

3 차원 공간상에서 로봇 매니퓰레이터의 접촉힘 추정

이 중 육*. 허 건 수**
(2000년 2월 8일 접수)

Contact Force Estimation of Robot Manipulators in 3-D Space

Jungwook Lee and Kunsoo Huh

Key Words : 3-Link Robot Manipulator(3 축 로봇 매니퓰레이터), Contact Force(접촉 힘), Extended Kalman Filter(확장된 칼만 필터), Force Estimation(힘 추정)

Abstract

Recent requirements for the fast and accurate motion in industrial robot manipulators need more advanced control techniques. To satisfy the requirements, importance of the force control is being continuously increased and the expensive force sensor is often installed to obtain the contact force information in practice. This information is indispensable for the force control of maintaining the desired contact force. However, the sensor cost is too high to be used in industrial applications. In this paper, it is proposed to estimate the contact force occurred between the end-effector of robots and environment in 3-D. The contact force monitoring system is developed based on the static and dynamic models of 3 DOF robot manipulators, where the contact force is described with respect to the link torque. The Extended Kalman Filter is designed and its performance is verified in simulations.

1. 서 론

로봇의 응용작업은 크게 두 가지로 분류되는데, 첫째는 단순한 물체이동(pick-and-place)으로 페인팅(painting)과 같은 외부 환경과의 상호작용 없이 공간을 운동하며 작업하는 것이고, 둘째는 연삭(grinding), 디버깅(deburring), 연마(polishing), 유리창 닦기등과 같이 외부 환경과 접촉이 일어나면서 외부환경과 상호 작용을 하며 작업하는 것이다. 첫번째 경우에는 순수한 위치제어로 상당한 성능을 발휘하지만 두번째 경우는 단순한 위치 제어만으로는 그 성능을 발휘할 수가 없다. 이 경우에는 위치 제어뿐만 아니라 작업 대상물에 원하는 힘을 고려하여 시스템이 안정할 수 있는 힘 제어와 위

치 제어를 동시에 수행하여야 한다. 특히, 산업 자동화가 점차 고도화되면서 외부 환경과의 반력을 제어하기 위하여 로봇과 외부 작업물 사이에 작용하는 힘을 셈싱해야 할 필요성이 요구되고 있다. 하지만, 이 힘 센서는 그 가격이 매우 고가이기 때문에 실용화에 큰 어려움이 있으며 로봇의 손목에 부착하기 쉽지 않고 작업시 발생하는 고온등의 환경적 영향을 많이 받는다.

최근에는 로봇의 동역학적 모델을 기반으로 외부에서 작용하는 토크에 대한 정보를 추정(estimation)하여 토크 제어에 응용하는 예가 많아지고 있다. 그 예로 모델링이 외의 모든 값을 외란으로 간주하고 이를 추정하는 외란관측기^(1,2)를 이용하거나 외부 환경을 질량-템퍼-스프링 시스템으로 가정하여 접촉힘을 추정하는 방식을 들 수 있다.⁽³⁾ 그 밖에도 로봇 매니퓰레이터의 모델식을 토대로 동적 운동상태를 추정하기 위한 관측기 설계 등도 연구된 바 있다.^(4,5) 외부와의 접촉힘을 단순히 외란으로 가정하고 이를 추정하기 위한 시도로는 본 저자들이 2 차원상에서 제 1 형 2 링크 로봇

* 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

** 회원, 한양대학교 기계공학부 부교수
E-mail : khuh2@email.hanyang.ac.kr
TEL : (02)2290-0437 FAX : (02)2295-4584

매니퓰레이터를 대상으로 연구하여 보고한 바 있다.⁽⁶⁾ 여기서는 로봇 매니퓰레이터와 외부 환경과 접촉힘(contact force)이 발생할 때 단순화된 로봇 매니퓰레이터의 정적, 동적인 모델식을 유도하고 이 모델식을 바탕으로 EKF(Extended Kalman Filter)를 구성하여 로봇과 외부 환경과의 접촉힘을 추정하였다. 이는 각 축에서 발생되는 위치와 그 속도의 정보를 통해 힘 센서를 쓰지 않고 외부에서 작용하는 힘이나 토크를 간접적으로 추정하게 된다. 하지만 이 경우 발생하는 접촉힘이 2 차원으로 한정되어 있기 때문에 그 응용범위가 제한된다.

본 논문에서는 발생할 수 있는 접촉힘을 3 차원으로 확장함으로써 보다 다양한 환경에서 적용할 수 있도록 하였다. 이러한 3 차원 접촉힘을 추정하기 위하여 3 차원 공간상에서 외부에서 힘이 가해질 때의 단순화된 제 3 형 3 링크 로봇 매니퓰레이터의 정적, 동적 평형 방정식을 유도하였고 이 모델식을 바탕으로 EKF (Extended Kalman Filter)를 설계하여 로봇과 외부환경과의 접촉힘을 추정하였다.

본 논문의 구성은 2 장~4 장에서 접촉힘이 발생할 때의 3 축 로봇을 모델링하였고 5 장에서 접촉힘 추정을 위한 감지 방식을 제안하였으며 6 장에서 시뮬레이션을 수행하였으며 마지막 7 장에서 결론을 맺고자 한다.

2. 로봇 매니퓰레이터의 모델링

EKF 를 이용하여 접촉힘을 추정하기 위해서는 실제 플랜트의 운동을 잘 표현하는 모델식이 필요하다. 이 매니퓰레이터를 모델링하기 위해서는 먼저 매니퓰레이터의 궤적이나 위치에 따라 말단부에 가해지는 힘/토크 사이의 정적인 관계를 알아야 하며, 둘째로는 매니퓰레이터의 운동을 제어하기 위한 여러 가지 동적인 힘/토크 관계를 알아야 한다.⁽⁷⁾ 외부 환경과의 상호작용으로 인한 특히 접촉에 의한 반력이나 그리퍼(gripper)가 파지하고 있는 물체의 중량등의 힘/토크와 평형을 이루기 위해서 요구되는 관절 토크는 수행하는 작업에 따라 변하게 된다.

2.1 로봇 매니퓰레이터의 정역학

로봇 매니퓰레이터의 정적 힘과 토크 평형 관계를 알기 위하여 다음과 같이 단일 링크에 작용하는 외력과 토크 평형을 고려해 보기로 하자. 정적 평형에 대한 힘/토크 방정식은 다음과 같이 나타내어 진다.

정적 힘평형:

$$\begin{aligned} {}^R f_n &= {}^R f_{n-1,n} - {}^R f_{n,n+1} + m_n {}^R g \\ &= 0 \text{ (정적 평형의 경우)} \end{aligned} \quad (1)$$

정적 토크평형:

$$\begin{aligned} {}^R \tau_n &= {}^R \tau_{n-1,n} - {}^R \tau_{n,n+1} - {}^R c_{n-1,n} \times {}^R f_{n-1,n} + {}^R c_{n,n+1} \times {}^R f_{n,n+1} \\ &= 0 \text{ (정적 평형의 경우)} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 ${}^R f_n$: 링크 n에 가해지는 합력

${}^R \tau_n$: 링크 n에 가해지는 토크 합력

${}^R c_{n,n+1}$: 링크 n의 중심 위치 벡터

${}^R f_{n-1,n}$: 링크 n-1에 의해 링크 n에 가해지는 힘

m_n : 링크 n의 질량

2.2 로봇 매니퓰레이터의 동역학

말단부(end-effector)가 원하는 궤적을 따라 움직이도록 운동을 제어하려면 링크가 가속될 때 관성을 극복하기 위한 동적 토크도 발생시켜야 한다. 동적 토크는 매니퓰레이터의 운동으로부터 발생하는데, 관성 토크(inertia torque), 구심 토크(centripetal torque) 및 코리올리 토크(Coriolis torque)로 분류할 수 있으며 단일 링크에 대한 동적 평형에 대한 힘/토크 방정식은 다음과 같이 나타내어 진다.

동적 힘평형:

$$\begin{aligned} {}^R f_n &= {}^R f_{n-1,n} - {}^R f_{n,n+1} + m_n {}^R g = m_n {}^R a_n \\ &= 0 \text{ (힘의 평형이 이루어질 때)} \end{aligned} \quad (3)$$

동적 토크평형:

$$\begin{aligned} {}^R \tau_n &= {}^R \tau_{n-1,n} - {}^R \tau_{n,n+1} - {}^R c_{n-1,n} \times {}^R f_{n-1,n} + {}^R c_{n,n+1} \times {}^R f_{n,n+1} \\ &= I_n \times {}^R \alpha_n + {}^R \omega_n \times I_n \times {}^R \omega_n \\ &= 0 \text{ (토크의 평형이 이루어질 때)} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 ${}^R a_n$: 절대 좌표계에서 본 링크의 가속도

${}^R \omega_n$: 링크의 각속도

${}^R \alpha_n$: 링크의 각각속도

I_n : 각 링크의 관성모멘트

3. 제 3 형 3 링크 로봇 매니퓰레이터의 모델링

제 1 형 2 링크 로봇 매니퓰레이터에 질량이 없는 기저링크를 설치하여 로봇과 작업 대상물과의 접촉힘이 3 차원상으로 발생하는 Fig. 1 과 같은 제 3 형 3 링크 로봇을 고려할 수 있다. 이 기저링크는 y 축을 중심으로 토크를 발생시킨다. 로봇과 외부 환경과의 접촉에 의해서 발생하는 접촉힘 ${}^3 f_4$ 가 마지막 링크에 가해지고 링크 좌표계 3의 원점에 작용하여 xyz 평면에 Fig. 1 과 같이 놓여진다.

이때 3 차원 접촉힘 3f_4 가 발생했을 때의 로봇 매니퓰레이터의 힘/토크 평형 방정식을 식 (1)과 식 (2)로부터 구할 수 있다. 마찬가지로 분리된 링크의 동적 힘/토크 평형 방정식인 식 (3)과 식 (4)를 이용해 Fig. 2 와 같은 제 3 형 3 링크 매니퓰레이터의 동적 힘/토크 평형 방정식을 구하고 앞에서 구한 정적 힘 토크 평형 방정식과 결합하여 접촉힘/토크가 고려된 매니퓰레이터에 가해지는 모든 힘/토크 방정식을 얻게 된다.

$$\tau_{0,1}(\hat{f}) = {}^0c_{1,2} \times {}^0m_2 {}^0a_2 + {}^0p_{1,2} \times {}^0f_{2,3} {}^0c_{1,2} \times {}^0m_2 {}^0g + I_1 {}^0\alpha_1 + {}^0\omega_1 \times I_1 {}^0\omega_1 \quad (5)$$

$$\tau_{1,2}(\hat{k}) = {}^0c_{1,2} \times {}^0m_2 {}^0a_2 + {}^0p_{1,2} \times {}^0f_{2,3} {}^0c_{1,2} \times {}^0m_2 {}^0g + I_2 {}^0\alpha_2 + {}^0\omega_2 \times I_2 {}^0\omega_2 \quad (6)$$

$$\tau_{2,3}(\hat{k}) = {}^0c_{2,3} \times {}^0m_3 {}^0a_3 + {}^0p_{2,3} \times {}^0f_{3,4} {}^0c_{2,3} \times {}^0m_3 {}^0g + I_3 {}^0\alpha_3 + {}^0\omega_3 \times I_3 {}^0\omega_3 \quad (7)$$

여기서 m_n : 각 링크 n 의 질량

I_n : 각 링크 n 의 관성 모멘트

윗식들을 각 링크의 길이와 변위로 나타내면 자세한 3 차원상에서의 로봇 매니퓰레이터의 운동방정식을 구할 수 있으며 지면 관계상 부록 A 에 수록하고 있다.

4. 말단장치를 고려한 매니퓰레이터의

모델링

4.1 단순한 그리퍼로서 고려된 말단장치의 모델링

말단장치가 고려된 로봇 매니퓰레이터의 모델링을 고려해 보기로 하자. 지금까지는 외부 환경과 접촉을 이루는 부분이 링크의 끝이라고 가정하여 접촉힘을 추정하였다. 하지만 실제로 외부 환경과의 접촉이 이루지는 부분은 로봇의 끝에 달려

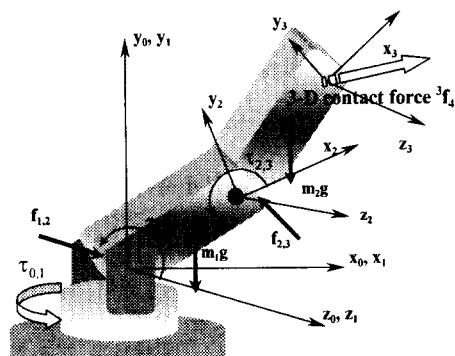


Fig. 1 Static force and torque balance for a type 3 3-link robot manipulator

있는 말단장치이다. 3 차원 상에서 다음과 같은 가정을 통한 단순한 그리퍼로서 고려된 말단장치를 고려한다. 말단장치가 링크에 비하여 무시할 수 있는 질량을 갖을 경우 말단장치는 질량이 없는 링크로 고려될 수 있다. 그리고 이때의 로봇과 작업 대상물과의 접촉에 의해서 발생하는 힘은 그리퍼에 물려있는 물체의 중심에서 발생한다고 가정하여 접촉힘을 추정하게 된다. 이 가정을 토대로 말단장치가 고려된 정적, 동적 평형방정식을 이용하여 로봇 매니퓰레이터를 모델링 할 수 있다.

4.2 힘센서 좌표계로의 변환

지금까지 추정된 접촉힘은 말단장치의 끝에서 발생되는 힘이다. 그러나 실제로 힘 센서는 Fig. 4 와 같이 로봇의 손목에 부착되므로 우리가 추정한 힘을 검증하기 위하여 손목에 있는 힘 센서 좌표계의 힘/모멘트로 변환해야 한다. 이것은 간단한 자코비안(Jacobian)행렬에 의해서 수행이 되며 텁끌과 힘 센서 사이의 변위의 관계는 다음과 같은 자코비안행렬로 나타낼 수 있다. 그럼에서 $\theta_{end-effector}$ 는 마지막 링크에서 본 말단장치의 변위이며, θ_{3e}' 는 절대 좌표계에서 본 말단장치의 변위를 나타낸다.

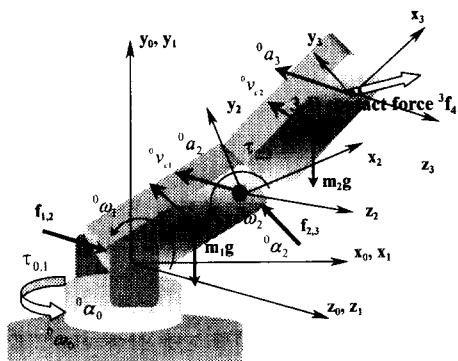


Fig. 2 Dynamics of a type 3 3-link robot manipulator

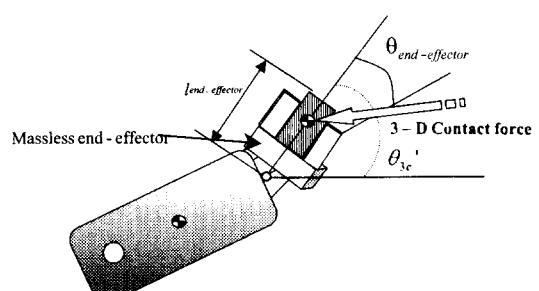


Fig. 3 Massless end-effector

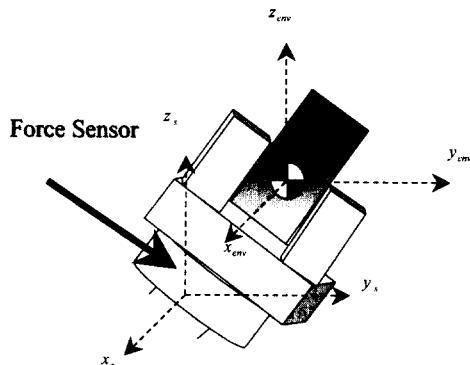


Fig. 4 Transformation to force/moment in 3-D force sensor coordinate

$$d_{\text{force sensor}} = \mathbf{J} d_{\text{environment}} \quad (8)$$

여기서,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} I(3 \times 3) & -y & 0 & z \\ 0 & x & -z & 0 \\ 0 & y & x & 0 \\ 0(3 \times 3) & I(3 \times 3) \end{bmatrix} \quad (9)$$

그리고 외부 접촉힘/모멘트와 힘 센서에서의 힘/모멘트 관계는 다음식과 같다.

$$F_{\text{environment}} = \mathbf{J}^T F_{\text{forcesensor}} \quad (10)$$

그러므로 우리가 추정한 힘은 힘센서의 힘/모멘트로 변환할 수 있다. 여기서 우리는 접촉힘만을 추정하므로 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$F_{\text{forcesensor}} = (\mathbf{J}^T)^{-1} F_{\text{environment}} \quad (11)$$

식 (11)을 통하여 우리가 추정한 접촉힘을 힘 센서와 비교하여 검증할 수 있게 된다.

5. 접촉힘 모니터링

5.1 EKF(Extended Kalman Filter)⁽⁸⁾를 이용한 접촉힘 추정

앞에서 구한 여러 가지 로봇 매니퓰레이터의 모델링을 통해 EKF를 설계하여 로봇과 작업 대상물과의 접촉힘 정보를 얻고자 한다. 그러므로 앞 장에서 구한 모델식을 이용하여 다음과 같은 EKF를 설계한다.

$$\begin{aligned} x_k &= f(x_{A,k-1}, u_{k-1}, k-1) + w_k \\ y_k &= h(x_{A,k}, u_k, k) + v_k \end{aligned} \quad (12)$$

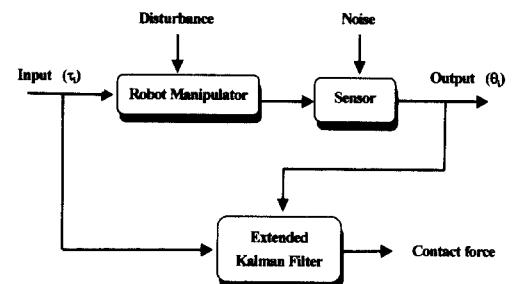


Fig. 5 Block diagram of the contact force monitoring system

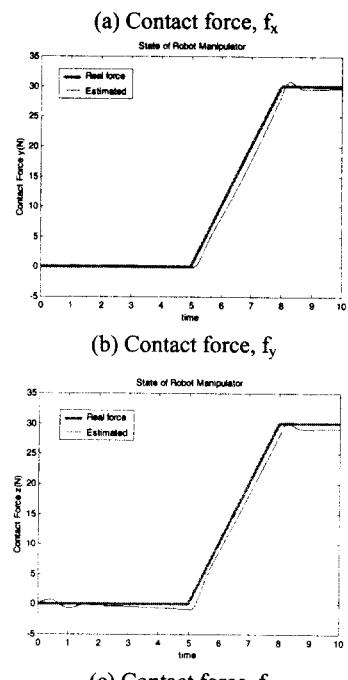
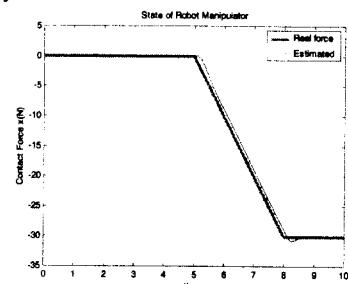


Fig. 6 The result of contact force estimation in 2-D

여기서 x_k, y_k 는 제 3 형 3 링크 로봇 매니퓰레이터의 경우 다음과 같이 주어지며

$$\begin{aligned} x_k &= [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ f_x \ f_y \ f_z]^T \\ y_k &= [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T \end{aligned} \quad (13)$$

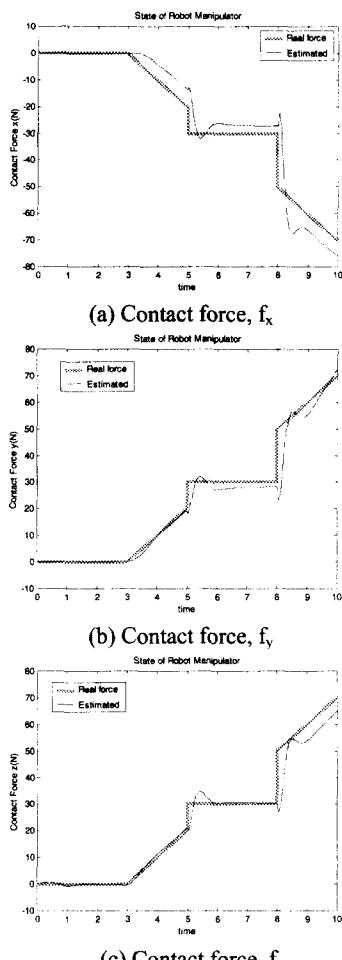


Fig. 7 The result of contact force estimation considered end-effector

상태변수는 각 링크의 변위와 속도, 로봇과 외부환경과의 접촉힘을 나타내고 출력벡터는 각 링크의 변위로 하였다. $w_k \sim N(0, Q_k)$, $v_k \sim N(0, R_k)$ 는 각각 플랜트 섭동과 센서 잡음을 나타낸다. 접촉힘을 추정하기 위한 방식은 Fig. 5 와 같이 구성하였다. 여기서, Robot Manipulator 블록은 3 장에서 구한 로봇 매니퓰레이터의 모델식으로 실제 플랜트의 역할을 하게 된다. 또한 입력 값인 모터 토크의 값은 편의상 모터 전류와 모터 토크 상수로부터 알 수 있다고 가정한다.

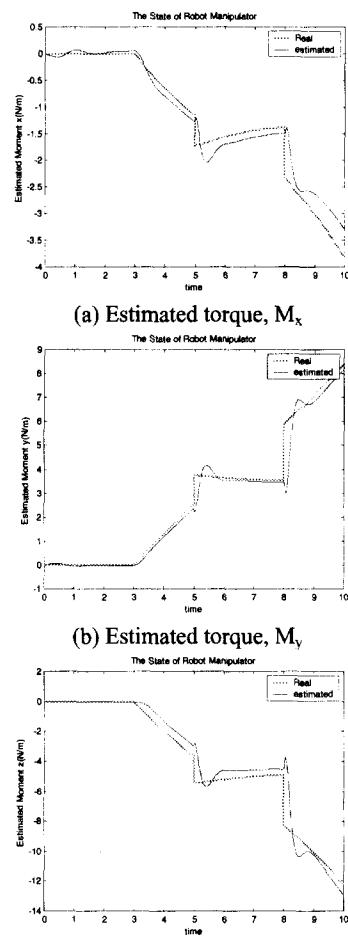


Fig. 8 Estimated torque in 3-D force sensor coordinate

6. 시뮬레이션 결과

지금까지 구한 로봇 모델식과 힘 추정기를 사용하여 로봇과 외부환경 사이에 발생하는 접촉힘을 추정하였으며 그 결과는 다음과 같다.

6.1 접촉힘 추정결과

로봇과 외부환경과의 접촉힘이 3 차원상에서 5초이후에 발생했을 경우 추정한 결과가 Fig. 6에 비교되어 있다. 이때 모터제어를 위하여 PD 제어기를 사용했으며 추정한 결과는 약간의 시간지연과 오버슈트를 제외하고는 실제값과 거의 일치함을 볼 수 있다.

6.2 말단장치를 고려한 접촉힘 추정 결과

3 차원상에서 말단장치를 고려한 접촉힘 추정 결과를 Fig. 7에 나타내었다. 로봇의 운동 중 3초이후에 다단계의 접촉힘이 발생했다고 가정하였으며 추정 성능은 약간의 시간 지연과 오버슈트를 보이지만 발생하는 접촉힘을 잘 추정함을 볼 수 있다.

6.3 힘 센서의 좌표계로의 변환

추정된 접촉힘으로부터 실제 값과의 비교를 위하여 텁 끝의 힘을 힘 센서의 힘/토크 값으로 변환하였다. Fig. 8은 추정된 손목에서의 토크 값이다.

7. 결 론

3 차원 공간상에서 발생하는 접촉힘을 추정하기 위하여 제 3 형 3 링크 로봇 매니퓰레이터의 정적, 동적 그리고 접촉힘과 각 링크에서 발생하는 외란 토크와의 관계를 모델링하여 로봇과 작업 대상을 간에 발생하는 접촉힘을 센서를 사용하지 않고 이 모델식을 바탕으로 한 Extended Kalman Filter를 설계하여 외부환경과의 접촉힘을 추정하였다. 또한, 실제로 접촉이 일어나는 말단장치 고려한 접촉힘도 추정하였다. 말단장치를 고려한 접촉힘의 경우도 모두 우수한 추정성능을 보였고 실제 힘 센서와의 비교를 위하여 힘 센서가 부착된 손목의 힘/모멘트로 변환하였다.

추정된 접촉힘은 대부분 좋은 추정 성능을 보이나 약간의 시간지연과 오버슈트가 발생하는 것을 볼 수 있었다. 본 연구를 통해서 추정된 3 차원 접촉 힘/토크 정보를 이용하면 보다 정밀한 로봇 제어 기술에 잘 활용될 것이다.

후 기

본 논문은 1998년도 한국학술진흥재단의 연구비 지원으로 이루어졌습니다. 감사합니다.

참고문헌

- (1) Kaneko, K., Ohnishi, K. and Komoriya, K., 1994, "Design Method for Manipulator Control Based on Disturbance Observer," *Proceedings of IEEE Int. Con. On Intelligent Robots and System*, Vol. 2, pp. 1405~1412.
- (2) Eom, K.S., Suh, I.H., Chung, W.K. and Oh, S.R., 1998, "Disturbance Observer Based Force Control of Robot Manipulator Without Force Sensor," *Proceedings Of IEEE int. Con. on Robotics and Automation*, Vol. 4, pp. 3012~3017.
- (3) Huang, H.P. and Tzeng, W.L., 1989, "Robotic Force Control by Using Estimated Contact Force,"

Proceedings of IEEE conference on Decision and Control, Vol. 3, pp. 2158~2163.

- (4) Hacksel, P.J. and Salcudean, S.E., 1994, "Estimation of Environment Force and Rigid-Body Velocities using Observer," *Proceedings Of IEEE int. Con. on Robotics and Automation*, pp. 931~936.
- (5) Bona, B. and Indri, M., 1998, "Analysis and Implementation of Observers of for Robotic Manipulators," *Proceedings of IEEE Int. Con. On Robotics & Automation*, pp. 3006~3011.
- (6) 허건수, 이종욱, 2000, "확장된 칼만필터를 이용한 2축 로봇 매니퓰레이터의 접촉힘 추정," 한국공작기계학회, 추계학술대회논문집, pp. 14~19.
- (7) Grewal, M.S and Andrew, A.P., 1993, *Kalman Filtering theory and practice*, 1st ed., Prentice Hall.
- (8) McKerrow, P.J., 1995, *Introduction to Robotics*, 1st ed., Addison Wesley.

부 록

로봇 매니퓰레이터의 정적, 동적 평형 방정식을 결합하고 이것을 Lagrange 동역학을 이용하여 각 링크의 길이와 변위로 나타나면 다음과 같이 방정식이 얻어지게 된다.

$$\begin{aligned} {}^0\tau_{1,2}(\hat{\theta}) = & \ddot{\theta}_1(m_1L_2^2C_2^2 + m_3(2L_3C_2C_{23} + L_3^2C_{23}^2) + I_2 + I_3) + \\ & \ddot{\theta}_3(0.5m_3L_2L_3C_2S_{23}S_1) - 2m_3L_2^2C_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 0.5m_3L_2L_3C_2C_{23}S_1\dot{\theta}_2^2 \\ & - m_3[(2L_3^2C_{23}S_{23}\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + 2L_3L_3(S_2C_{23} + C_2S_{23})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ & + 2L_3L_3C_2S_{23}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3] - L_2C_2S_1{}^0f_{3,4x} + L_2C_2C_1{}^0f_{3,4x} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} {}^0\tau_{1,2}(\hat{k}) = & \ddot{\theta}_2(m_1L_2^2 + m_3L_3^2 + 2m_3L_2L_3C_3 + I_2 + I_3) \\ & \ddot{\theta}_3(m_1L_2^2 + m_3L_2L_3C_3 - 0.5m_3L_2L_3(C_2S_{23} + S_2S_{23}) + I_3) \\ & + m_3L_2^2C_2S_1\dot{\theta}_1^2 + 0.5m_3L_2L_3(C_2S_{23}C_1 - S_2C_{23})\dot{\theta}_2^2 \\ & - m_3L_2L_3S_1\dot{\theta}_3(2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - m_3[(2L_3^2C_{23}S_{23} + L_3L_3(S_2C_{23} + C_2S_{23}))\dot{\theta}_1^2 \\ & - L_2C_2C_1{}^0f_{3,4x} + L_2S_1{}^0f_{3,4x}] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} {}^0\tau_{2,3}(\hat{k}) = & \ddot{\theta}_2(m_1L_2^2 + m_3L_2L_3C_3 + I_2) + \ddot{\theta}_3(m_1L_2^2 + I_3) \\ & + 2m_3L_2L_3S_1\dot{\theta}_2^2 + m_3L_2^2C_{23}S_{23} + L_3L_3(S_2C_{23} + C_2S_{23})\dot{\theta}_1^2 \\ & + L_3C_{23}C_1{}^0f_{3,4x} - L_3S_1{}^0f_{3,4x} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서

${}^0f_{3,4x}$: 로봇과 외부환경과의 3 차원상에 서의 접촉힘
m_n	: 각 링크의 질량
L_n	: 각 링크의 길이
$\dot{\theta}_n$: 각 링크의 각속도
$\ddot{\theta}_n$: 각 링크의 각속도
I_n	: 각 링크의 관성 모멘트
C_n, S_n	: $\cos\theta_n, \sin\theta_n$