위상만을 이용한 신호복원의 유일성 판단법

論 文
50D - 2 - 1

Uniqueness Criteria for Signal Reconstruction from Phase-Only Data

李 東 旭* · 金 英 台**
(Dong-Wook Lee · Young Tae Kim)

Abstract - In this paper, we propose an alternate method for determining the uniqueness of the reconstruction of a complex sequence from its phase. Uniqueness constraints could be derived in terms of the zeros of a complex polynomial defined by the DFT of the sequence. However, rooting of complex polynomials of high order is a very difficult problem. Instead of finding zeros of a complex polynomial, the proposed uniqueness criteria show that non-singularity of a matrix can guarantee the uniqueness of the reconstruction of a complex sequence from its phase-only data. It has clear advantage over the rooting method in numerical stability and computational time.

Key Words : phase-only reconstruction, uniqueness, non-singularity

1. 서 론

시간영역 혹은 주파수영역에서 신호의 부분적인 정보를 이용하여, 원래의 신호를 복원하거나 신호의 특성을 예측하는 기법들은 많은 학자들에 의해서 연구되어왔다[1][2][3]. 그러나 매우 특별한 경우를 제외한 일반적인 경우에 있어서 신호의 부분적인 정보로부터 원래의 신호를 복원하는 것은 거의 불가능한 일이다. 그 예로서 신호를 주파수영역에서 해석하는 경우에 많이 사용되는 방법 중의 하나인 푸리에변환을 살펴보자. 주파수영역에서 푸리에변환의 크기와 위상은 서로 독립적인 정보를 지니기 때문에, 크기 혹은 위상 정보만을 가지고 원래의 신호를 복원할 수는 없다는 것을 알게 된다. 그러나, 특별한 조건을 만족하는 몇몇 경우에 있어서는 신호의 부분적인 정보로부터 원래의 신호를 복원하는 것이 가능할 때가 있다. 여러 가지 예가 있지만 그 중에서 대표적인 것만을 몇 가지 살펴보기로 하자. 우선, 신호가 최소위상(minimum phase)조건을 만족하는 경우에 푸리에변환의 크기와 위상은 서로 독립적이지 않게 된다. 크기와 위상은 힐버트 변환(Hilbert transform)의 관계를 가지게 된다[4]. 이런 경우에는 크기 혹은 위상 정보만을 이용하여 원래의 신호를 복원할 수 있다. 또한, 신호를 주파수영역에서 관찰했을 때 신호의 밴드폭이 제한된 경우에도 신호의 일부분만을 가지고 전체의 신호를 반복적인 기법을 이용하여 복원하는 것이 가능하게 된다[1]. 주파수영역에서 신호의 밴드폭 제한과 비슷한 개념으로 시간영역에서 신호의 영역이 제한된 경우에도 푸리에 변환의 크기 혹은 위상 정보만을 가지고 다차원 이산시간 실수 신호를 복원하는 것이 가능하게 되고 여러 가지 기법들이 매우 활발히 연구되었다[2][3]. 신호의 부분적인 정보를 이용하여 원래의 신호를 복원하는 방법 중 하나로 복소 신호의 위상만을 이용하여 원 신호를 복원함으로써 신호의 다중 주파수를 추정하는 새로운 기법이 [5]에 소개되어 있다. 복소 신호의 위상만을 사용하여 다중 주파수를 추정하는 기법은 일반적으로 사용되는 A/D 변환기들을 이용하는 것보다 구조가 간단하고 구현이 용이하다는 장점이 있다. 위상만을 이용한 복원 방법은 신호의 밴드폭이 제한된 경우에 적용이 가능하고, 신호를 유일하게 복원하기 위해서는 제한조건을 반드시 만족하여야 하는데, 이러한 조건의 만족 여부를 판단하기가 그리 간단한 문제가 아니다. 제한조건의 만족 여부를 판단하기 위해서는 신호의 DFT값으로부터 형성된 복소 다항식의 근을 구해야하는데, 고차의 복소 다항식의 근을 구하는 것은 대단히 힘들다[6][7][8]. 일반적으로 5차 이상 다항식의 근을 구하는 것은 비 선형적인 문제가 되므로 근을 구하기 위해서는 수치 해석적인 기법을 사용해야만 하는데, 대단히 복잡하고 계산시간도 많이 걸린다. 일반적으로, 수치해석을 이용하지 않고는 4차 이상 다항식의 해를 구하는 것은 불가능하다.

본 논문에서는 복소 다항식의 해를 구하지 않고, 신호복원의 유일성을 판단하는 방법을 소개한다. 이 방법은 푸리에변환의 위상만을 이용한 신호복원의 유일성 문제를 다루는 기법과 쌍대성의 관계를 갖는다[9]. 위에서 언급한 방법과 같이 신호복원의 유일성을 판단하기 위하여 복잡한 복소다항식의 근을 구하는 대신에, 신호의 DFT 값으로 구성된 행렬이 비정칙(singular)인지 정칙(non-singular)인지를 결정함으로써 복원된 신호의 유일성을 판단하게 된다.

* 正 會 員 : 東國大 工大 電氣工學科 副敎授
** 正 會 員 : 東國大 工大 電氣工學科 敎授
接受日字 : 2000年 10月 20日
最終完了 : 2001年 1月 18日

2. 위상만을 이용한 신호 복원의 유일성

복소 신호의 위상만을 가지고 신호를 복원하는 경우에 있어서 해결해야할 중요한 문제중의 하나는 복원된 신호의 유일성을 보장하는 것이다. 왜냐하면 복원되는 신호가 유일하지 않고, 여러 가지가 생길 수 있다면 신호 복원 자체가 무의미해지기 때문이다. 이미 [5]에서 보고된 바와 같이 복소 신호의 밴드폭이 제한되어 있고, 위상이 과샘플링된 경우에 복소 신호를 유일하게 복원할 수 있다. 보다 구체적으로 설명하면 복소 신호 $x(n)$과 $y(n)$의 위상을 각각 $\phi_x(n)$과 $\phi_y(n)$이라고 하면 다음과 같은 유일성 정리가 성립한다.

유일성 정리[5] 복소 신호 $x(n)$의 M-점 DFT변환인 $X(\omega_k)$가 구간 $0 \le k \le N-1$의 밖에서는 값이 영이라고 하자. 또한 $X(\omega_0) \neq 0$이고 $M \ge 2N-1$인 조건을 만족한다고 가정하자. 복소 신호 $y(n)$의 M-점 DFT변환인 $Y(\omega_k)$도 $X(\omega_k)$와 마찬가지로 구간 $0 \le k \le N-1$의 밖에서는 값이 영이라고 하자. 다음과 같은 $N-1$차 다항식을 정의한다.

$$x^P(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{N-1} X(\omega_k) z^k.$$

여기서 $x(n) = x^P(e^{j2\pi n/M})$이 된다. 만일 $x^P(z)$와 $x^{P*}(1/z*)$가 공통 영점을 가지지 않고, $\phi_x(n) = \phi_y(n)$이 $n = 0, 1, \ldots, M-1$에 대해서 성립한다면, 임의의 양의 상수 β에 대해서 $X(\omega_k) = \beta Y(\omega_k)$ 혹은 $x(n) = \beta y(n)$이 성립한다.

위의 정리에서와 같은 조건이 성립하면, 복소 신호는 위상신호로부터 유일하게 복원이 가능하다. 물론 여기서 말하는 유일성은 엄밀한 의미의 유일함을 뜻하지는 않는다. 왜냐하면, 임의의 양의상수 β가 존재하기 때문이다. [5]에서는 이러한 유일성 조건이 만족하는 경우에 적용 가능한 두 가지의 복원 기법을 소개하고 있다. 하나는 Least-Squares Inversion을 이용한 방법이고, 또 다른 하나는 반복적인 Fourier Reconstruction을 이용한 방법이다. 여기서 마지막으로 주목해야할 것이 유일성을 보장하는 조건, 즉 다항식 $x^P(z)$의 근에 관한 것이다. 이미 언급한 것과 마찬가지로 다항식의 차수가 높아지게 되면 다항식의 근을 구하는 것이 대단히 어려운 비선형 문제가 되고, 복잡한 수치해석을 통해서 문제를 해결해야 된다는 사실이다.

3. 행렬의 정칙성(non-singularity)을 이용한 유일성 판단

위상만을 이용한 복원기법에서 유일성을 판단하기 위해서는 반드시 고차의 복소 다항식의 근을 구해야 하는데, 이러한 근을 구하는 과정은 다항식의 차수가 고차가 되면 대단히 어려운 문제가 된다. 따라서 본 절에서는 복잡한 고차의 복소 다항식을 풀지 않고도 복원된 신호의 유일성을 판단하는 방법을 소개한다.

먼저 복소 신호 $x(n)$의 M-점 DFT변환인 $X(\omega_k)$가 구간 $0 \le k \le N-1$의 밖에서는 값이 영이라고 하자. 다시 말하면, 복소 신호 $x(n)$의 밴드폭이 제한되어 있다고 하자. 또한 $X(\omega_0) \neq 0$이고 $M \ge 2N-1$인 조건을 만족한다고 한다고 하면, IDFT변환을 이용하여 $x(n)$을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{N-1} X(\omega_k) e^{j\frac{2\pi nk}{M}}. \tag{1}$$

이 식에서 주의할 점은 합의 상한이 $M-1$에서 $N-1$로 바뀌었다는 것이다. 왜냐하면 $k = N, N+1, \cdots, M-1$에서 $X(\omega_k) = 0$이라고 가정을 했기 때문이다. 여기서 $x(n)$을 극좌표 형식으로 표현하면, $x(n)$은 다음과 같이 크기와 위상으로 나타낼 수 있다.

$$x(n) = |x(n)| e^{j\phi_x(n)}. \tag{2}$$

주파수 영역에서 $X(\omega_k)$역시 복소수의 형태이고, 따라서 실수부와 허수부로 나누어 표현될 수 있다. 즉

$$X(\omega_k) = X_R(\omega_k) + jX_I(\omega_k). \tag{3}$$

위의 세 개의 관계식으로부터, 우리는 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$|x(n)| e^{j\phi_x(n)} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{N-1} (X_R(\omega_k) + jX_I(\omega_k)) e^{j\frac{2\pi nk}{M}}. \tag{4}$$

그러면, 식 (4)에서 위상 $\phi_x(n)$는 다음의 관계를 만족한다.

$$\tan\phi_x(n)=\frac{\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_I(\omega_k)\cos\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)+X_R(\omega_k)\sin\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right)}{\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_R(\omega_k)\cos\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)-X_I(\omega_k)\sin\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right)} \tag{5}$$

유일성의 문제를 고려하기 위하여, 앞 절의 유일성 정리에서의 조건과 마찬가지로 또 다른 복소 신호 $y(n)$의 밴드폭이 제한되어 있다고 가정하자. 즉 복소 신호 $y(n)$의 M-점 DFT변환인 $Y(\omega_k)$가 구간 $0\le k\le N-1$의 밖에서는 값이 존재하지 않는다고 가정한다.

$x(n)$ 과 마찬가지로 $y(n)$ 에 대하여 위의 일련의 과정을 반복하면 $y(n)$의 위상 $\phi_y(n)$에 관한 식은 $x(n)$의 위상 $\phi_x(n)$에 관한 식과 거의 동일한 형태를 갖는다. 따라서 $n=0,1,\cdots,M-1$에 대하여 위상 $\phi_y(n)$는 다음의 관계식을 만족한다.

$$\tan\phi_y(n)=\frac{\sum_{k=0}^{N-1}\left(Y_I(\omega_k)\cos\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)+Y_R(\omega_k)\sin\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right)}{\sum_{k=0}^{N-1}\left(Y_R(\omega_k)\cos\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)-Y_I(\omega_k)\sin\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right)} \tag{6}$$

여기서 $k=0,1,\cdots,N-1$에 대하여 $Y_R(\omega_k)$와 $Y_I(\omega_k)$는 각각 $y(n)$의 M-점 DFT변환 값의 실수 부와 허수 부이다. 위상만을 이용하여 신호를 복원하는 경우에 복원될 신호 $y(0)$, $y(1)$, $\cdots$, $y(M-1)$ 역시 밴드폭이 제한된 신호가 된다.

우리가 고려할 유일성의 문제란 동일한 위상으로부터 서로 다른 신호가 복원 가능한지를 판단하는 것이다. 즉 두 신호 $x(n)$, $y(n)$ 의 위상이 서로 같다고 했을 때, 과연 서로 다른 신호가 존재하는 지를 알아보도록 하자. 먼저 동일한 위상이라고 하는 조건으로부터 우리가 사용하는 관계식은

$$\tan\phi_x(n)=\tan\phi_y(n). \tag{7}$$

이다. 식 (5)와 (6)을 사용하여 식 (7)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_I(\omega_k)\cos\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)+X_R(\omega_k)\sin\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right)}{\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_R(\omega_k)\cos\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)-X_I(\omega_k)\sin\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right)}=\frac{\sum_{k=0}^{N-1}\left(Y_I(\omega_k)\cos\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)+Y_R(\omega_k)\sin\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right)}{\sum_{k=0}^{N-1}\left(Y_R(\omega_k)\cos\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)-Y_I(\omega_k)\sin\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right)} \tag{8}$$

따라서

$$\begin{aligned}&\left[X_R(\omega_0)+\sum_{k=1}^{N-1}\left(X_R(\omega_k)\cos\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right.\right.\\&\left.\left.-X_I(\omega_k)\sin\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right)\right]\cdot\\&\left[\sum_{k=0}^{N-1}Y_I(\omega_k)\cos\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right.\\&\left.+Y_R(\omega_k)\sin\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right]=\\&\left[X_I(\omega_0)+\sum_{k=1}^{N-1}\left(X_I(\omega_k)\cos\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right.\right.\\&\left.\left.+X_R(\omega_k)\sin\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right)\right]\\&\cdot\left[\sum_{k=0}^{N-1}Y_R(\omega_k)\cos\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right.\\&\left.-Y_I(\omega_k)\sin\left(\frac{2\pi nk}{M}\right)\right]\end{aligned} \tag{9}$$

이 된다. 위의 수식의 좌변을 우변으로 옮기면 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned}&-X_R(\omega_0)\left[\sum_{l=0}^{N-1}Y_I(\omega_l)\cos\left(\frac{2\pi nl}{M}\right)+\right.\\&\left.Y_R(\omega_l)\sin\left(\frac{2\pi nl}{M}\right)\right]\\&+\sum_{k=1}^{N-1}X_R(\omega_k)\sum_{l=0}^{N-1}\left(Y_R(\omega_l)\sin\left(\frac{2\pi n(k-l)}{M}\right)\right)\\&-\sum_{k=1}^{N-1}X_R(\omega_k)\sum_{l=0}^{N-1}\left(Y_I(\omega_l)\cos\left(\frac{2\pi n(k-l)}{M}\right)\right)\\&+X_I(\omega_0)\left[\sum_{l=0}^{N-1}Y_R(\omega_l)\cos\left(\frac{2\pi nl}{M}\right)\right.\\&\left.-Y_I(\omega_l)\sin\left(\frac{2\pi nl}{M}\right)\right]\\&+\sum_{k=1}^{N-1}X_I(\omega_k)\sum_{l=0}^{N-1}\left(Y_R(\omega_l)\cos\left(\frac{2\pi n(k-l)}{M}\right)\right)\\&-\sum_{k=1}^{N-1}X_I(\omega_k)\sum_{l=0}^{N-1}\left(Y_I(\omega_l)\sin\left(\frac{2\pi n(k-l)}{M}\right)\right)\\&=0\qquad\text{for}\quad n=0,1,\cdots,M-1\end{aligned} \tag{10}$$

위의 수식의 표현이 너무 복잡하므로 이를 간단히 표시하기 위하여 다음과 같이 행렬 S_n, X, Y를 정의한다.

$$S_n=\begin{bmatrix} \sin\left(\frac{0}{M}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{M}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{2\pi(M-1)}{M}\right) \\ \sin\left(\frac{0}{M}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{M}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{4\pi(M-1)}{M}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin\left(\frac{0}{M}\right) & \sin\left(\frac{2\pi(N-1)}{M}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{2\pi(M-1)(N-1)}{M}\right) \\ \cos\left(\frac{0}{M}\right) & \cos\left(\frac{0}{M}\right) & \cdots & \cos\left(\frac{0}{M}\right) \\ \cos\left(\frac{0}{M}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{M}\right) & \cdots & \cos\left(\frac{2\pi(M-1)}{M}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos\left(\frac{0}{M}\right) & \cos\left(\frac{2\pi(N-1)}{M}\right) & \cdots & \cos\left(\frac{2\pi(M-1)(N-1)}{M}\right) \end{bmatrix}_{(2N-1)\times M}$$

$$X^T=[X_R(\omega_1), X_R(\omega_2), \cdots, X_R(\omega_{N-1}), X_I(\omega_0), X_I(\omega_1), \cdots, X_I(\omega_{N-1})]_{1\times 2N-1}$$

$$Y^T=[Y_R(\omega_1), Y_R(\omega_2), \cdots, Y_R(\omega_{N-1}), Y_I(\omega_0), Y_I(\omega_1), \cdots, Y_I(\omega_{N-1})]_{1\times 2N-1}$$

수식에서 T는 행렬의 전치를 나타낸다. 여기서 주목할 점은 $X_R(\omega_0)$와 $Y_R(\omega_0)$은 위의 두 벡터의 정의에 포함되지 않았다는 것이다. $M\geq 2N-1$이라는 가정으로부터, S_n의 열들은 서로 독립적이다[10]. 위의 정의들을 이용하여 식 (10)을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$S_n^T\begin{bmatrix} B_{Y_R} & C_{Y_I} \\ -Y_I(\omega_1), \cdots, -Y_I(\omega_{N-1}) & Y_R(\omega_0), \cdots, Y_R(\omega_{N-1}) \\ B_{Y_I} & C_{Y_R} \end{bmatrix}^T X = X_R(\omega_0) S_n^T Y \tag{11}$$

여기서 B_{Y_R}와 C_{Y_I}는 다음과 같이 정의된다.

$$B_{Y_R}=\begin{bmatrix} Y_R(\omega_0) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ Y_R(\omega_1) & Y_R(\omega_0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ Y_R(\omega_{N-3}) & \cdots & \cdots & Y_R(\omega_0) & 0 \\ Y_R(\omega_{N-2}) & Y_R(\omega_{N-3}) & \cdots & \cdots & Y_R(\omega_0) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} Y_R(\omega_2) & Y_R(\omega_3) & \cdots & Y_R(\omega_{N-1}) & 0 \\ Y_R(\omega_3) & \cdots & Y_R(\omega_{N-1}) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_R(\omega_{N-1}) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{Y_I}=\begin{bmatrix} Y_I(\omega_1) & Y_I(\omega_0) & 0 & \cdots & 0 \\ Y_I(\omega_2) & Y_I(\omega_1) & Y_I(\omega_0) & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ Y_I(\omega_{N-2}) & \cdots & \cdots & Y_I(\omega_0) & 0 \\ Y_I(\omega_{N-1}) & Y_I(\omega_{N-2}) & \cdots & \cdots & Y_I(\omega_0) \end{bmatrix}$$
$$-\begin{bmatrix} 0 & Y_I(\omega_2) & \cdots & Y_I(\omega_{N-1}) & 0 \\ 0 & \vdots & Y_I(\omega_{N-1}) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & Y_I(\omega_{N-1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

또한 B_{Y_I} 는 B_{Y_R}과 동일한 형태를 가지는데 단지 Y_R 대신에 Y_I를 사용하면 된다. 마찬가지로, C_{Y_R}의 구조는 C_{Y_I}의 구조와 일치하고 Y_I 자리에 Y_R이 들어간다. 식 (11)을 좀더 간단히 표현하면 다음과 같다.

$$S_n^T(P^T X - X_R(\omega_0)Y)=0 \tag{12}$$

여기서 P 는 다음과 같이 정의된다.

$$P=\begin{bmatrix} B_{Y_R} & C_{Y_I} \\ -Y_I(\omega_1), \cdots, -Y_I(\omega_{N-1}) & Y_R(\omega_0), \cdots, Y_R(\omega_{N-1}) \\ B_{Y_I} & C_{Y_R} \end{bmatrix}$$

S_n이 full rank라는 사실을 이용하면

$$P^T X = X_R(\omega_0) Y. \tag{13}$$

이 성립한다. 위의 행렬 식은 X에 대하여 선형이고, 직접 $X=(X_R(\omega_0)/Y_R(\omega_0))Y$를 식 (13)에 대입해보면 식이 성립함을 알 수 있다. 식이 다소 복잡하므로 이해를 돕기 위해서 식 (13)의 좌변에 $X=(X_R(\omega_0)/Y_R(\omega_0))Y$를 대입하여 그 결과가 우변과 같음을 몇 개의 항에 대해서 설명해보도록 하겠다. 우선 행렬 P를 위의 정의를 이용하여 처음 몇 열을 자세히 쓰면 다음과 같음을 알 수 있다.

$$P=\begin{bmatrix} Y_R(\omega_0)-Y_R(\omega_2) & -Y_R(\omega_3) & \cdots & \cdots \\ Y_R(\omega_1)-Y_R(\omega_3) & Y_R(\omega_0)-Y_R(\omega_4) & \cdots & \cdots \\ Y_R(\omega_2)-Y_R(\omega_4) & Y_R(\omega_1)-Y_R(\omega_5) & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_R(\omega_{N-3})-Y_R(\omega_{N-1}) & Y_R(\omega_{N-4}) & \cdots & \cdots \\ Y_R(\omega_{N-2}) & Y_R(\omega_{N-3}) & \cdots & \cdots \\ -Y_I(\omega_1) & -Y_I(\omega_2) & \cdots & \cdots \\ Y_I(\omega_0)-Y_I(\omega_2) & -Y_I(\omega_3) & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_I(\omega_{N-2}) & Y_I(\omega_{N-3}) & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

위의 행렬 P의 전치행렬 P^T와 $(X_R(\omega_0)/Y_R(\omega_0))Y$

를 곱해보도록 하자. 우선 P^T 의 첫 번째 열과 $(X_R(\omega_0)/Y_R(\omega_0))Y$를 곱하면

$$\frac{X_R(\omega_0)}{Y_R(\omega_0)}[Y_R(\omega_1)(Y_R(\omega_0)-Y_R(\omega_2))+ Y_R(\omega_2)(Y_R(\omega_1)-Y_R(\omega_3)) + Y_R(\omega_3)(Y_R(\omega_2)-Y_R(\omega_4)) + \cdots + Y_R(\omega_{N-1})(Y_R(\omega_{N-2})) + Y_I(\omega_0)(-Y_I(\omega_1)) + Y_I(\omega_1)(Y_I(\omega_0)-Y_I(\omega_2)) + \cdots + Y_I(\omega_{N-1})(Y_I(\omega_{N-2}))]$$
$$= X_R(\omega_0)Y_R(\omega_1)$$

이 된다. 같은 요령으로 P^T 의 두 번째 열과 $(X_R(\omega_0)/Y_R(\omega_0))Y$를 곱하면 그 결과는 $X_R(\omega_0)Y_R(\omega_2)$가 된다. 이상의 과정을 반복하면 $X=(X_R(\omega_0)/Y_R(\omega_0))Y$이 식 (13)의 해가 됨을 알 수 있다.

만일 행렬 P가 정칙행렬이면, 우리는 유일한 해를 갖게 되고 그 해는 다음과 같게 된다.

$$X=\frac{X_R(\omega_0)}{Y_R(\omega_0)}Y$$

따라서 동일한 위상으로부터 복원된 두 신호는 단순한 scale factor의 차이가 있을 뿐, 서로 일치하게 된다. 하지만, 행렬 P가 정칙행렬이 아니면, 해는 유일하지 않게 된다. 즉 복소신호의 위상만을 이용하여 신호를 유일하게 복원할 수는 없다.

3. 결 론

본 논문에서는 복소 신호의 위상만을 이용하여 원래의 신호를 복원할 때 다루어야하는 유일성 판단기법을 소개했다. 기존의 유일성 판단기법은 신호의 DFT값으로부터 형성된 복소 다항식의 근을 구하는 과정이 필요한 데, 이러한 과정은 대단히 복잡하고 계산시간이 많이 소요되는 단점이 있다. 일반적으로 5차 이상 다항식의 근을 구하는 것은 비 선형적인 문제가 되므로 근을 구하기 위해서는 계산을 많이 필요로 하는 반복적인 해석기법등을 이용하여야 하고, 때에 따라서는 근을 구하지 못하는 경우도 발생할 수 있다. 일반적으로, 수치해석을 이용하지 않고는 4차 이상 다항식의 해를 구하는 것은 거의 불가능하다. 본 논문에서 제시한 방법은 복소 다항식의 해를 구하지 않고 신호복원의 유일성을 판단하는 것으로, 신호의 DFT 값으로 구성된 행렬 P가 비정칙인지 정칙인지를 판단하여 유일성을 결정하게 된다. 행렬 P의 정칙성을 판단하기 위해서는 단지 매우 기본적인 행렬변환들이 필요하게 된다. 따라서 행렬 P의 계수(rank)를 결정하는 데 소요되는 시간과 노력은 고차의 복소 다항식의 근을 구하는 것에 비하여 대단히 적게 소요된다.

감사의 글

본 연구는 동국대학교 논문게재연구비 지원으로 이루어졌음.

참 고 문 헌

[1] A. Papoulis, "A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation," *IEEE Transactions on Circuits and Systems,* vol. 22, no. 9, pp. 735-742, September 1975.
[2] M. H. Hayes, J. S. Lim, and A. V. Oppenheim, "Signal reconstruction from phase or magnitude," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing,* vol. 28, no. 6, pp. 672-680, December 1980.
[3] M. H. Hayes, "The reconstruction of a multidimensional sequence from the phase or magnitude of its Fourier transform," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing,* vol. 30, no. 2, pp. 140-154, April 1982.
[4] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing,* Prentice Hall, 1989.
[5] D. Lee and J. H. McClellan, "Extracting multiple frequencies from phase-only data," *IEEE Trans. AES,* vol. 33, no. 3, pp. 795-801, July 1997.
[6] A. S. Householder, *The Numerical Treatment of a Single Nonlinear Equation,* McGraw-Hill, 1970.
[7] M. J. Maron, *Numerical Analysis,* Macmillan, 1987.
[8] W. S. McCormick and J. S. Lansford, "Efficient parallel rooting of complex polynomials on the unit circle," *IEEE Trans. Signal Processing,* vol. 39, no. 10, pp. 2347-2351, October 1991.
[9] C. Ma, "Novel criteria of uniqueness for signal reconstruction from phase," *IEEE Trans. Signal Processing,* vol. 39, no. 4, pp. 989-992, April 1991.
[10] J. R. Rice, *The Approximation of Functions,* vol. 1., Addison-Wesley, 1964.

저 자 소 개

이 동 욱 (李 東 旭)

1960년 10월 2일 생. 1983년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1985년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1992년 미국 조지아 공대 전기공학과 졸업(공박). 1992년～1993년 삼성데이타 시스템(주) 선임연구원. 1993년～현재 동국대 공대 전기공학과 부교수.

Tel : 02-2260-3350, Fax : 02-2267-6967

E-mail : dlee@dgu.edu

김 영 태 (金 英 台)

1949년 9월 16일 생. 1973년 서강대 전자공학과 졸업. 1986년 미국 University of New Mexico 전기공학과 졸업(공박). 1975년～ 1980년 국방과학 연구소 연구원. 1986년～1988년 미국 Saint Louis University 전기공학과 조교수. 1989년～현재 동국대 공대 전기공학과 교수.

Tel : 02-2260-3349, Fax : 02-2260-3349

E-mail : youngtae@dgu.edu