

구형 공동 그린함수의 효율적인 계산 방법

Efficient Calculation Method of the Green's Function for the Rectangular Cavity

박 면 주

Myun-Joo Park

요 약

본 논문에서는 구형 공동의 포텐셜 그린함수를 효율적으로 계산할 수 있는 기법을 제시하였다. 일반적으로 매우 느리게 수렴하는 구형 공동 그린함수에 Ewald합 기법을 적용함으로써 매우 빠르게 수렴하는 두 급수의 합으로 그린함수를 변환하였다. 그 결과 매우 적은 수의 계산항만 사용한 경우에도 충분히 수렴하는 정확한 결과를 얻을 수 있다.

Abstract

This paper presents an efficient method of calculation for the potential Green's function in the rectangular cavities. This method converts the slowly convergent Green's function into the sum of two, rapidly convergent series through the application of the Ewald sum technique. As a result, accurate, fast convergent results are obtained with only small number of calculated terms.

I. 서 론

마이크로파 분야에서 각종 결합기(coupler), 필터, 안테나 등에 널리 이용되는 구형 공동 구조를 적분 방정식 - 모멘트법을 이용하여 해석하기 위해서는 이 구조에 대한 그린함수가 필요하다. 구형 공동에 대한 그린 함수는 여러 가지 형태로 표현될 수 있으나, 모두 매우 느리게 수렴하는 무한급수 형태로 나타나게 된다. 따라서 이를 수치적으로 정확히 계산하는데 많은 시간이 소요되게 되어 전체 수치해석의 효율을 크게 떨어뜨리는 단점이 있어 왔다. 따라서 구형 공동 그린함수를 빠르고 정확하게 계산하려는 기법들에 대한 연구가 다양하게 시도되었다 [1]~[3].

먼저 Wu^[1] 등은 유한 Poisson 변환을 이용하여

전기적으로 매우 큰 공동의 그린함수를 효과적으로 계산할 수 있는 방법을 제안하였다. 또한 Liang^[2] 등은 Kummer의 급수변환과 Poisson 합 공식을 적용한 구형 공동 그린함수의 가속화 기법을 제시하였다. 한편 Richards^[3] 등은 전기벽과 자기벽이 혼합된 구형 도파관 내부에 전원이 주기적으로 분포하는 경우에 대한 포텐셜 그린함수를 효율적으로 계산할 수 있는 방법을 제안하였으며, 이 방법은 구형 공동의 문제에도 유사하게 적용될 수 있다.

본 논문에서는 주기적인 그린함수의 계산에 효율적으로 이용될 수 있는 Ewald합 기법^[4]을 이용하여 구형 공동의 포텐셜 그린함수를 빠르게 계산할 수 있는 방법을 제안한다. 구형 공동의 포텐셜 그린함수에 Ewald합 기법을 적용함으로써, 공간영역과 스펙트럴 영역 등 두 개 급수의 합으로 변환하였다.

삼성전자(Samsung Electronic Company)

· 논문 번호 : 20001121-136

· 수정완료일자 : 2000년 12월 30일

이 두 급수의 각 항들은 각각 상보오차함수 및 지수함수로 가중된 형태로 나타나며, 이에 따라 항의 수가 늘어남에 따라 매우 빠르게 수렴하게 된다. 따라서 수치계산시 매우 적은 수의 항만 계산하여도 충분히 정확한 결과를 얻을 수 있다.

II. 이 론

구형 도파관 내에서의 자기 및 전기 벡터 포텐셜 그린함수는 다음과 같은 dyadic 형태로 나타낼 수 있다.

$$\vec{G}_F = \hat{x}\hat{x}G_{Fxx} + \hat{y}\hat{y}G_{Fyy} + \hat{z}\hat{z}G_{Fzz} \quad (1)$$

$$\vec{G}_A = \hat{x}\hat{x}G_{Axx} + \hat{y}\hat{y}G_{Ayy} + \hat{z}\hat{z}G_{Azz} \quad (2)$$

구형 공동 포텐셜 그린함수를 나타내는 가장 쉬운 방법은 영상(image)정리를 이용한 방법이다. 그림 1에 나타난 구형 공동 구조와 좌표계를 사용하였을 때, 구형 공동의 각 벽에 의한 영상을 생각하면 다음과 같은 구형 공동 그린함수 전개식을 얻을 수 있다.

$$G_{Axx} = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^7 A_i^{xx} \frac{e^{-jkR_{i,mnp}}}{R_{i,mnp}} \quad (3a)$$

$$G_{Ayy} = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^7 A_i^{yy} \frac{e^{-jkR_{i,mnp}}}{R_{i,mnp}} \quad (3b)$$

$$G_{Azz} = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^7 A_i^{zz} \frac{e^{-jkR_{i,mnp}}}{R_{i,mnp}} \quad (3c)$$

$$G_{Fxx} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^7 F_i^{xx} \frac{e^{-jkR_{i,mnp}}}{R_{i,mnp}} \quad (4a)$$

$$G_{Fyy} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^7 F_i^{yy} \frac{e^{-jkR_{i,mnp}}}{R_{i,mnp}} \quad (4b)$$

$$G_{Fzz} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^7 F_i^{zz} \frac{e^{-jkR_{i,mnp}}}{R_{i,mnp}} \quad (4c)$$

$$R_{0,mnp} = \sqrt{X_{0m}^2 + Y_{0n}^2 + Z_{0p}^2}$$

$$R_{1,mnp} = \sqrt{X_{1m}^2 + Y_{0n}^2 + Z_{1p}^2}$$

$$R_{2,mnp} = \sqrt{X_{0m}^2 + Y_{1n}^2 + Z_{0p}^2}$$

$$R_{3,mnp} = \sqrt{X_{1m}^2 + Y_{1n}^2 + Z_{1p}^2}$$

$$R_{4,mnp} = \sqrt{X_{1m}^2 + Y_{0n}^2 + Z_{0p}^2}$$

$$R_{5,mnp} = \sqrt{X_{1m}^2 + Y_{0n}^2 + Z_{1p}^2}$$

$$R_{6,mnp} = \sqrt{X_{1m}^2 + Y_{1n}^2 + Z_{0p}^2}$$

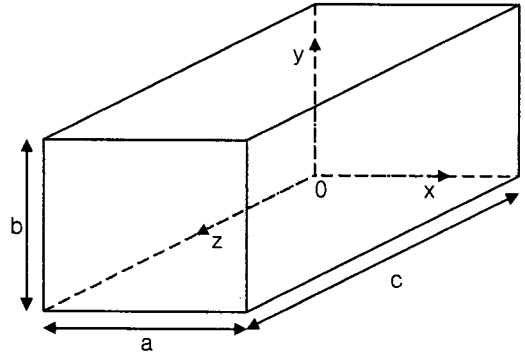


그림 1. 구형 공동 및 그 좌표계

Fig. 1. Rectangular cavity and the coordinate system.

$$R_{7,mnp} = \sqrt{X_{1m}^2 + Y_{1n}^2 + Z_{1p}^2}$$

$$X_{0m} = x - x' + 2ma, \quad Y_{0n} = y - y' + 2nb$$

$$Z_{0p} = z - z' + 2pc, \quad X_{1m} = x + x' + 2ma$$

$$Y_{1n} = y + y' + 2nb, \quad Z_{1p} = z + z' + 2pc$$

$$A_i^{xx} = \begin{cases} +1, & i=0, 3, 4, 7 \\ -1, & i=1, 2, 5, 6 \end{cases}$$

$$A_i^{yy} = \begin{cases} +1, & i=0, 2, 5, 7 \\ -1, & i=1, 3, 4, 6 \end{cases}$$

$$A_i^{zz} = \begin{cases} +1, & i=0, 1, 6, 7 \\ -1, & i=2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

$$F_i^{xx} = \begin{cases} +1, & i=0, 1, 2, 3 \\ -1, & i=4, 5, 6, 7 \end{cases}$$

$$F_i^{yy} = \begin{cases} +1, & i=0, 1, 4, 5 \\ -1, & i=2, 3, 6, 7 \end{cases}$$

$$F_i^{zz} = \begin{cases} +1, & i=0, 2, 4, 6 \\ -1, & i=1, 3, 5, 7 \end{cases}$$

위의 식들에서 a, b 및 c 는 각각 구형 공동의 x, y, z 방향 치수이며, 공동의 내부영역이 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ 가 되도록 좌표축을 설정하였다(그림 1).

이제 위 식 (3), (4)의 그린함수 급수에 Poisson 합 공식을 적용하면 구형 공동 그린함수를 모드전개에 의한 스펙트럴 영역의 표현식으로 변환할 수 있다.

$$G_{Axx} = \frac{\mu}{abc} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_p}{\alpha_{mnp}^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x'}{a} \times \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y'}{b} \sin \frac{p\pi z}{c} \sin \frac{p\pi z'}{c} \quad (5a)$$

$$G_{Ayy} = \frac{\mu}{abc} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_p}{\alpha_{mnp}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x'}{a} \times$$

$$\cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n\pi y'}{b} \sin \frac{p\pi z}{c} \sin \frac{p\pi z'}{c} \quad (5b)$$

$$G_{Axx} = \frac{\mu}{abc} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_p}{\alpha_{mnp}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x'}{a} \times \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y'}{b} \cos \frac{p\pi z}{c} \cos \frac{p\pi z'}{c} \quad (5c)$$

$$G_{Fxx} = \frac{1}{\epsilon abc} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_p}{\alpha_{mnp}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x'}{a} \times \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n\pi y'}{b} \cos \frac{p\pi z}{c} \cos \frac{p\pi z'}{c} \quad (6a)$$

$$G_{Fyy} = \frac{1}{\epsilon abc} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_p}{\alpha_{mnp}^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x'}{a} \times \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y'}{b} \cos \frac{p\pi z}{c} \cos \frac{p\pi z'}{c} \quad (6b)$$

$$G_{Fzz} = \frac{1}{\epsilon abc} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_p}{\alpha_{mnp}^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x'}{a} \times \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n\pi y'}{b} \sin \frac{p\pi z}{c} \sin \frac{p\pi z'}{c} \quad (6c)$$

$$\alpha_{mnp}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2 - k^2,$$

$$\epsilon_i = \begin{cases} 1, & i=0 \\ 2, & i \neq 0 \end{cases} \quad : \text{Neumann number}$$

위의 그린함수 급수들의 형태를 자세히 살펴보면, 구형 공동 그린함수는 자유공간에서의 3차원 주기적인 전원분포에 의한 주기적인 포텐셜 함수의 합으로 구성되어 있음을 볼 수 있다. Ewald^[4]는 3차원 고체 결정격자상의 주기적인 전원분포에 의한 포텐셜 함수를 효과적으로 계산할 수 있는 방법을 제안하였으며, Jordan^[5]은 이 기법을 자유공간상의 2차원 주기전원분포에 의한 포텐셜 계산에 이용하였다. 이 방법은 Ewald에 의해 유도된 몇 가지 항등식에 바탕을 두고 있다.

먼저 자유공간의 단위 전원에 의한 포텐셜 함수를 다음과 같은 무한적분으로 표시할 수 있다^[5].

$$\frac{e^{-jkR}}{R} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-R^2 s^2 + \frac{k^2}{4s^2}\right) ds \quad (7)$$

이때 위의 적분은 $s \rightarrow 0$ 과 $s \rightarrow \infty$ 에서 피적분 함수가 유한한 값을 가지게 하는 복소평면상의 적당한 적분경로상에서 정의된다^[5]. 이 적분경로상의 적당한 점 E 를 기준으로 하여 위의 적분을 다음과 같은 두 개의 부분으로 나누어 줄 수 있다.

$$\frac{e^{-jkR}}{R} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^E \exp\left(-R^2 s^2 + \frac{k^2}{4s^2}\right) ds \right.$$

$$\left. + \int_E^{\infty} \exp\left(-R^2 s^2 + \frac{k^2}{4s^2}\right) ds \right\} \quad (8)$$

이를 식 (3), (4)에 제시된 공간영역 그린함수의 각 항에 대입하고 정리하면 그린함수 급수를 다음과 같은 두 부분으로 나눌 수 있다.

$$G_{Axx} = G_{Axx1} + G_{Axx2} \quad (9)$$

$$G_{Axx1} = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^7 A_i^{xx} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^E \exp\left(-R_{i,mnp}^2 s^2 + \frac{k^2}{4s^2}\right) ds \quad (9a)$$

$$G_{Axx2} = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^7 A_i^{xx} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_E^{\infty} \exp\left(-R_{i,mnp}^2 s^2 + \frac{k^2}{4s^2}\right) ds \quad (9b)$$

Ewald에 의하면 위의 두 번째 급수에 나타나는 적분은 다음과 같이 오차함수를 수반하는 식으로 쓸 수 있다^[4].

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_E^{\infty} \exp\left(-R_{i,mnp}^2 s^2 + \frac{k^2}{4s^2}\right) ds = \left\{ \frac{\exp(jkR_{i,mnp}) \operatorname{erfc}(R_{i,mnp}E + jk/2E)}{2R_{i,mnp}} + \frac{\exp(-jkR_{i,mnp}) \operatorname{erfc}(R_{i,mnp}E - jk/2E)}{2R_{i,mnp}} \right\} \quad (10)$$

한편 오차함수는 공액복소인자에 대해 다음과 같은 성질을 나타낸다.

$$\operatorname{erfc}[\bar{z}] = \overline{\operatorname{erfc}(z)} \quad (11)$$

이 식을 이용하면 위의 식 (10)에서 우변의 두 항이 서로 공액복소수 관계에 있음을 알 수 있으며, 이에 따라 이 두 항을 결합하여 다음과 같이 단순화된 형태로 쓸 수 있다.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_E^{\infty} \exp\left(-R_{i,mnp}^2 s^2 + \frac{k^2}{4s^2}\right) ds = \frac{\operatorname{Re}[\exp(-jkR_{i,mnp}) \operatorname{erfc}(R_{i,mnp}E - jk/2E)]}{R_{i,mnp}} \quad (12)$$

이때 $\operatorname{Re}[A]$ 는 복소수 A 의 실수부를 표시한다. 따라서 식 (9b)는 다음과 같이 변환된다.

$$G_{Axx2} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^7$$

$$A_i^{xx} \frac{\text{Re}[\exp(-jkR_{i,mnp})\text{erfc}(R_{i,mnp}E - jk/2E)]}{R_{i,mnp}} \quad (13)$$

한편 식 (9a)에서 급수합과 적분의 순서를 바꾸면, 피적분 인자에서 3차원 급수를 다음과 같이 3개의 1차원 급수의 곱으로 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n,p} \exp(-R_{mnp}^2 s^2) \\ &= \sum_m \exp\left[-(2as)^2 \left(m + \frac{X}{2a}\right)^2\right] \times \\ & \sum_n \exp\left[-(2bs)^2 \left(n + \frac{Y}{2b}\right)^2\right] \\ & \times \sum_p \exp\left[-(2cs)^2 \left(p + \frac{Z}{2c}\right)^2\right], \quad (14) \\ & R_{mnp}^2 = (X + 2ma)^2 + (Y + 2nb)^2 + (Z + 2pc)^2 \end{aligned}$$

이때 위의 공간영역 급수를 Fourier 급수로 표현되는 스펙트럴 영역 급수로 변환하기 위해 Ewald에 의한 다음의 항등식을 이용한다^{[4],[5]}.

$$\begin{aligned} & \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp[-(As)^2(l+g)^2] = \frac{\sqrt{\pi}}{As} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\ & \exp\left[-\frac{\left(\frac{\pi l}{A}\right)^2}{s^2} + 2\pi jlg\right] \quad (15) \end{aligned}$$

이 결과를 식 (14)의 각 항에 적용하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n,p} \exp(-R_{mnp}^2 s^2) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2as} \sum_m \exp\left[-\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{4s^2} + \frac{m\pi}{a} jX\right] \times \\ & \frac{\sqrt{\pi}}{2bs} \sum_n \exp\left[-\frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{4s^2} + \frac{n\pi}{b} jY\right] \frac{\sqrt{\pi}}{2cs} \\ & \sum_p \exp\left[-\frac{\left(\frac{p\pi}{c}\right)^2}{4s^2} + \frac{p\pi}{c} jZ\right] \quad (16) \end{aligned}$$

이를 식 (9a)의 각 항에 대입하고 정리하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$G_{Axx} = \frac{1}{abc} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_p}{2}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^E \exp\left(-\frac{\alpha_{mnp}^2}{4s^2}\right) \frac{1}{s^3} ds \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x'}{a} \\ & \times \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y'}{b} \sin \frac{p\pi z}{c} \sin \frac{p\pi z'}{c} \quad (17) \end{aligned}$$

이 식에 나타나는 적분은 간단한 변수치환에 의해 쉽게 그 값을 구할 수 있으며 그 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G_{Axx} &= \frac{1}{abc} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_p}{\alpha_{mnp}^2} \\ & \exp\left(-\frac{\alpha_{mnp}^2}{4E^2}\right) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x'}{a} \\ & \times \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y'}{b} \sin \frac{p\pi z}{c} \sin \frac{p\pi z'}{c} \quad (18) \end{aligned}$$

그린함수의 다른 성분들에 대해서도 비슷한 과정을 거쳐 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$G_{Ayy} = G_{Ayy1} + G_{Ayy2} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} G_{Ayy1} &= \frac{1}{abc} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_p}{\alpha_{mnp}^2} \\ & \exp\left(-\frac{\alpha_{mnp}^2}{4E^2}\right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x'}{a} \\ & \times \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n\pi y'}{b} \sin \frac{p\pi z}{c} \sin \frac{p\pi z'}{c} \quad (19a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{Ayy2} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \\ & A_i^{yy} \frac{\text{Re}[\exp(-jkR_{i,mnp})\text{erfc}(R_{i,mnp}E - jk/2E)]}{R_{i,mnp}} \quad (19b) \end{aligned}$$

$$G_{Azz} = G_{Azz1} + G_{Azz2} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} G_{Azz1} &= \frac{1}{abc} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_p}{\alpha_{mnp}^2} \\ & \exp\left(-\frac{\alpha_{mnp}^2}{4E^2}\right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x'}{a} \\ & \times \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y'}{b} \cos \frac{p\pi z}{c} \cos \frac{p\pi z'}{c} \quad (20a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{Azz2} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \\ & A_i^{zz} \frac{\text{Re}[\exp(-jkR_{i,mnp})\text{erfc}(R_{i,mnp}E - jk/2E)]}{R_{i,mnp}} \quad (20b) \end{aligned}$$

$$G_{Fxx} = G_{Fxx1} + G_{Fxx2} \quad (20)$$

$$G_{Fxx1} = \frac{1}{abc} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_p}{\alpha_{mnp}^2}$$

III. 결과 및 검토

$$\exp\left(-\frac{a_{mnp}^2}{4E^2}\right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x'}{a} \\ \times \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n\pi y'}{b} \cos \frac{p\pi z}{c} \cos \frac{p\pi z'}{c} \quad (20a)$$

$$G_{F_{xz2}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^7 \\ F_i^{xx} \frac{\text{Re}[\exp(-jkR_{i,mnp}) \text{erfc}(R_{i,mnp}E - jk/2E)]}{R_{i,mnp}} \quad (20b)$$

$$G_{F_{yy}} = G_{F_{yy1}} + G_{F_{yy2}} \quad (21)$$

$$G_{F_{yy1}} = \frac{1}{abc} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_p}{a_{mnp}^2} \\ \exp\left(-\frac{a_{mnp}^2}{4E^2}\right) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x'}{a} \\ \times \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y'}{b} \cos \frac{p\pi z}{c} \cos \frac{p\pi z'}{c} \quad (21a)$$

$$G_{F_{yy2}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^7 \\ F_i^{yy} \frac{\text{Re}[\exp(-jkR_{i,mnp}) \text{erfc}(R_{i,mnp}E - jk/2E)]}{R_{i,mnp}} \quad (21b)$$

$$G_{F_{zz}} = G_{F_{zz1}} + G_{F_{zz2}} \quad (22)$$

$$G_{F_{zz1}} = \frac{1}{abc} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \epsilon_n \epsilon_p}{a_{mnp}^2} \\ \exp\left(-\frac{a_{mnp}^2}{4E^2}\right) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x'}{a} \\ \times \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n\pi y'}{b} \sin \frac{p\pi z}{c} \sin \frac{p\pi z'}{c} \quad (22a)$$

$$G_{F_{zz2}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^7 \\ F_i^{zz} \frac{\text{Re}[\exp(-jkR_{i,mnp}) \text{erfc}(R_{i,mnp}E - jk/2E)]}{R_{i,mnp}} \quad (22b)$$

위에서 Ewald 변환된 그린함수의 형태를 자세히 살펴보면 각 성분에서 G_1 급수는 스펙트럴 영역 모드 전개 그린함수(식 5, 6)의 각 항이 지수함수로 가중되어 있는 형태이며, G_2 급수는 공간영역 영상전개 그린함수(식 3, 4)의 각 항이 상보오차함수(complementary error function)로 가중되어 있는 형태임을 알 수 있다. 상보오차함수는 $\exp(-z^2)/\sqrt{\pi}z$ 의 접근 형태를 가지므로 위의 두 급수들은 항의 수가 증가함에 따라 모두 매우 빨리 수렴하게 된다.

앞에서 제시된 Ewald합 기법을 이용하여 구형 공동의 포텐셜 함수를 수치적으로 계산하였다. 이 방법을 이용하여 구형 공동의 포텐셜 그린함수를 구하기 위해서는 먼저 Ewald합 방법에서 나타나는 조절인자 E 를 결정하여야 한다. 영상전개와 모드전개의 혼합형식으로 나타나는 Ewald합 방법에서 E 를 크게 하면 영상전개식쪽의 수렴속도가 빨라지고, 반대로 E 를 작게 하면 모드전개식쪽의 수렴속도가 빨라지게 되므로 두 영역을 합한 전체 계산량을 최소화할 수 있도록 E 의 값을 결정하는 것이 중요하다. 일반적으로는 한 항을 계산하는데 있어 영상 전개 급수의 경우가 모드 전개급수에 비해 보다 더 많은 계산을 필요로 한다. 따라서 영상 전개급수보다는 모드 전개급수에서 더 많은 항을 계산하도록 함으로써 전체 계산량을 최소화할 수 있다. 이를 위해 먼저 Ewald합으로 변환된 영상 전개 급수에서 관측점으로부터의 거리가 구형공동의 대각선 길이보다 가까운 영상들만의 계산으로 충분히 수렴하는 결과를 얻을 수 있도록 조절인자 E 의 값을 결정하였다.

그림 2, 3, 4는 한변의 길이(L)가 대략 한 파장(λ : 자유공간 파장) 정도되는 정육면체 공동($a=b=c=L=0.99\lambda$)의 자기 포텐셜 그린함수를 계산한 결과이다. 이 그림들은 전원점을 공동의 중심에 위치시킨 상태($x'=y'=z'=0.5L$)에서 관측점이 공동의 대각선을 따라 전원점과 멀리 떨어진 경우($x=y=z=0.1L$)와 전원점에 매우 가까운 경우($x=y=z=0.49L$), 그리고 이 두 극단적인 경우의 중간 정도에 위치한 관측점($x=y=z=0.3L$)에 대한 계산결과를 보여주고 있다. 이때 자기 벡터 포텐셜의 세 성분들은 모두 같은 크기를 가지게 된다. 이때의 포텐셜 그린 함수를 영상전개식(식 3)과 모드 전개식(식 5) 및 Ewald합 방법(식 9, 19, 20) 등 3가지 방법으로 계산하여 그 수렴 특성을 비교하였다.

먼저 그림 2에 나타난 영상전개 그린함수의 경우를 보면 일반적으로 그 수렴상태가 매우 나쁘다. 따라서 이 형태의 그린함수를 이용해서는 실제의 수치계산으로 정확한 결과를 얻어내기가 거의 불가능한 것으로 생각된다. 특별한 가속화 기법을 사용하지 않는 직접 계산의 경우 다음 그림 3에 제시된 모

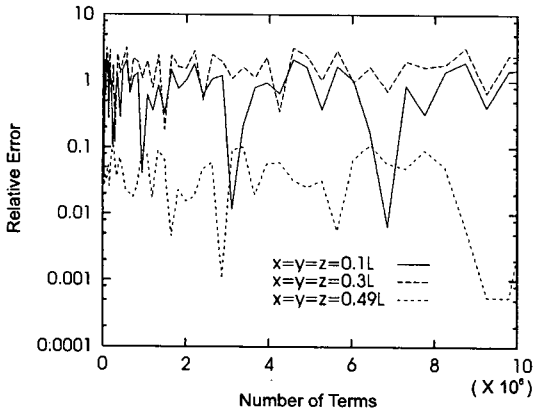


그림 2. 구형 공동 자기 벡터포텐셜 그린함수의 영상 전개식 수렴특성($a=b=c=L$, $x'=y'=z'=0.5L$)
 Fig. 2. Convergence of the magnetic vector potential Green's function for the rectangular cavity with image series expansion($a=b=c=L$, $x'=y'=z'=0.5L$).

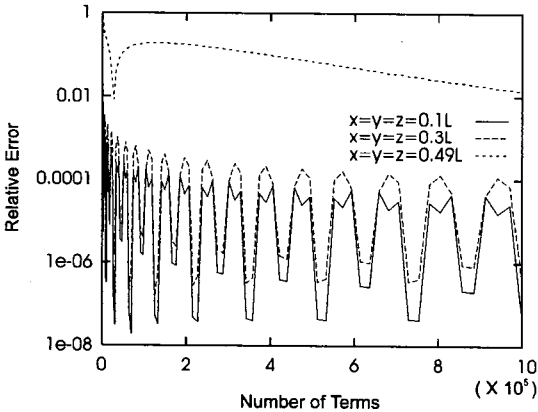


그림 3. 구형 공동 자기 벡터포텐셜 그린함수의 모드 전개식 수렴특성($a=b=c=L$, $x'=y'=z'=0.5L$)
 Fig. 3. Convergence of the magnetic vector potential Green's function for the rectangular cavity with modal series expansion($a=b=c=L$, $x'=y'=z'=0.5L$).

드전개식의 경우가 좀더 나은 결과를 보여준다. 그러나 이 경우도 관측점이 전원점에 가까워짐에 따라 점점 더 그 수렴속도가 느려지기 때문에 관측점과 전원점이 매우 가까워지는 경우에는 사용하기가 어렵다.

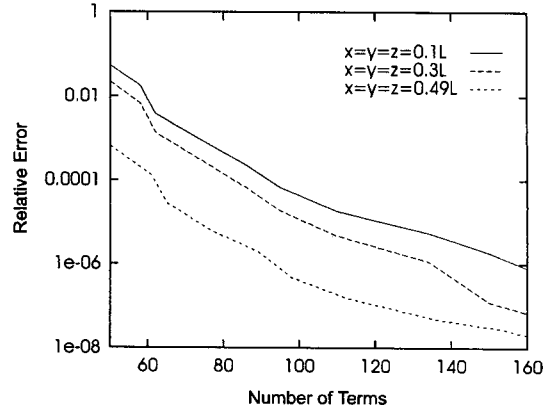


그림 4. 구형 공동 자기 벡터포텐셜 그린함수의 Ewald 합 방법 수렴특성($a=b=c=L$, $x'=y'=z'=0.5L$)
 Fig. 4. Convergence of the magnetic vector potential Green's function for the rectangular cavity with Ewald sum series expansion($a=b=c=L$, $x'=y'=z'=0.5L$).

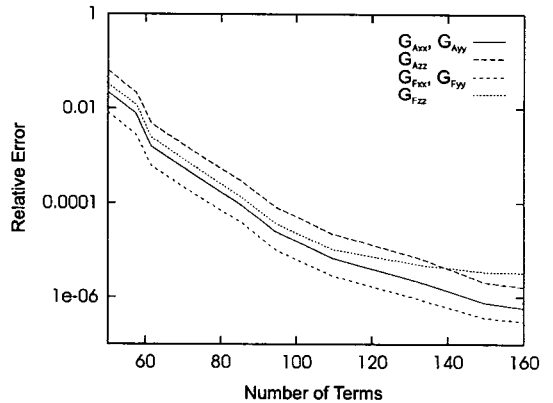


그림 5. Ewald합 방법에 의한 그린함수 계산의 수렴 특성($z=z'=0.5L$)
 Fig. 5. Convergence of the Green's function calculation by the Ewald sum method($z=z'=0.5L$).

이에 비해 Ewald합 방법을 적용한 그림 4의 결과를 보면 예로 든 3개의 경우에서 모두 매우 빠르게 수렴하고 있음을 알 수 있다.

다음 그림 5는 같은 평면상($z=z'=0.5L$)에 위치한 전원점과 관측점의 위치를 변화시켜 가면서 Ew-

표 1. Ewald합 계산에 의한 평균오차

Table 1. Average error in the calculation by the Ewald sum method. ($\times 10^{-5}$)

x', y'	0.05a	0.15a	0.25a	0.35a	0.45a
0.05b	2.18	1.81	6.49	2.38	1.93
0.15b	1.81	0.87	1.03	2.77	1.29
0.25b	6.49	1.03	2.02	1.95	0.92
0.35b	2.38	2.77	1.95	0.94	1.23
0.45b	1.93	1.29	0.92	1.23	2.28

ald합 방법으로 그린함수를 계산한 결과를 평균하여 나타낸 것이다. 평균적으로 볼 때 상대오차 10^{-4} 이하의 정확도를 얻는데 약 90항 그리고 상대오차 10^{-5} 이하의 정확도에는 약 110항 정도의 계산만으로 충분하였다. 따라서 일반적인 수치해석 목적으로는 100항 안팎의 계산만으로 충분히 정확한 결과를 얻을 수 있을 것으로 생각된다. 표 1은 그린함수에서 평균적으로 약 100항 정도를 계산에 포함시켰을 때, 각 전원점의 위치에서 계산된 그린함수의 평균 오차를 보여준다. 이 경우 최대 오차는 6.49×10^{-5} 그리고 전체적인 평균오차는 2.07×10^{-5} 정도의 값을 가지는 것으로 나타났다.

참 고 문 헌

- [1] D. I. Wu, and D. C. Chang, "A Hybrid Representation of the Green's function in an Overmoded Rectangular Cavity," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 36, pp. 1334-1342, Sept. 1988.
- [2] J.-F. Liang, H.-C. Chang, and K. A. Zaki, "Coaxial Probe Modelling in Waveguides and Cavities," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 40, no. 12, pp. 2171-2180, Dec., 1992.
- [3] W. F. Richards, K. McInturff, and P. S. Simon, "An efficient technique for computing the potential Green's functions for a thin, periodically excited parallel plate waveguide bounded by electric and magnetic walls," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 35, no. 3, pp. 276-281, Mar., 1987.
- [4] P. P. Ewald, "Die berechnung optischer und elektrostatistischen gitterpotentiale," *Ann. Phys.*, vol. 64, pp. 253-268, 1921.
- [5] K. E. Jordan, G. R. Richter, and P. Sheng, "An efficient numerical evaluation of the Green's function for the Helmholtz operator on periodic structures," *J. Comp. Phys.*, vol. 63, no. 16, pp. 222-235, 1986.

박 면 주

1991년: 서울대학교 전자공학과(공학사)

1993년: 서울대학교 대학원 전자공학과(공학석사)

1998년: 서울대학교 대학원 전자공학과(공학박사)

1998년~현재: 삼성전자 선임연구원

[주 관심분야] 전자파 수치 해석 및 안테나