방향으로 시간이 경과함에 따라 벽 근처의 입자들의 밀도가 증가하는 것을 볼 수 있었고, Re_τ

가 190일 때는 y축 방향으로 양 쪽 벽에서 정확히 3.5의 확률밀도를 유지하며 유사한 경향을 확인할 수 있었다.

4. 결 론

Lagrangian 속도 변화를 이용한 simple Langevin 방정식을 이용하여 입자의 속도와 위치를 계산할 수 있는 수치적 알고리즘을 개발하였으며, 난류 Couette유동에 적용하여 입자들의 확산에 대한 통계량들을 구하여 이를 여러 척도관계식들과 비교 및 검증해 내었다. 뿐만 아니라 점성의 영향과 함께 그 유동의 전단방향 또는 수직방향으로 생기는 전단 증진된 난류 확산의 효과를 밝혀 내었다. 난류 Couette 유동에서 입자들의 확산에 대한 통계량을 구할 때 부분적으로 스케일링 관계식들을 확인할 수 없었던 것은 벽으로 제한되어 있는 유동의 비등방성, 비균질성에서 이유를 찾을 수 있으며 레이놀즈수가 낮은 유동의 계산에 따른 오차도 한 몫을 하고 있음을 알 수 있다. 앞으로 레이놀즈수가 높은 유동에 대한 계산을 통하여 확산의 효과를 보다 엄밀히 조사할 필요가 있겠다.

후 기

이 연구는 과학재단 목적기초연구 (특정기초연구, 2000-1-30400-010-3)의 지원에 의해서 수행되었다.

참고문헌

(1) Pope, S. B., 1985, "PDF Methods for Turbulent Reactive Flows," *Progress in Energy and Combustion Sciences*, Vol. 11, pp. 119~192.

(2) Pope, S. B., 1994, "Lagrangian PDF Methods for Turbulent Flows," *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 26, pp. 23~63.

(3) Dreeben, T. D. and Pope, S. B., 1997, "Probability Density Function and Reynolds-Stress Modeling of Near-Wall Turbulent Flow," *Physics of Fluids*, Vol. 9, No. 1, pp. 154~163.

(4) Lee, C., Kim, B. and Kim, N., 2000, "A Simple Lagrangian PDF Model for Wall-Bounded Turbulent Flows," *KSME International Journal*, Vol. 14, No. 8, pp. 900~911.

(5) Shen, P. and Yeung, P. K., 1997, "Fluid Particle Dispersion in Homogeneous Turbulent Shear Flow," *Physics of Fluids*, Vol. 9, No. 11, pp. 3472~3484.

(6) Squires, K. D. and Eaton, J. K., 1991, "Lagrangian and Eulerian Statistics obtained from Direct Numerical Simulations of Homogeneous Turbulence," *Physics of Fluids*, Vol. 3, No. 1, pp. 130~143.

(7) Monin, A. S. and Yaglom, A. M., 1971, *Statistical Fluid Mechanics*, Vol. I, p. 558.

부 록

분자확산에 의한 입자의 위치변화를 Brownian 운동으로 고려하면 각 입자의 위치변화를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$dX = U\,dt + \sqrt{2\nu}\,dW_x \tag{12}$$

$$dY = V\,dt + \sqrt{2\nu}\,dW_y \tag{13}$$

식 (12)에서 전단유동의 경우 시간 $t \ll T_L$ 일 때는 점성의 영향보다는 상대적으로 속도의 영향을 훨씬 크게 받는다. 그리고 식 (13)에서 y축 방향의 속도 V=0 이기 때문에 두 식은 간단하게 다음과 같이 근사된다.

$$dX \sim U\,dt \tag{14}$$

$$dY \sim \sqrt{2\nu}\,dW \tag{15}$$

그런데, $dU \sim \frac{\partial u}{\partial y} dY$ 이므로 식 (14)는 다음과 같이 근사된다.

$$dX \sim U\,dt \sim \frac{\partial u}{\partial y} dY\,dt \tag{16}$$

식 (16)을 이용하면

$$\langle dX \cdot dY \rangle = \frac{\partial u}{\partial y} (dY)^2 dt$$

이 되고 따라서, S의 정의와 식 (15)에 의해 최종적으로 아래와 같은 식이 얻어진다.

$$\langle dX \cdot dY \rangle = 2\nu S\,t^2 \tag{17}$$