

# 다층 평판구조체 해석시 Closed-form 그린함수와 함께한 모멘트 행렬의 효율적인 수치계산

## Numerically Efficient Evaluation of MoM Matrix in Conjunction with the Closed-form Green's Functions in Analysis of Multi-layered Planar Structures

이영순\* · 김병철\* · 조영기\*\*

Young-Soon Lee\* · Byung-Chul Kim\* · Young-Ki Cho\*\*

### 요 약

Closed-form 그린함수를 사용하여 다층 평판 구조체의 산란 문제를 해석할 경우, 주된 어려운 문제점 중의 하나는 대각행렬 요소의 계산결과가 느리게 수렴하고 안정되지 않다는 점이다. 즉, 대각행렬 요소 계산시 전원 자신의 항에 해당되는  $e^{-jkr}/r$  형태의 특이 적분 처리를 했음에도 불구하고 계산결과와 느린 수렴도 문제가 몇 개의 복소 영상항에 해당하는 적분과정에 여전히 남아있음을 알 수 있었다. 이와 같은 문제점을 해소하기 위해, 일반화된 지수함수의 2중적분을 극좌표계에서 가우스 구적법을 사용하여 계산할 수 있는 새로운 적분 기법을 제시하고자 한다. 새로운 적분기법 알고리즘의 안정성과 수렴도에 관하여 본 논문에서 논의되며, 그 타당성을 확인하기 위해 마이크로스트립 패치 안테나의 산란 문제에 이 적분기법을 적용해 보았다.

### Abstract

When analyzing the scattering problem of multi-layered planar structures using closed-form Green's function, one of the main difficulties is that the numerical integrations for the evaluation of diagonal matrix elements converge slowly and are not so stable. Accordingly, even when the integration for the singularity of type  $e^{-jkr}/r$ , corresponding to the source dipole itself, is performed using such a method, this difficulty persists in the integration corresponding to the finite number of complex images. In order to resolve this difficulty, a new technique based upon the Gaussian quadrature in polar coordinates for the evaluation of the two-dimensional generalized exponential integral is presented. Stability of the algorithm and convergence is discussed. Performance is demonstrated for the example of a microstrip patch antenna.

### I. 서 론

최근 마이크로스트립 안테나, MMIC(monolithic microwave integrated circuit) 등과 같은 다층 평판구조체(multi-layered planar structure)의 사용이 증가됨

에 따라서 이와 같은 구조체의 산란문제 해석을 위한 효율적인 수치해석기법 개발이 주된 관심사로 부각되고 있다. 이와 같은 추세에 따라 최근 공간 영역에서의 그린함수 값을 효율적으로 계산할 수 있는 closed-form 그린함수법<sup>[1],[2]</sup>이 제안되어, closed-form

\* 금오공과대학교 전자공학부(School of Electronic Eng., Kumoh National University of Tech.)

\*\* 경북대학교 전자전기공학부(School of Electrical & Electronic Eng., Kyungbook National University)

· 논문 번호 : 20001104-13S

· 수정완료일자 : 2000년 12월 28일

그린함수와 더불어 공간영역에서의 모멘트법(MoM)을 사용하는 수치해석방법이 시도되고 있다<sup>[3]</sup>.

그러나 해석구조가 파장 정도 크기의 내외가 되는 경우 다른 수치해석 기법에 비해 closed-form 그린함수를 사용한 모멘트법이 계산량 등 수치적인 효율측면에서 매우 유리하다고 할 수 있으나, 모멘트법 자체가 지니고 있는 특이적분(singular integral) 처리의 번거로운 문제와 closed-form 그린함수를 사용하였기 때문에 대각행렬의 요소를 구하는 과정에서 적분 결과의 수렴도가 매우 느리다는 것은 여전히 문제점으로 지적될 수 있다<sup>[3]</sup>. 참고문헌 [3]에서는 이와 같은 문제점을 해결하기 위해 좌표계 변환법을 사용한 수치 적분기법을 제시하였다.

본 논문에서는 먼저 기존의 다양한 closed-form 그린함수법<sup>[1],[2]</sup>과는 달리 다층 평판구조에 있어서 단순하고, 견실하게 closed-form 그린함수를 구할 수 있는 방법을 소개하고자 한다. 또한 앞서 언급한 바와 같이 특이 적분 처리 문제와 적분 결과의 느린 수렴도 문제를 해소하기 위해 사용되어진 참고문헌 [3]의 방법을 검토한 결과, 벡터 포텐셜 계산시 2중 적분처리를 하지 않고도 단일 적분처리가 가능한 적분 기법이 발견되어, 이와 같은 새로운 적분 기법을 소개하고자 한다. 그리고 본 논문에서 제시된 방법의 타당성을 평면파 입사에 의해 여기되는 마이크로스트립 안테나의 산란문제의 해석을 통해 제시하고자 한다.

## II. Closed-Form 그린함수

일반적인 다층 평판구조의 단면도를 그림 1에 제시하였고, 이와 같은 구조에 대한 공간영역에서의 그린함수는 식 (1)과 같은 일반적인 적분식으로 표현되어진다.

$$G = \frac{1}{4\pi} \int_{SIP} dk_{\rho} k_{\rho} H_0^{(2)}(k_{\rho} \rho) \tilde{G}(k_{\rho}) \quad (1)$$

여기에서  $G$  및  $\tilde{G}$ 는 각각 공간 및 파수 영역에서의 그린함수이고,  $H_0^{(2)}$ 는 2중 Hankel 함수, 그리고 SIP는 Sommerfeld 적분경로이다.

식 (1)로부터 closed-form 그린함수를 구하는 방법은 2가지가 있는데, 첫번째 방법은 참고문헌 [4]

에서처럼 표면파 극점 (surface-wave pole)과 준정적(quasi-static) 기여항을  $\tilde{G}$ 로부터 사전에 제거한 후, 남겨진  $\tilde{G}$ 를 복소 지수함수의 합으로 근사화하는 방법이다. 두번째 방법은 참고문헌 [2]에서처럼 사전에 기여항을 전혀 제거하지 않고  $\tilde{G}$ 를 2-level로 근사화하는 방법이다. 또한  $\tilde{G}$ 를 복소 지수함수의 합으로 근사화하는 방법에는 대표적으로 Prony법과 GPOF법이 있는데,  $\tilde{G}$ 로부터 가능한 기여항을 사전에 제거하고 근사화하는 경우에는 Prony법으로도 충분할 수 있으나 기여항이  $\tilde{G}$ 로부터 사전제거가 되지 않은 경우에는 반드시 GPOF법을 사용해야 된다고 사료된다.

본 논문에서는 기존의 방법<sup>[2],[4]</sup>들과는 달리 평판 다층구조의 특성을 고려한 일반적인 방법을 제안하고자 한다. 즉, 일반적으로 다층 구조의 두께가 얇은 편이어서 표면파에 의한 영향이 미약하므로  $\tilde{G}$ 로부터 표면파 극점은 제거하지 않는다. 그러나 그림 1과 같은 다층구조에 있어서 전원(source)은 다층간의 경계면상에 위치하는 것이 일반적인 관례이므로 전하에 의한 스칼라 포텐셜 그린함수의 경우에는 서로 인접한 유전체에 의한 영상(image) 효과를 고려해야 한다는 것이다. 그림 1에서 예로 단위크기의 점전하가  $z = -h$ (즉,  $i$ 번째  $i-1$ 번째 영역 경계)에 위치한 경우 영상효과  $K = (\epsilon_n - \epsilon_{n-1}) / (\epsilon_n + \epsilon_{n-1})$ 를  $\tilde{G}$ 로부터 사전에 제거하는 것이 바람

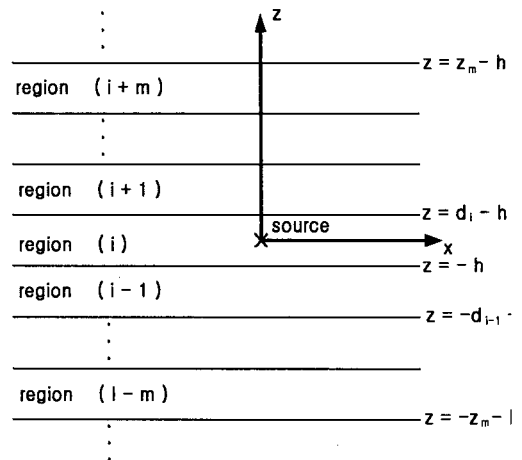


그림 1. 일반적인 다층평판 구조체

Fig. 1. A typical multi-layered planar geometry.

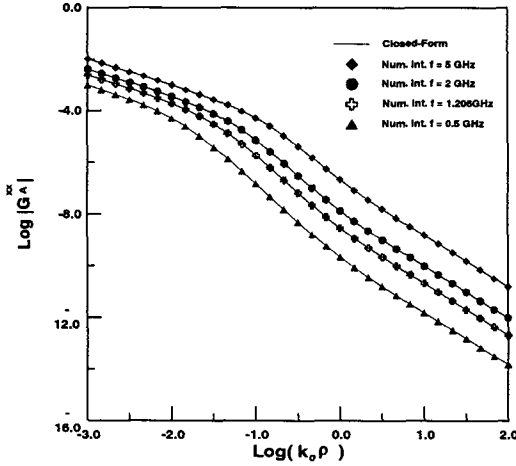


그림 2. Closed-form과 수치적분에 의해 구해진 벡터 포텐셜 그린함수의 크기

Fig. 2. Magnitude of the vector potential Green's function obtained by closed-form and numerical integration.

직하다고 사료된다. 그 이유는 준정적 기여항이란  $G$ 가  $k_\rho \rightarrow \infty$ 할 때 가지는 극한값을 의미하므로, 이 극한값이  $K$ 가 됨을 쉽게 알 수 있고, 이를 본 논문에서 영상 효과라고 부르게 된 이유는 무한 반 평면이 각각 비유전율  $\epsilon_{ii}$ 와  $\epsilon_{i-1}$ 인 경우, 매질  $i$ 에 점전하가 위치할 때의 영상 전하에 해당되기 때문이다.

요약하자면 다층 평판구조의 경우  $G$ 으로부터 표면과 극점 기여항은 제거하지 않고, 반면에 영상 효과  $K$ 만은 사전에 제거하여  $G$ 를 빠르게 수립시켜, 참고문헌 [2]에서와는 달리 1-level로 단순하게 근사화 하자는 것이다. 이와 같은 방법으로 GPOF법을 사용하여  $G$ 를 근사화한 후 Sommerfeld 항등식을 사용하면 closed-form 그린함수를 구할 수 있다. 본 논문에 제안하는 방법의 타당성을 검토하기 위해 3층 구조인 접지된 마이크로스트립 평판구조 ( $h = 0.8mm$ ,  $\epsilon_r = 4.34$ )를 예로 적용해 보았다. 전원점과 관찰점을 같은 평면 ( $z = z' = 0$ )에 두고 벡터 및 스칼라 포텐셜을 본 논문의 방법으로 유도된 closed-form 그린함수 결과(실선)와 수치적분으로 구한 결과(점선)를 비교하여 그림 2와 그림 3에 각각 제시하였다.

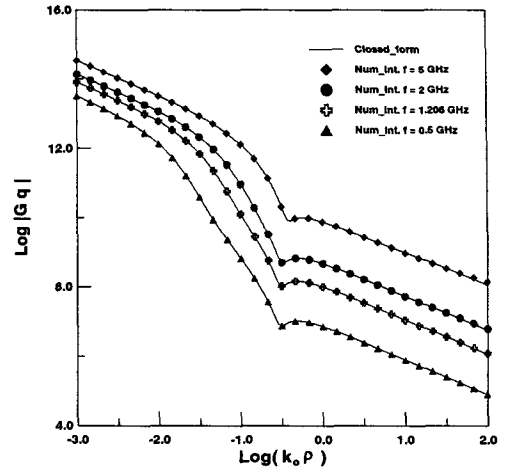


그림 3. Closed-form과 수치적분에 의해 구해진 스칼라 포텐셜 그린함수의 크기

Fig. 3. Magnitude of the scalar potential Green's function obtained by closed-form and numerical integration.

### III. 일반화된 복소지수함수의 적분법

앞절에서 언급된 방법으로 유도된 closed-form 그린함수는 식 (2)로 표현되어지는 항들로 구성된다.

$$\frac{e^{-jk\sqrt{\rho^2 + (-jb_k)^2}}}{\sqrt{\rho^2 + (-jb_k)^2}} \quad \text{for } z = z' = 0 \quad (2)$$

여기에서 전원 자신과 영상효과에 의한 항의 경우  $b_k = 0$ 이고, 복소 영상에 의한 항(GPOF법을 사용하여 복소 지수 함수의 합으로 근사화된 항)의 경우  $b_k \neq 0$ 이다. 이와 같은 closed-form 그린함수의 항들과 더불어 미지의 면전류와 그와 관련된 면전하를 그림 4에서와 같이 지붕(rooftop)과 2차원 단위 펄스 기저(basis)함수들로 전개하는 모멘트법을 사용할 경우 식 (3) 및 (4)와 같은 형태의 적분식들을 직면하게 된다.

$$I_{1k} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^a \frac{e^{jk\sqrt{x^2 + y^2 + (-jb_k)^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (-jb_k)^2}} dx dy \quad (3)$$

$$I_{2k} = I_{1k} - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^a \left(\frac{x}{a}\right) \frac{e^{jk\sqrt{x^2 + y^2 + (-jb_k)^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (-jb_k)^2}} dx dy \quad (4)$$

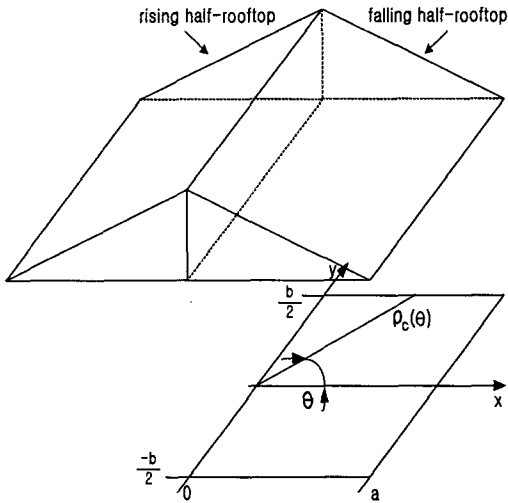


그림 4. 직각좌표계에서 하향 지붕함수(전하셀)의 적분영역

Fig. 4. The rectangular integration (or charge cell) region of the falling half rooftop in the cartesian coordinate system.

식 (3)은 분할(segmentation)된 charge cell에 의한 스칼라 포텐셜 계산시 나타나는 적분식이고, 반면에 식 (4)는 current cell의 falling half-rooftop에 의한 벡터 포텐셜 계산시 직면하게 되는 적분식이다. 특히 적분 처리와 느린 수렴도 문제를 해소하기 위해 참고문헌 [3]에서와 같이  $I_{1k}$ 를 구하기 위해 적분식을 극좌표계(polar coordinate system)으로 변환한 후,  $u = \sqrt{\rho^2 + (-jb_k)^2}$ 으로 변수치환을 하면 식 (5)와 같은 적분식을 얻을 수 있다.

$$I_{1k} = \frac{j}{k_0} \int_0^{2\pi} [e^{-jk_0 \sqrt{\rho_c(\theta)^2 + (-jb_k)^2}} - e^{-jk_0 \sqrt{(-jb_k)^2}}] d\theta \quad (5)$$

여기에서  $\rho_c(\theta)$ 는 참고문헌 [3]에서와 같이(그림 4에서 보는 바와 같이) 좌표계의 원점에서 적분구간의 외곽까지 거리이다.

$I_{2k}$ 를 구하는데 있어서 참고문헌 [3]에서와는 달리 좌표계 변환을 하지 않고, 식 (4)의 두번째 항을 변수  $x$ 에 대해 먼저 적분을 하면 식 (6)과 같이 단순한 결과식을 얻을 수 있다.

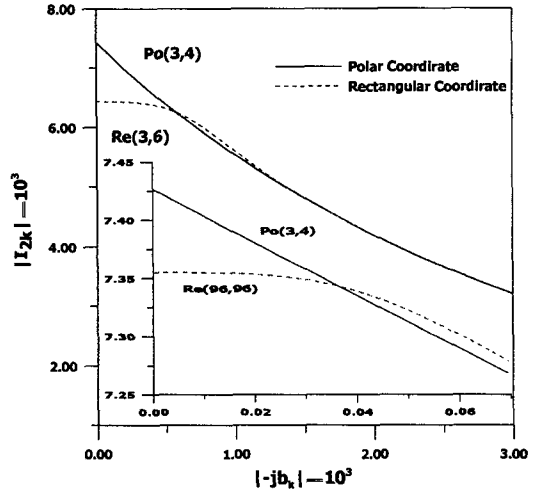


그림 5.  $b_k$ 에 대한  $I_{2k}$ 의 크기

Fig. 5. Magnitude of  $I_{2k}$  versus  $b_k$ .

$$I_{2k} = I_{1k} + \frac{1}{jk_0 a} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [e^{-jk_0 \sqrt{a^2 + y^2 + (-jb_k)^2}} - e^{-jk_0 \sqrt{y^2 + (-jb_k)^2}}] dy \quad (6)$$

이 결과는  $I_{2k}$ 를 구하기 위해 참고문헌 [3]의 식 (34)에서는 변수  $\rho$ 와  $\theta$ 에 대해 2중 적분해야 하는 것과는 달리, 식 (6)에서 보는 바와 같이 첫번째 항과 두번째 항은 각각  $\theta$ 와  $y$ 변수에 대해 단일 적분 처리로 구할 수 있음을 알 수 있다. 본 논문이 제안하는 적분법의 수렴도와 효율성을 확인하기 위해  $I_{2k}$ 를 본 논문의 방법인 식 (6)을 사용한 Gaussian 구적법의 결과(실선)와 직각 좌표계에서의 구적법의 결과(점선)을 비교하여 그림 5에 제시하였다. 그림 5의 삽화에서 볼 수 있는 바와 같이 직각 좌표계에서의 Gaussian 구적법의 결과가  $b_k$ 가 작은 경우, inner and outer Gauss point 개수를 (96, 96)로 2중 적분을 해도 수렴하지 않음을 알 수 있는 반면에, 본 논문의 방법으로는  $\theta$ 와  $y$ 변수에 대해 각각 3, 4의 Gaussian point 정도로 단일 적분을 해도 특이적분 ( $b_k = 0$ 인 경우) 처리뿐만 아니라  $b_k$ 의 크기에 관계없이 정확한 값을 구할 수 있음을 알 수 있다.

#### IV. 수치 해석 결과 및 결론

본 논문이 제안 방법의 타당성을 확인하기 위해

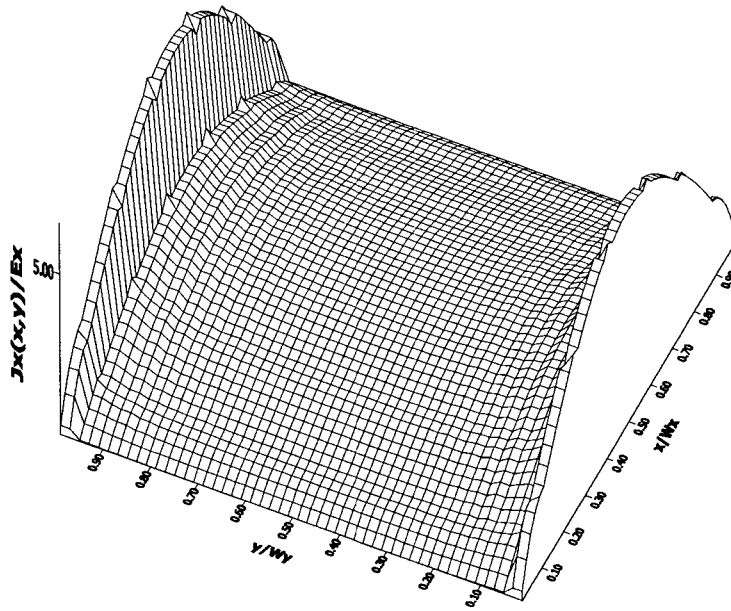


그림 6. 패치 면상에 유도된  $x$  방향 전류 밀도의 3차원 분포도  
Fig. 6. 3-D distribution of  $x$ -directed current density induced on the patch surface.

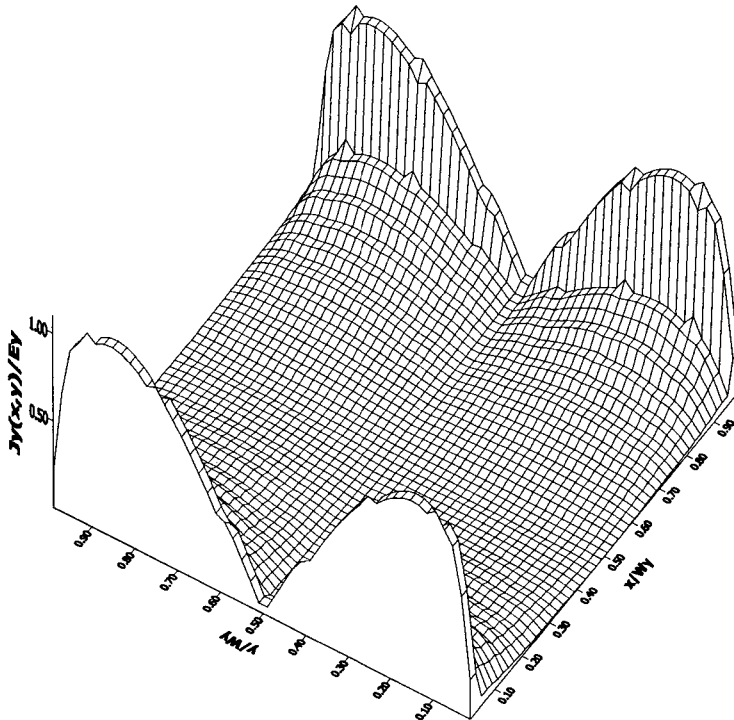


그림 7. 패치 면상에 유도된  $y$  방향 전류 밀도의 3차원 분포도  
Fig. 7. 3-D distribution of  $y$ -directed current density induced on the patch surface.

패치(patch)의 크기가  $w_x = w_y = 0.485\lambda$ , 유전체 두께  $h = 0.02\lambda$ , 비유전율  $\epsilon_r = 2.5$ 인 구형 마이크로 스트립 패치 안테나가  $x$ -polarized 평면파로 여기되는 산란문제를 예로 선택하여 해석해 보았다. 패치를  $22 \times 22$ 의 동일한 크기의 전하셀로 분할하여 해석하였으며, 결과 패치면에 유기되는  $x$ -방향 및  $y$ -방향 전류 분포모양을 그림 6 및 그림 7에 각각 제시하였다. 결과에서 볼 수 있는 바와 같이 예측되어지는 대로  $y$ -방향 전류밀도의 크기가  $x$ -방향 전류밀도의 크기에 비해 매우 작음을 알 수 있다. 따라서 좀더 구체적인 해석 결과를 보기 위해  $x$ -방향 전류 밀도를 패치의 중심부에서  $x$ 축 및  $y$ 축을 따라서 유기된 전류분포 모양을 그림 8에 제시하였다. 그림 8에서 위 실선 그림은 패치의 중심부에서  $y$ 축을 따라서, 아래(실선) 그림은 중심부에서  $x$ 축을 따라서 유기된  $x$ -방향 전류 분포이다. 해석 결과가 예측되는 정현(sinusoidal) 곡선(점선)으로 나타날 뿐만 아니라, 패치의 edge singularity도 잘 만족함을 알 수 있다.

결론적으로 본 논문의 해석 방법이 수치 해석시 효율적일 뿐만 아니라 견실성(robustness)이 보장된다고 사료되어, 마이크로스트립 안테나 및 MMIC와

같은 다층평판 구조체의 산란문제를 해석하는데 도움을 줄 수 있을 것으로 사료된다.

### 참고 문헌

- [1] G. D. Dural and M. I. Aksun, "Closed-Form Green's Functions for General Sources and Stratified Media", *IEEE Trans. MTT.*, vol. 43, no. 7, pp 1545~1552, 1995.
- [2] M. I. Aksun, "A Robust Approach for the Derivation of Closed-Form Green's Functions", *IEEE Trans. MTT.*, vol. 44, no. 5, pp 651~658, 1996.
- [3] 이강렬, 이영순, "동축선으로 급전되는 마이크로 스트립 패치 안테나의 효율적인 수치해석", 한국전자파학회 논문집, 제 11권, 제 1호, pp 124~134, 2000.
- [4] Y. L. Chow, J. J. Yang, D. G. Fang and G. E. Howard, "A Closed- Form Spatial Green's function for the thick microstrip substrate", *IEEE Trans. MTT.*, vol. 39, no. 3, pp 588~592, 1991.

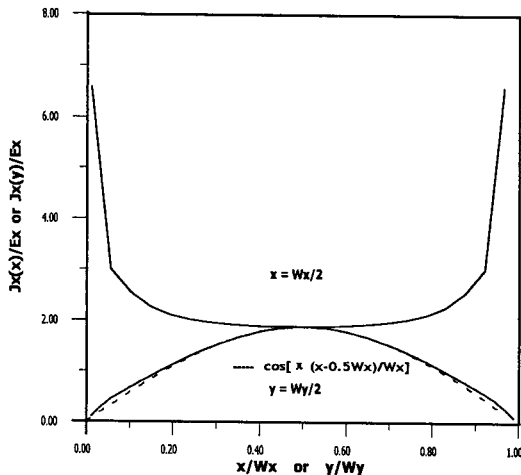


그림 8. 패치 중심부에서  $y$ 축 및  $x$ 축을 따라서 유도된  $x$ -방향 전류분포도

Fig. 8. Distribution of  $x$ -directed current density along  $y$ -axis and  $x$ -axis at center of the patch respectively.

### 이 영 순

1979년 2월: 경북대학교 전자공학과(공학사)  
 1982년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사)  
 1996년 8월: 경북대학교 전자공학과(공학박사)  
 1982년 2월~현재: 금오공과대학교 전자공학부 교수  
 [주 관심분야] 전자장 수치 해석, 도파관 불연속 문제, 전자파의 개구 결합 문제, 안테나 해석 및 설계.

### 김 병 철

1980년 2월: 서강대학교 전자공학과(공학사)  
 1982년 2월: 서강대학교 전자공학과(공학석사)  
 1991년 8월: 서강대학교 전자공학과(공학박사)  
 1982년~현재: 금오공과대학교 전자공학부 교수  
 2000년 2월~현재: (주)인마텍 대표이사  
 [주 관심분야] 마이크로파 회로설계

조 영 기

1978년 2월: 서울대학교 전자공학과(공학사)

1981년 8월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사)

1998년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사)

1981년 9월~현재: 경북대학교 전자공학과 교수

[주 관심분야] 안테나 이론, 마이크로파공학, 전자기 산란 및 전자기 이론