

# 정밀 직선구동 액츄에이터의 스틱슬립 마찰 모형화 및 성능특성 비교

김상채\*, 김수현\*\*

## Stick-slip Friction Modeling and Performance Comparison of a Precise Linear Actuator

Sang-Chae Kim\*, and Soo Hyun Kim\*\*

### ABSTRACT

In general, precise linear actuators using piezoelectric element are driven by friction force. Exact understanding of friction plays an important role in analysis and control of a motor. In this research, we designed a precise linear actuator using piezoelectric elements and observed its dynamic characteristics. By varying phase angle difference and amplitudes of the sinusoidal waves that are driving inputs, we can know that it is possible to control moving direction and distance of the slider. As preload is increased, its moving distance is decreased. And also, we have modeled a precise linear actuator using stick slip friction models such as classical, Karnopp, and reset integrator. Finally, by comparing the results of simulation and experiment, it was verified that the model is well designed.

**Key Words:** Precise Linear Actuator (정밀 직선구동 액츄에이터), Stick-slip (스티크슬립), Friction Model (마찰 모델), Piezoelectric Element (압전소자)

### 1. 서론

빠른 응답 특성과 컴팩트한 구조설계가 가능한 장점으로 많은 위치결정장치에 압전소자가 이용되어지고 있다. 주사전자현미경(STM)과 같이 구동 거리가 미소한 경우는 압전소자 자체의 발생변위로 요구정밀도와 구동영역을 만족시킬 수 있다. 그러나, 큰 구동거리가 필요한 장치에 적용할 때에는 별도의 구조와 구동방식이 고려되어야 한다. 이러한 이유로 구동영역의 한계를 극복할 수 있는 다양한 형태의 액츄에이터가 개발되고 있다. 대표적인 형태를 살펴보면, K. Uchino<sup>(1)</sup>는 압전소자로

굽쇠형의 탄성체를 가진시키는 공진형 직선구동 액츄에이터를 개발하였다. 굽쇠의 두 다리 부분에서 발생하는 서로 상이한 타원 궤적 운동에 의해 직선구동이 가능해진다. T. Higuchi<sup>(2)</sup>는 압전소자의 급속 신장에 따른 관성력과 마찰력을 직선구동 장치에 이용하였으며, A. Endo<sup>(3)</sup>는 두개의 압전소자로 진동 궤적을 생성시키는 방법으로 액츄에이터를 구현하였다. 이상의 액츄에이터들은 광범위한 구동영역을 얻기 위해 공통적으로 마찰구동 방식을 사용하였다. 그러나, 구동 핵심인 마찰 특성을 고려한 동특성 해석은 미진한 상태로 추가적인 연구가 수행되어져야 한다.

\* 삼성중합기술원

\*\* 한국과학기술원 기계공학과

압전소자를 사용한 마찰력 구동 액츄에이터에서 지속 영역의 마찰은 스틱슬립(stick-slip) 현상으로 대변할 수 있다. 상대속도 0 근처에서 발생하는 비선형성과 수치해석적인 문제점을 해결하기 위해서 스틱슬립 마찰 모델 개발에 관한 연구가 행해져 왔다<sup>(4,6)</sup>. 이러한 모델들은 시스템의 특성 예측, 제어, 그리고 보상에 이용할 수 있다. 대표적으로 G.W. Younkin<sup>(7)</sup>은 공구 이송 서보드라이브, J.H. Chin<sup>(8)</sup>은 절삭가공의 동특성을 예측하기 위해 적용하였고, S.C. Southward<sup>(9)</sup>와 S. Yang<sup>(10)</sup>은 마찰력 보상과 정밀 위치 제어에 이용하였다. 이상의 스틱슬립 모델의 적용은 시스템의 운동 질량체가 하나이거나 구동 신호 및 조건이 매우 단순한 경우에 국한되어져 왔다.

본 논문에서는 압전소자의 왕복적인 변위 발생으로 두 질량체가 상호작용하게 됨으로써 구동되는 정밀 직선구동 액츄에이터를 제시하고자 한다. 또한, 3 가지의 스틱슬립 마찰 모델을 적용하여 액츄에이터의 이론적인 모형을 세웠으며, 수직력과 수평력을 변하게 만드는 여러가지 구동 신호와 예압(preload)의 조건에서 실험 및 해석을 수행하였다. 이러한 해석 및 실험 결과를 비교함으로써 모형화에 대한 타당성을 검증하고자 한다.

정밀 직선구동 액츄에이터는 두 질량체에 의해 발생하는 마찰력에 의해 구동된다. 일반적으로 마찰력에 의해 구동되는 액츄에이터의 경우 수직력의 값이 일정하다고 볼 때 질량체 사이의 마찰력은 일정하게 된다. 그러나, 본 액츄에이터의 경우는 수직력이 시간에 따라 변화하게 되며, 이에 따라 질량체들의 접촉면에서의 마찰력이 변화하게 되는 것이다. 특히, 구동 질량체가 왕복운동을 하게 됨으로써 속도가 0 이 되는 상태가 반복적으로 존재하게 되므로 스틱슬립 상태를 유발하게 된다. 이상의 이유로 마찰력의 대소관계 및 스틱슬립 조건에 의해서 직선구동 액츄에이터의 이동특성은 달라지게 된다. 이러한 특성에 기반한 이론적인 연구 및 해석은 본 액츄에이터의 성능 향상 및 개선에 기여할 수 있을 것이다.

## 2. 정밀 직선구동 액츄에이터의 모형화

### 2.1 구조

정밀 직선구동 액츄에이터는 Fig. 1 과 같이 수

직으로 배치된 압전소자와 구동선단(driving tip)을 포함한 가동부와 슬라이더(slider)의 구동부로 구성된다. 이용된 2개의 적층형 압전소자는 전압 100V 을 가하면 6.5  $\mu\text{m}$ 의 변위가 발생된다. 가동부에는 압전소자의 원활한 변위 발생을 위해 탄성힌지를 적용하였다. 그리고, 예압을 측정하기 위한 로드셀(loadcell)을 사용하였다. 구동부에는 건성피막 윤활제인 불소수지(PTFE)를 코팅하여 슬라이더 상하면의 마찰계수를 다르게 하였다. 구동선단 및 탄성힌지와 압전소자의 부착은 에폭시(Epoxy resin)를 사용하였다.

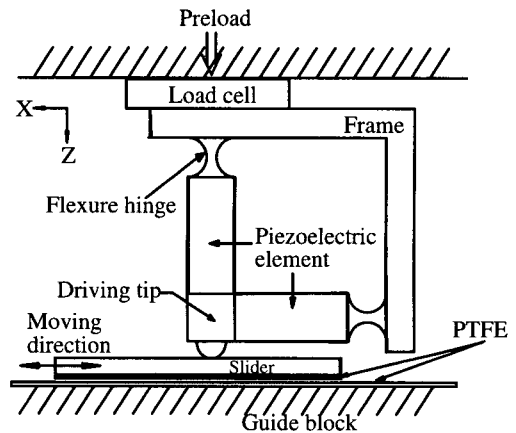


Fig. 1 A precise linear actuator

구동선단은 두 압전소자의 변위 합성으로 생성되는 궤적 운동을 하게 된다. 이로 인해 슬라이더와 구동선단 사이에서 마찰력이 발생하게 된다. 이때 슬라이더 상하면에서의 마찰력이 다른 크기를 갖도록 하는 것이 본 액츄에이터의 핵심 구동 원리이다. 구동선단과 슬라이더는 초기에 예압에 의해 서로 반력을 가지고 접촉되어 있다. 따라서, 구동선단 궤적의 수직방향 변위 성분은 슬라이더에 수직력을 가하는 역할을 하게 된다.

### 2.2 운동 방정식

동특성 해석을 위한 직선구동 액츄에이터의 모형을 Fig. 2 에 도시하였다. 등가 스프링( $K_p$ )과 감쇠계수( $C_p$ )는 압전소자를 모형화한 것이다.  $\Delta L_a(t)$ ,  $\Delta L_b(t)$  는 구동선단이 자유단(free end) 상태 일 때 수평, 수직 방향 압전소자의 신장길이를

나타낸다. 질량이  $m_l$ ,  $m_s$  인 구동선단과 슬라이더에 대한 운동 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} m_l \ddot{x}_l &= F_a - F_r \\ m_s \ddot{x}_s &= F_r - F_s \end{aligned} \quad (1)$$

윗 식에서  $F_a$ 는 수평 압전소자가 구동선단에 가하는 힘을 나타내며, 식(2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$F_a = -K_p(x_l - \Delta L_a(t)) - C_p(\dot{x}_l - \dot{\Delta L}_a(t)) \quad (2)$$

식(1)에서  $F_r$ ,  $F_s$ 는 구동선단과 슬라이더 사이, 슬라이더와 가이드블록 사이의 마찰력을 의미한다. 슬라이더 상하면에서 발생하는 수직 반력  $N^u$ 와  $N^l$ 은 식(3)과 같다.  $F_p$ 는 수직 방향의 예압이며, 윗 첨자  $u$ ,  $l$ 은 각각 슬라이더 상하면을 뜻한다.

$$\begin{aligned} N^u &= F_p + \frac{K_p \cdot K_l}{K_p + K_l} \Delta L_b(t) + C_p \Delta \dot{L}_b(t) \\ N^l &= F_p + \frac{K_p \cdot K_l}{K_p + K_l} \Delta L_b(t) + C_p \Delta \dot{L}_b(t) + m_s g \end{aligned} \quad (3)$$

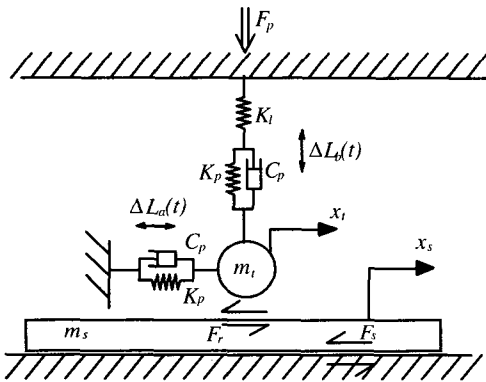


Fig. 2 Dynamic model of a precise linear actuator

식(3)에서 압전소자 변위 발생에 대한 수직 반력  $N^u$ 와  $N^l$ 은 구동 중에 변화하게 된다.  $K_l$ 은 예압을 측정하기 위한 로드셀의 강성을 나타낸다.

직선구동 액추에이터의 동특성을 파악하기 위해서는 마찰력  $F_r$ 과  $F_s$ 를 계산하여야 한다. 이는 저속 영역에서 강한 비선형성을 동반하는 스틱슬립 마찰 모델을 적용함으로써 구할 수 있게 된다.

### 3. 동특성 해석 및 실험

#### 3.1 스틱슬립 모델

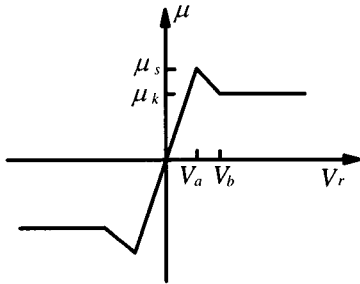
직선구동 액추에이터는 구동선단의 왕복운동으로 인해 이동 질량체의 속도가 매우 급격하게 변화한다. 상대속도 0 부근의 비선형 마찰로 인한 수치해석적인 구현 및 불연속성의 문제를 해결하려는 목적으로 다양한 스틱슬립 모델이 제시되었다. 대표적으로 classical, Karnopp, 그리고 reset integrator 모델을 들 수 있다. 슬라이더 표면에 코팅된 건조 마찰 상태로 점성이 없다는 가정하에 이상의 모델들을 본 정밀 직선구동 액추에이터에 적용하였다.

Fig. 3(a)는 3 개의 상대속도에 구간에 따라 마찰계수가 달라지는 classical 모델이다. 일반적으로 수직 반력이 일정하다는 조건에서 상기의 그래프는 속도에 대한 마찰력의 함수로 표현한다. 그러나, 본 액추에이터에서는 구동 중에 수직 반력이 변화하게 되므로 Fig. 3에 마찰력 대신에 마찰계수로 표현하였다.  $\mu_s$ ,  $\mu_k$ 는 최대 정지마찰계수와 동마찰계수를 의미한다. 슬라이더의 속도  $\dot{x}_s$ 와 구동선단과의 상대속도  $V_r (= \dot{x}_l - \dot{x}_s)$ 에 의해 마찰계수가 결정되며, 식(3)에서 계산되는 수직 반력과의 곱에 의해 마찰력  $F_s$ 와  $F_r$ 가 계산된다. 이 모델은 속도가 0을 지나는 직선으로 불연속을 해결하였다. 그러나, 최대 정지 마찰보다 외력이 작을 경우에도 이동체가 움직이게 되는 단점을 내포하고 있다.

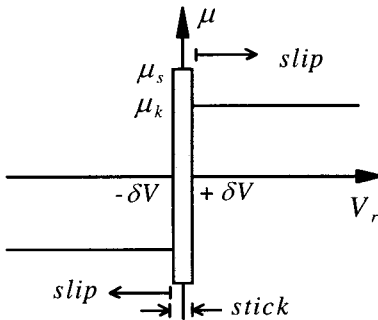
다음은 Fig. 3(b)처럼 상대 속도의 절대값 크기에 따라 스틱과 슬립 구간으로 구분하는 방법으로 Karnopp에 의해 제시되었다<sup>(4)</sup>. 스틱 구간에서는 상호 작용하는 질량체의 힘 평형에 의해 마찰력이 결정되며, 슬립 구간에서의 마찰력은 상대속도의 함수가 된다. 특히, 이 모델은 스틱의 정마찰력과 슬립의 쿨롱 마찰 사이의 불연속을 허용하는 특징이 있다. 또한, 상대속도에 따라 슬립과 스틱 상황을 구분해서 운동방정식을 유도 및 적용해야 한다. 본 액추에이터는 2 개의 질량체를 가지므로 4 가지의 운동 방정식이 필요하게 된다. Table 1은 각각의 경우에 대한 마찰력  $F_r$ 과  $F_s$ 를 나타내고 있다.

마지막으로 스틱 영역에서의 마찰력을 접촉 질량체 사이의 상대속도가 아닌 정의된 결합변위 ( $p$ )에 의해 결정하는 reset integrator 방법으로 Fig.

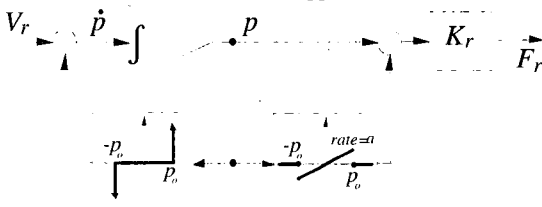
3(c)에 도시하였다<sup>(6)</sup>. 마찰 모델의 입력인 상대속도와 비선형 블록과 식(4)에 의해 마찰력  $F_r$  과  $F_s$  를 구할 수 있게 된다.



(a) Classical



(b) Karnopp



(c) Reset integrator

Fig. 3 Stick-slip friction model

$$\dot{p} = \begin{cases} V_r > 0 \& p \geq P_0 \\ \text{or} \\ V_r < 0 \& p \leq -P_0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\dot{p} = V_r, \text{ else}$$

Table 1 Friction force according to stick-slip in the Karnopp model

	$ V_r  \leq \delta V$ (stick)	$ V_r  > \delta V$ (slip)
$ \dot{x}_s  \leq \delta V$ (stick)	$F_r = F_s = F_a$	$F_r = F_s = \mu_k^u N^u \text{sgn}(V_r)$
$ \dot{x}_s  > \delta V$ (slip)	$F_r = \frac{m_s}{m_i + m_s} F_a$ $+ \frac{m_i}{m_i + m_s} \mu_k^l N^l \text{sgn}(\dot{x}_s)$ $F_s = \mu_k^l N^l \text{sgn}(\dot{x}_s)$	$F_r = \mu_k^u N^u \text{sgn}(V_r)$ $F_s = \mu_k^l N^l \text{sgn}(\dot{x}_s)$

### 3.2 동특성 수치해석 및 실험

직선구동 액츄에이터의 구성은 PC 에서 파형을 생성한 후 D/A 변환기 및 고전압 증폭기를 통해 압전소자에 인가하게 된다. 전압증폭기로는 APEX 사의 PA88(Power OP Amp.)을 적용하여 제작하였다. 슬라이더의 이동변위 측정에는 Keyence 사의 분해능 0.05μm 의 laser displacement 장비와 디지털 오실로스코프를 사용하였다. 그리고, 수직 방향의 예압은 CAS 사의 S-Bending Loadcell 을 이용하여 측정하였다.

액츄에이터 특성 실험에는 구동 입력으로 주파수 300Hz, 전압 변화폭이 60V, 80V 인 정현파를 사용하였다. 이때의 발생 변위는 식(5)와 같고, 60V, 80V 각각에 대한 진폭  $D$  와 오프셋  $D_o$  는 1.95, 2.6 μm이다.  $\theta$  는 두 구동 신호의 상대적인 위상각 차이를 나타내며, 구동 중에는 일정한 값을 가진다. 위상각 차이  $\theta$  는 단위 주기 동안 구동선단으로부터 슬라이더에 가해지는 수직력의 변화 형태를 결정하게 된다. 초기에 슬라이더에는 수직 방향으로 일정한 예압이 가해진다.

$$\Delta L_a(t) = D \sin(2\pi ft - \pi/2) + D_o \quad (5)$$

$$\Delta L_b(t) = D \sin(2\pi ft - \pi/2 + \theta) + D_o$$

3.1 절의 스틱슬립 마찰 모델들을 본 액츄에이터의 운동방정식에 적용하였다. 수치해석에 사용되는 액츄에이터의 물성치는 Table 2 와 같고, 각각의 마찰 모델 상수값은 Table 3 에 나타내었다. Fig. 4 는 위상차가 75°인 경우에 대해 3 가지 스틱슬립 모델을 적용하여 구동 형태, 속도, 그리고 마찰력의 변화를 해석하였다. Fig. 4(a)에서 구동선단은 입

력 신호에 상응하는 반복적인 정현파 운동을 함을 볼 수 있다. 이에 반해 슬라이더는 스틱슬립 현상에 의해 누적된 변위를 이동함을 알 수 있다. 3가지 마찰 모델 모두 스틱슬립 현상을 잘 구현함을 볼 수 있다. Fig. 4(b, c)는 슬라이더 상하면에서 발생하는 상대속도( $V_r, \dot{x}_s$ )와 마찰력( $F_r, F_s$ )의 관계를 나타낸다. 이 그림에서 3가지 모델 모두에서 비슷한 형태를 보임을 알 수 있었다. Fig. 4(c)의 슬라이더 이동 속도를 살펴보면 특히 classical과 Karnopp의 경우에 속도가 0인 스틱 현상을 잘 나타냄을 알 수 있었다. Classical 모델의 경우에는 Fig. 3(a)의 속도  $V_a$ 과  $V_b$  사이의 Stribeck 효과 영역에 의해 스틱슬립 현상을 잘 구현해 준다. 또한, Karnopp 모델은 상대속도의 절대값이 일정한 크기 ( $\delta V$ ) 안에 들어오면 스틱 상태로 간주함으로써 스틱 현상을 잘 표현하게 된다.

Table 2 System parameter used in simulation

$K_p$ [N/m]	$1.313 \times 10^8$	$m_r$ [g]	2.95	$\mu_s^u$	0.27
$C_p$ [N-sec/m]	$2 \times 10^2$	$m_s$ [g]	7.20	$\mu_k^l$	0.10
$K_l$ [N/m]	$2.359 \times 10^5$	$\mu_s^l$	0.15	$\mu_k^u$	0.18

Table 3 Friction model parameter

	Parameter	driving tip	Slider
Classical	$V_a$ [m/sec]	$1 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-5}$
	$V_b$ [m/sec]	$2 \times 10^{-5}$	$2 \times 10^{-5}$
Karnopp	$\delta V$ [m/sec]	$1 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-5}$
Reset integrator	$p_0$ [m]	$1 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^{-8}$

위상차를 변화시키면서 60V, 80V의 구동 전압 폭에 대해 슬라이더의 운동 상태를 실험적으로 조사한 결과는 Fig. 5와 같다. 위상차에 따라 이동 특성이 다양하게 변화되었다. 수치해석에 의한 결과인 Fig. 4의 운동 상태와 비교해 보면 거의 유사한 운동특성을 보임을 알 수 있다. 구동 신호의 위상차에 따라 슬라이더의 이동이 달라지며, 한 주기당 이동 거리도 변화함을 알 수 있었다. 이상의 결과로부터 구동 신호 2개의 위상차는 슬라이더 구동에 영향을 미치는 중요한 변수임을 확인할 수 있었다.

$\theta$ 가 15°씩 변화함에 따른 20 주기 후의 이동 거리를 Fig. 6과 같이 도시하였다. 실험 결과에 의하면 위상차가 290°~160° 범위에서 진진 운동이 발생되며, 위상차가 변함에 따른 총 이동거리도 변화함을 볼 수 있었다. 그리고, 구동 전압 폭이 80V인 경우가 60V에 비해 최대 이동거리가 더 큼을 알 수 있다. 이는 구동 전압 폭을 줄이면 압전소자의 발생 변위가 감소하기 때문이다. 수치해석을 통한 세가지 모델의 예측은 실험 결과와 유사한 방향성과 이동거리 특성을 보여주었다. 이러한 결과는 구동 신호의 위상차와 전압폭을 조절하면 슬라이더의 진행 방향과 분해능을 조절할 수 있음을 의미한다. 일반적인 초정밀 위치결정 메커니즘의 경우 속도와 분해능 두가지 특성을 만족시키기 위해 듀얼스테이지 방식을 사용한다. 다시말하면, 저속의 고분해능 위치기구와 고속의 저분해능의 위치기구를 병행하여 사용하는 것이다. 본 액츄에이터의 경우 구동신호의 주파수, 위상차, 전압폭을 조절함으로써 위치제어 분야에서 고분해능과 고속의 위치결정에 유용하게 활용될 수 있을 것이다.

이상의 실험과 수치해석은 슬라이더에 0.5N의 일정한 예압을 가한 경우이다. 상이한 예압 조건에서의 구동특성을 Fig. 7에 도시하였다. 예압의 크기가 증가함에 따라 이동 거리가 감소하다가 0.2N 이상이 되면 거의 변화가 없음을 볼 수 있다. 수치해석의 결과 역시 비슷한 특성을 보였다. 예압이 0인 근처에서 이동 거리가 급격히 증가했다. 이는 구동선단과 슬라이더가 서로 접촉 되어있지 않는 상태로 구동선단이 진진하면서 슬라이더를 진행 방향 쪽으로 밀고, 후진할 때는 슬라이더에서 분리되기 때문이다. 그러나, 외란에 따른 안정성 문제로 일정한 예압이 직선구동 액츄에이터에



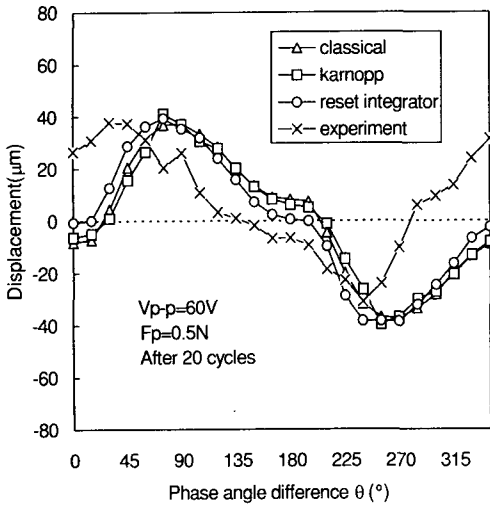


Fig. 6 The effect of phase angle difference to the moving displacement of the slider

항상 존재하여야 한다. 실험과 수치해석의 두 결과에서 0.5N의 예압 상태의 경우는 슬라이더의 이동 거리가 일치함을 확인할 수 있다. 이러한 결과는 0.5N의 예압 조건에서 구한 마찰계수를 예압을 달리 했을 경우에도 적용했기 때문이다. B. Armstrong에 따르면, 수직력이 변함에 따라 마찰계수가 영향을 받는다고 하였다<sup>(11)</sup>. 구동 중에 수직력이 변화하는 본 액츄에이터는 수직력에 따른 마찰계수의 영향에 대한 연구에 적합한 시스템

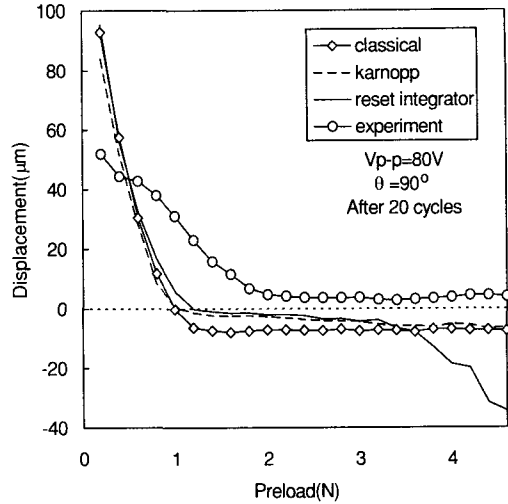


Fig. 7 The effect of preload on the moving displacement

로 응용될 수 있을 것이다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 압전소자를 이용한 정밀 직선 구동 액츄에이터를 제시하였으며, 모형화를 통한 해석적인 방법과 실험에 의해 동특성을 조사하였다. 이상의 연구 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 구동 신호인 정현파의 위상차, 구동 전압 폭에 따른 이동 방향과 단위 주기당 이동거리의 변화 특성을 조사하였다. 이들을 조절하면 정밀한 개루프 위치 제어가 가능하다.

(2) 스틱슬립 마찰모델인 classical, Karnopp, 그리고 reset integrator 방법을 적용한 해석과 실험 결과를 비교함으로써 운동방정식이 정성적으로 액츄에이터의 동특성을 잘 표현해 줌을 볼 수 있었다.

(3) 예압의 변화에 따른 구동특성 실험에서 마찰계수가 수직력의 영향을 받음을 간접적으로 확인할 수 있었다.

#### 후기

본 연구는 한국과학재단의 특정목적기초연구(과제번호 94-0200-09-02-3)의 일부로 수행되었으며, 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

1. Kenji Uchino, Koichiro Kato and Masayuki Tohda, "Ultrasonic Linear Motor Using a Multilayered Piezoelectric Actuator," *Ferroelectrics*, Vol. 87, pp. 331-334, 1988.
2. Toshiro Higuchi, Masahiro Watanabe, Kenichi Kudou, "Precise Positioner Utilizing Rapid Deformations of a Piezoelectric Elements," *JSPE*, Vol. 11, No. 54, pp. 2107-2112, 1988.
3. A. Endo, N. Sasaki and Y. Tomikawa, "Linear Type Ultrasonic Motor Using Two Dimensionally Positioned Piezoelectric Elements," *Ferroelectrics*, Vol. 112, pp. 165-170, 1990.
4. Dean Karnopp, "Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems," *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 107, pp.100-103, 1985.
5. P.J. Kolston, "Modeling Mechanical Stick-Slip Friction Using Electrical Circuit Analysis," *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 110, pp.440-443, 1988.
6. D.A. Haessig, Jr, B. Friedland, "On the Modeling and Simulation of Friction," *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 113, pp. 354-362, 1991.
7. G.W. YOUNKIN, "Modeling Machine Tool Feed Servo Drive Using Simulation Technique to Predict Performance," *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 27, No.2, pp. 268-274, 1991.
8. J.H. Chin, C.C. Chen, "A Study of Stick-Slip Motion and Its Influence on the Cutting Process," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 35, No. 5, pp. 353-370, 1993.
9. S.C. Southward, C.J. Radcliffe, and C.R. Maccluer, "Robust Nonlinear Stick-Slip Friction Compensation," *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 113, pp. 113-645, 1991.
10. S. Yang, M. Tomizuka, "Adaptive Pulse Width Control for Precise Positioning under the Influence of Stiction and Coulomb Friction," *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 110, pp. 221-227, 1988.
11. B. Armstrong-Helouvry et al., "A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction," *Automatica*, Vol. 30, No. 7, pp. 1083-1138, 1994.