

분수 공적분을 이용한 최적 헤지비율 추정

남상구* · 박종호**

〈요 약〉

본 연구에서는 여러 계량 모형을 이용하여 계산한 헤지 비율의 성과를 비교하였다. 특히 헤지 비율을 추정하기 위하여 분수 공적분 오차 수정 모형을 이용하였다.

KOSPI200 현물과 선물 지수를 이용하여 검증한 결과 현물, 선물 지수는 1차 적분된 시계열이며 베이스는 분수 적분된 시계열이었다. 따라서 현물과 선물 지수는 분수 공적분된 시계열이었다.

최소 분산 헤지 비율을 최적 헤지 비율로 하여 성과를 측정한 결과 다음과 같은 결과를 얻었다. 헤지 성과는 GARCH 항이 있는 모형이 없는 모형에 비해 크게 나타나며 각 모형에서 고려하고 있는 정보 집합의 크기가 큰 순서인 FIEC, EC, VAR, OLS 순으로 헤지 성과는 크게 나타나고 있다. 그러나 OLS 방법에 의한 헤지에 의해서도 수익률 변동의 많은 부분이 사라져, 다른 모형들은 OLS 모형과 비교하여 추가적인 분산 감소 효과는 크지 않았다.

I. 서 론

선물은 현물 보유에 따른 위험을 회피하기 위한 수단으로 사용되고 있다. 현물을 보유하고 적절한 비율의 선물을 판매하여 현물 가격 변동의 위험을 회피할 수 있다. 보유 현물에 대해 판매한 선물의 비율을 헤지 비율이라고 한다. 대부분의 투자자들에게 최적 헤지 비율은 기대 수익률과 위험을 함께 고려하였을 때 가장 높은 기대 효용을 주는 헤지 비율이다(Cecchetti, Cumby and Figlewski(1988)). 그러나 최적 헤지 비율에 관한 많은 연구들은 효용함수에 대한 가정을 피하기 위하여 최소 분산 헤지 비율을 최적 헤지 비율로 가정하였다.

최소 분산 헤지 비율을 최적 헤지 비율로 가정하면 최적 헤지 비율은 현물 포지션에 대한 선물 포지션의 비율이 선물 수익률의 조건부 분산에 대한 현물 수익률과 선물 수

* 고려대학교 경영대학 교수

** 순천대학교 경영학과 부교수

익률의 조건부 공분산의 비율로 나타내진다.

헤지 비율은 헤지를 구성하는 시점에서 이용하는 정보 집합에 따라 달라진다. 헤지 비율을 계산하기 위해서는 여러 가지 시계열 모형이 사용되는데, 각 모형은 이용하는 정보 집합에 대한 가정을 달리하고 있다. 가장 단순한 모형으로 단순회귀분석(OLS) 모형은 이용하는 정보 집합으로 현재 선물과 현물 지수 수익률만을 고려하고 있으며, 벡터회귀모형(VAR)은 여기에 현물과 선물지수의 과거 자료를 포함한다. 현물과 선물 지수가 공적분되어 있을 때 오차수정모형(EC)은 추가로 선물과 현물 지수의 차인 베이스에 담긴 정보를 포함한다.

Ghosh(1993)는 OLS와 EC 모형에 의한 헤지 비율을, Chou, Denis and Lee(1996)는 VAR과 EC의 헤지 비율을 비교하여 EC가 더 나은 결과를 보인다고 하였다. Lien(1996)은 공적분 관계를 고려하지 않으면 헤지 비율이 최적 헤지 비율보다 작으며 그 결과 헤지 성과가 떨어진다고 하였다. 그러나 EC 모형은 가장 최근의 베이스에 담긴 정보만을 포함하고 과거 베이스의 영향은 고려되지 않는다. 만약 베이스가 장기 시계열 종속성을 갖는다면 과거 베이스에 담긴 정보를 고려하는 것이 바람직할 것이다.

최근 분수 적분된(fractionally integrated) 시계열에 대한 연구가 진행되면서 시계열의 장기 종속성에 관심이 높아지고 있다. 어떤 시계열이 분수 적분되어 있을 경우에는 비조건부 평균에 조건부 평균이 천천히 회귀하게 되며, 현재 값이 과거 모든 시차의 값에 의해 영향을 받게 된다. 따라서 분수 적분된 시계열을 고려할 수 있다면 과거 시계열에 담긴 정보를 모두 이용할 수 있게 된다.

Cheung(1993)은 4개의 주요 현물환율이 분수 적분되었다고 하였고, Fang, Lai, and Lai(1994)는 주요 통화선물 지수에 대해 같은 결론을 얻었다. Barkoulas, Labys, and Onochie(1997)는 몇몇 상품 현물 가격에서 분수 적분된 증거가 있다고 하였다.

선물과 현물 지수의 차인 베이스가 분수 적분된 시계열이라면 현물과 선물 지수는 분수 공적분(fractionally cointegrated)되어 있다고 한다. 일반적으로 두 경제 변수가 같은 차수로 적분되어 있고 이들의 선형 결합이 더 낮은 차수로 분수 적분되어 있다면 이 두 변수는 분수 공적분되어 있다고 한다. Cheung and Lai(1993)는 주요국의 물가지수에서, Soofi(1998)는 OPEC 회원국들의 물가지수에서, Baillie and Bollerslev(1994)는 주요 현물 환율이 분수 공적분된 증거를 보여주었다. Granger(1986)는 분수 공적분이 있을 때 분수 적분 오차 수정모형(FIEC)을 제안하였다.

현물과 선물 지수가 분수 공적분되어 있다면, 기존 연구들이 사용한 OLS, VAR, EC

모형은 헤지 비율을 추정할 때 과거 베이스스에 담긴 정보를 충분히 고려하지 않았다고 할 수 있다. 본 연구에서는 현물과 선물 지수가 공적분되어 있는가를 Sowell(1992)이 제안하고 Doornik & Ooms(1999)가 개발한 EML(exact maximum likelihood) 방법을 이용하여 검정하였으며, 두 지수의 차이인 베이스스가 분수 적분되어 장기 시계열 종속성을 가지므로 FIEC 모형을 이용하여 과거 베이스스에 담긴 정보를 모두 이용하는 헤지 비율을 추정하고 성과를 비교한다.

이상의 OLS, VAR, EC, FIEC 모형은 헤지 비율을 계산하기 위해 이용하는 정보 집합이 다르지만 모두 현물과 선물 지수의 공분산이 일정하다고 가정하고 있다. 그 결과 헤지 비율도 시간에 대해 일정하다. 그러나 현물과 선물 지수의 공분산은 시간에 따라 변할 뿐만 아니라 주식시장의 주가 변동성과 선물 지수의 변동성도 시간에 따라 변한다.

변동 공분산에 따른 최적 헤지 비율을 추정하기 위하여 Cecchetti, Cumby and Figlewski (1988)는 Engle(1982)의 ARCH 모형을 이용하였으며, Myers(1991)는 이변량 GARCH 모형을, 옥기울(1998)은 이변량 ARCH 모형을 이용하였다.¹⁾

잔차의 조건부 분산이 일정하다는 VAR, EC, FIEC 모형을 완화하기 위하여 분산식에 Bollerslev, Engle and Wooldridge(1988)가 제안한 다변량 자기 회귀 조건부 이분산(multivariate GARCH) 모형을 추가하여 분석한다. 즉 이분산을 가정하는 VAR-GARCH, EC-GARCH, FIEC-GARCH 모형에서 계산된 헤지 비율의 성과를 비교한다.

검증 결과 변동 공분산을 가정한 GARCH 모형이 일정 공분산 모형에 비해 헤지 성과가 우수하게 나타났으며, 정보 집합이 큰 순서인 FIEC, EC, VAR, OLS 모형 순으로 헤지 성과가 우수한 것으로 나타났다.

II. 헤지 모형

투자자가 현물에서 매입 포지션을 취하고 이에 대한 위험을 회피하기 위하여 선물에서 매도 포지션을 취한다고 하자. 투자자의 현물 포지션을 Q 라 하고 선물 매도 계약 수를 X 라 하면 헤지 비율은 $h = X/Q$ 가 된다. 로그 현물 지수와 로그 선물 지수를 각각 p_t 와 f_t 라 하고, 현물 지수 수익률 및 선물 지수 수익률을 각각 r_p , r_f 라 놓으면 투자자의 포트폴리오 수익률은 $r_h = r_p - h r_f$ 가 된다.

1) Myers(1991)는 시간변동 헤지 비율이 불변 헤지 비율과 비교하여 차이가 없다고 하였으며, 옥기울(1998)도 추정구간 외에서 OLS에 의한 불변 헤지 비율의 성과가 더 우수하다고 하였다.

투자자가 포트폴리오 위험이 최소가 되도록 최적 헤지 비율 h^* 를 선택한다면 최적 헤지 비율은 다음과 같다.

$$h^* = \frac{cov(r_b, r_f)}{var(r_f)}$$

1. OLS 모형

최적 헤지 비율 h^* 를 추정하는 전통적인 방법은 단순 회귀분석이다. 현물 지수 수익률을 종속변수로 선물 지수 수익률을 독립변수로 놓고 다음 회귀분석을 한다.

$$r_{b,t} = \alpha + \beta r_{f,t} + \varepsilon_t \quad (2)$$

추정된 회귀 계수 $\beta = \frac{cov(r_b, r_f)}{var(r_f)}$ 는 최적 헤지 비율이 된다.

2. VAR 모형

OLS 방법은 현재 현물과 선물 지수의 관계만을 나타내며 과거 지수의 움직임은 고려하지 않고 있다. 그러나 과거 지수 움직임은 현재 지수의 움직임에 영향을 줄 수 있다. VAR 모형은 현재 지수뿐만 아니라 과거 지수의 변화를 고려한 모형이다.

$$r_{b,t} = \alpha_b + \sum_{i=1}^m \beta_{bi} r_{b,t-i} + \sum_{j=1}^m \gamma_{bj} r_{f,t-j} + \varepsilon_{bt} \quad (3)$$

$$r_{f,t} = \alpha_f + \sum_{i=1}^m \beta_{fi} r_{b,t-i} + \sum_{j=1}^m \gamma_{fj} r_{f,t-j} + \varepsilon_{ft} \quad (4)$$

여기서, $(\varepsilon_{bt}, \varepsilon_{ft})$ 는 독립적이고 동일하게 분포한(iid) 확률 벡터이다.

$var(\varepsilon_{bt}) = \sigma_{bb}$, $var(\varepsilon_{ft}) = \sigma_{ff}$, $cov(\varepsilon_{bt}, \varepsilon_{ft}) = \sigma_{bf}$ 라고 놓으면 최적 헤지 비율은 $\frac{\sigma_{bf}}{\sigma_{ff}}$ 이다.

3. 오차 수정(EC) 모형

많은 연구에 의하면 현물과 선물지수는 공적분되어 있다. 현물과 선물 지수가 공적분되어 있을 때 다음과 같은 Engle and Granger(1987)의 오차수정 모형이 적절하다고 알려져 있다.

$$r_{p,t} = \alpha_p + \sum_{i=1}^m \beta_{pi} r_{p,t-i} + \sum_{j=1}^m \gamma_{pj} r_{f,t-j} + \delta_p z_{t-1} + \varepsilon_{pt} \quad (5)$$

$$r_{f,t} = \alpha_f + \sum_{i=1}^m \beta_{fi} r_{p,t-i} + \sum_{j=1}^m \gamma_{fj} r_{f,t-j} + \delta_f z_{t-1} + \varepsilon_{ft} \quad (6)$$

단, $z_t = f_t - p_t$ 는 베이스스이다.

차익거래 기회가 존재하지 않기 위해 선물 지수는 이론 선물 지수를 기준으로 상하 거래 비용만큼의 범위 내에 있어야 한다. 따라서 선물 지수에서 현물 지수를 뺀 베이스스의 변화는 지수 움직임에 영향을 주게 되며, 베이스스는 VAR 모형에 오차 수정 변수로 포함될 수 있다. 최적 헤지비율은 VAR 모형과 같은 $\frac{\sigma_{pf}}{\sigma_{ff}}$ 가 된다.

VAR 모형과 EC 모형의 차이는 오차 수정 변수로서 베이스스가 포함된다는 것이다. 두 모형이 같은 시차를 포함할 때는 EC 모형이 VAR 모형을 포함하게 된다.

4. 분수 적분 오차수정(FIEC) 모형

과정 z_t 가 다음 확률 과정으로 나타내진다면 z_t 는 차수 d 로 적분되어 있다고 한다.

$$\theta(L)(1-L)^d z_t = \phi(L) \varepsilon_t \quad (7)$$

여기서 L 은 $Lz_t = z_{t-1}$ 인 후방 이동 연산자이며, $\theta(L)$ 와 $\phi(L)$ 는 유한 차수 다항 식이고, ε_t 는 백색 잡음이다. z_t 의 적분 계수 d 가 정수일 경우에는 전통적인 ARIMA 모형이 되며, 정수가 아닌 실수일 경우 z_t 는 분수 적분 과정을 따른다고 한다. $\theta(L)$ 와 $\phi(L)$ 의 모든 근이 단위원 밖에 있고 $-0.5 < d < 0.5$ 라면 z_t 는 안정적이다. 특히 $0 < d < 0.5$ 라면 z_t 는 조건부 평균이 비조건부 평균에 천천히 회귀하는 장기 기억 특성을 갖는다. 여기서 분수 적분항은

$$\begin{aligned} (1-L)^d &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-d)L^k}{\Gamma(-d)\Gamma(k+1)} \\ &= 1 - dL + d \frac{(d-1)}{2!} L^2 - \frac{d(d-1)(d-2)}{3!} L^3 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

이며 $\Gamma(\cdot)$ 는 감마 함수이다.

식 (5)와 (6)에서 오차 수정변수인 베이스스가 분수 적분 되어있을 경우 현물과 선물

지수는 분수 공적분 되어 있다고 한다. Granger(1986)는 분수 공적분된 시계열에 대해 다음과 같은 분수 적분 오차 수정(FIEC) 모형을 제시하였다.

$$r_{p,t} = \alpha_p + \sum_{i=1}^m \beta_{pi} r_{p,t-i} + \sum_{j=1}^m \gamma_{pj} r_{f,t-j} + \delta_p [(1-L)^d - (1-L)] z_t + \varepsilon_{pt} \quad (9)$$

$$r_{f,t} = \alpha_f + \sum_{i=1}^m \beta_{fi} r_{p,t-i} + \sum_{j=1}^m \gamma_{fj} r_{f,t-j} + \delta_f [(1-L)^d - (1-L)] z_t + \varepsilon_{ft} \quad (10)$$

적분 계수 $d=0$ 이면 식 (9)과 (10)은 식 (5)와 (6)이 된다. 따라서 FIEC 모형은 EC모형을 포함하게 된다. 최적 헤지 비율은 VAR 모형, 그리고 EC 모형과 같이 $\frac{\sigma_{pf}}{\sigma_{ff}}$ 이다.

식 (8)과 같이 연산자 $(1-L)^d$ 를 확장하면 현물과 선물 지수의 움직임이 z_{t-1} 뿐 아니라 z_{t-j} , $j > 1$ 에 의해서도 영향을 받는다는 것을 알 수 있다. EC 모형은 가장 최근의 베이스스만을 고려하지만 FIEC는 베이스스의 과거 전체 자료를 고려한다. FIEC 모형의 장기 기억 종속성은 헤지 기간이 장기일 때 이 모형이 다른 모형에 비해 헤지 성과가 우월할 수 있다는 것을 보여준다.

5. GARCH 모형

지금까지는 잔차의 분산과 현물과 선물 지수의 공분산이 일정할 것이라고 가정하였다. 따라서 헤지 비율은 시간의 흐름에 대해 일정하다. 그러나 최근 많은 연구들이 현물과 선물 지수 수익률의 분산이 시간이 흐름에 따라 변한다고 하였으며, 이는 GARCH 모형으로 잘 설명될 수 있다고 하였다. GARCH 모형의 분산식은 다음과 같다.

$$\sigma_{pp,t} = \alpha_p + \sum_{i=1}^r \beta_{pi} \sigma_{pp,t-i} + \sum_{j=1}^s \gamma_{pj} \varepsilon_{p,t-j}^2 \quad (11-1)$$

$$\sigma_{ff,t} = \alpha_f + \sum_{i=1}^r \beta_{fi} \sigma_{ff,t-i} + \sum_{j=1}^s \gamma_{fj} \varepsilon_{f,t-j}^2 \quad (11-2)$$

$$\sigma_{pf,t} = \rho \sigma_{pp,t}^{1/2} \sigma_{ff,t}^{1/2} \quad (11-3)$$

단, ρ 는 상관계수이며 시간에 대해 일정하다고 가정한다.

헤지 비율은 현물과 선물 지수의 분산과 공분산에 의해 결정되므로 최적 헤지 비율을 추정하기 위하여 이처럼 변하는 분산과 공분산을 고려할 필요가 있다.

본 연구에서는 잔차의 분산과 현물과 선물 지수의 공분산이 일정할 것이라고 가정한

VAR, EC, FIEC모형과 이들 각 모형에 대해 추가로 식 (11)의 일정 상관계수 이변량 GARCH 과정을 분산-공분산 방정식으로 포함한 모형을 분석한다. 결과적으로 이 모형들은 VAR-GARCH, EC-GARCH, FIEC-GARCH가 되고 변동하는 분산과 공분산에 따른 헤지 비율을 얻을 수 있다. 이 경우 일 기간 헤지 비율은 $\frac{\sigma_{M,t}}{\sigma_{ff,t}}$ 가 되고 시간 가변적이다. GARCH 효과의 비선형성 때문에 최적 헤지 비율은 헤지 기간에 따라 변하게 된다.

III. 자료와 추정결과

본 연구에서 사용된 자료는 선물 거래가 시작된 1996년 5월 3일부터 1999년 12월28일까지 KOSPI200 현물과 선물의 일별 종가 지수이며 총 거래일은 1208일이다. 선물 지수는 최근월물 지수이며 만기일 다음날에는 다시 다음 최근월물 지수를 사용하였다. 지수 수익률로는 지수에 로그를 취한 후 차분하였으며 베이스스는 로그 선물 지수에서 로그 현물 지수를 뺀 값이다.

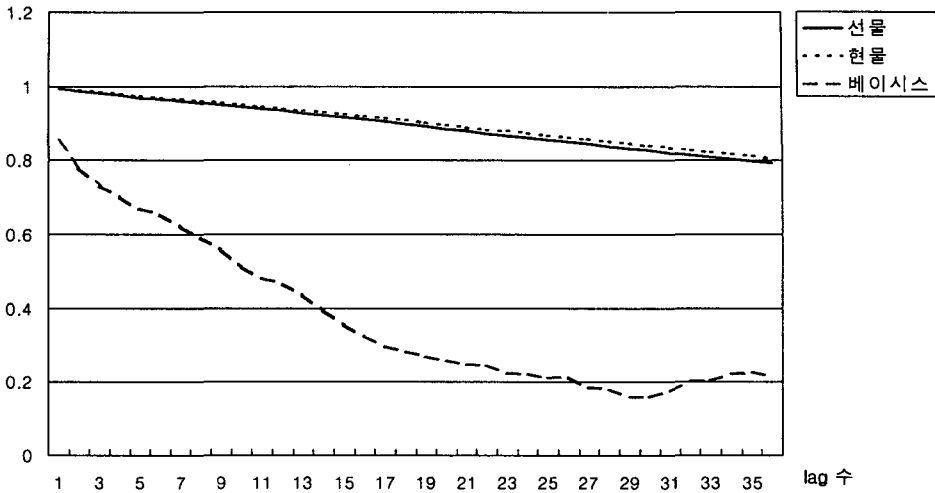
모형의 성과를 비교하기 위하여 표본 기간을 모형 추정 기간과 성과 평가 기간으로 나누었다. 모형을 추정하기 위하여 표본의 처음 901일(1996.5.3~1999.6.30)을 사용하였다. 또 각 모형에 따른 헤지 비율의 성과를 비교하기 위하여 표본 기간의 마지막 127일(1999.7.1~1999.12.28)을 사용하였다. 각 헤지된 포트폴리오의 성과는 수익률의 분산으로 측정하였다.

1. 로그 현물, 선물 지수 및 베이스스의 자기 상관 계수

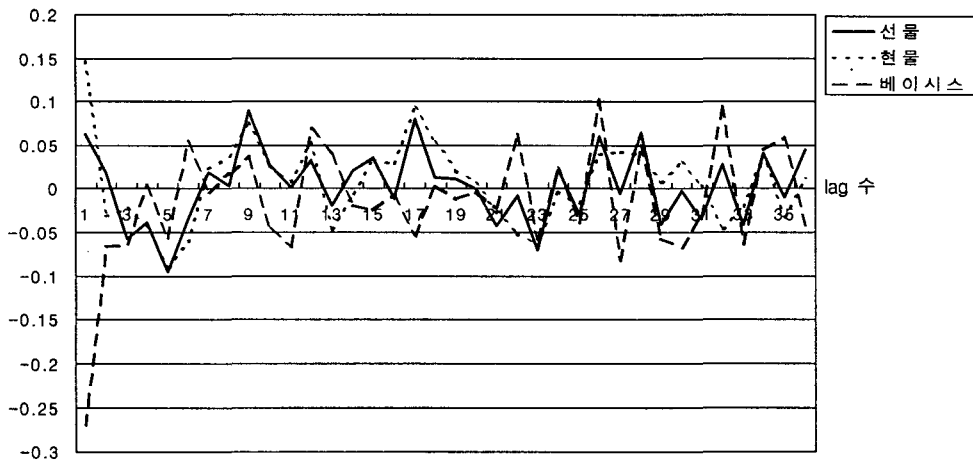
[그림 1]은 현물과 선물 지수에 로그를 취한 값과 베이스스의 시계열 특성을 보기 위해 자기 상관 함수를 나타낸 것이다. 로그 현물과 선물 지수는 자기 상관계수가 매우 천천히 감소하고 있어 적분된 시계열이라는 것을 보여 준다. 그러나 베이스스는 훨씬 빠르게 감소하고 있어 분수 적분된 시계열의 가능성을 보여준다.²⁾ [그림 2]에서는 로그 현물과 선물 지수와 베이스스의 1차 차분 시계열의 자기 상관함수를 보여준다. 현물과 베이스스가 1시차에서 높은 자기 상관관계를 보여주지만 이들 시계열이 더 이상 적분되어있지 않다는 것을 보여준다.

2) 안정 ARMA 과정의 자기 상관계수가 기하적으로 감소하는데 반하여, 분수 적분 시계열의 자기 상관계수는 쌍곡선 형태로 좀 더 천천히 감소한다(Hosking(1981)).

[그림 1] 선물, 현물, 베이스스의 자기 상관 계수



[그림 2] 선물, 현물, 베이스스의 1차 차분 시계열의 자기 상관 계수



2. 로그 현물, 선물 지수 및 베이스스의 I(1) 검증

현물 선물 지수와 베이스스가 적분되어 있는가를 검증하기 위하여 단위근 검증을 하였다. <표 1>은 Dicky-Fuller와 Philips-Perron의 단위근 검증 결과를 보여준다. 단위근이 존재한다는 귀무가설에 대해 로그 현물과 선물 지수는 가설을 기각하지 못하며 1차 차분 시계열은 가설을 기각하여 단위근이 존재하지 않는다는 것을 보여준다. 베이

시스도 단위근이 존재한다는 가설을 기각하고 있다.

<표 1> 로그 현물, 선물 지수 및 베이스스의 단위근 검증

종속변수	결 과	ADF	PP
log(<i>p</i>)	있 음	-1.3507	-1.3292
	없 음	-0.1346	-0.1269
Δ log(<i>p</i>)	있 음	-14.8952***	-25.4575***
	없 음	-14.9036***	-25.4730***
log(<i>f</i>)	있 음	-1.4801	-1.4740
	없 음	-0.1501	-0.1482
Δ log(<i>f</i>)	있 음	-15.3782***	-27.6719***
	없 음	-15.3868***	-27.6885***
베이스스	있 음	-4.7821***	-7.5913***
	없 음	-4.7758***	-7.5799***

H_0 : 시계열이 단위근을 가지고 있다.

*** : 1% 수준에서 유의함.

ADF : augmented Dicky-Fuller unit root test, 4차 lag까지 포함.

PP : Philips-Perron unit root test, 6차 lag까지 포함.

그러나 Ooms & Doornik (1999)은 Augmented Dicky-Fuller 검정과 Philips-Perron의 검정은 분수 적분된 시계열, 즉 $I(d)$, $d < 1$ 에 대해 1차 적분된 시계열 $I(1)$ 을 검정하는데 유용하지 못하다고 하였다. 이들과 Lee & Schmidt(1996)는 시계열이 안정적인가를 검정하는 KPSS 검정이 시계열이 분수 적분되어 있다는 가설($I(d)$)에 대해 시계열이 안정적이라는 가설($I(0)$)을 검정하는데 검정력을 갖는다고 하였다. 이에 따라 로그 현물, 선물 지수의 1차 차분 시계열(이하 현물 수익률, 선물 수익률이라고 함)과 베이스스에 대해 시계열이 안정적이라는 귀무가설에 대해 KPSS 검정을 하였으며 <표 2>는 그 결과를 보여준다.

먼저 추세가 있을 때의 검정 통계량 η_r 를 보면 시차 4까지 모두 현물, 선물 수익률은 안정적이라는 가설을 기각하지 못하며 베이스스는 가설을 기각하고 있다. 그러나 현물, 선물 수익률과 베이스스에 추세가 있을 것이라고 생각하기 어렵기 때문에 추세가 없을 때의 검정 통계량 η_μ 를 보면 현물 수익률은 시차 4까지 모두 5% 유의수준에서 귀무가설을 기각하며 선물 수익률은 시차 0에서, 베이스스는 시차 3까지 5% 유의수준에서 귀무가설을 기각하고 있다.

분수 적분 계수를 추정하기 위해서 Geweke and Porter-Hudak(1983)(GPH) 검정이 많이 이용되어 왔다. GPH 검정은 추정하기가 쉽다는 장점은 있으나, 반모수(semi-parametric) 검정으로서 AR(1) 또는 MA(1)항이 있고 AR 또는 MA 계수가 크다면 심각한 편의를 가지며 비효율적이다. 또한 너무 큰 표본은 분수 적분 계수의 추정을 어렵게 하며 부적절한 크기의 표본은 추정을 부정확하게 하는 등 표본 선택에 어려움이 있다. 지금까지 연구 결과들도 전반적으로 GPH와 같은 반모수 추정법에 대해 부정적이다.(Baillie(1996))

이에 대한 대안으로 Sowell(1992)은 최우 추정법(exact Maximum Likelihood : EML)을 제안하였는데 이는 이론상으로는 호소력이 있으나 계산상 많은 어려움이 있으며 평균 모수가 0이 아니거나 알려지지 않을 경우 편의가 있게 된다. Doornik and Ooms(1999)는 Sowell(1992)의 방법이 갖는 이러한 문제를 해결하여 평균뿐만 아니라 설명 변수가 존재할 때도 효율적으로 적분 계수를 추정할 수 있도록 하였다.⁴⁾ Doornik & Ooms(1999)는 이러한 방법이 시계열이 단기 기억특성을 갖는 안정적인 시계열(I(0))인가 하는 귀무가설과 시계열이 단위근을 갖는 안정적이지 않는 시계열(I(1))인가 하는 귀무가설에 대해 쉽게 검정할 수 있는 방법이라고 하였으며 KPSS와 Dicky-Fuller 형태의 검정에 대해 보완하는 방법으로 사용될 수 있다고 하였다.

먼저 현물과 선물 수익률, 그리고 베이스스에 대해 GPH 검정을 한 결과가 <표 3>에 나와있다. 현물과 선물 수익률에 대해서는 스펙트럴 좌표의 수가 35와 42일 때는 분수 적분된 것으로 나타나나 30과 59에서는 분수 적분되지 않은 것으로 나타난다. 이는 GPH 검정이 갖는 표본 크기에 따른 문제점을 잘 보여준다. 그러나 베이스스는 일관성 있게 분수 적분된 것으로 나타나고 있다.

이를 보완하기 위하여 좀 더 나은 방법이라고 할 수 있는 Doornik & Ooms의 방법을 사용하여 분수 적분 계수를 추정하였다. <표 4>에서 현물과 선물 수익률이 ARFIMA(1,d,1) 과정이라고 할 때 적분 계수 d는 모두 유의하지 않게 나타났다. 따라서 현물과 선물 수익률은 안정적인 시계열이라고 할 수 있다. 베이스스가 ARFIMA (1, d, 1)의 과정이라고 할 때 유의수준 1%에서 적분 계수가 0.4362로 추정되었다. 따라서 베이스스는 I(0.4362)로 분수 적분되어 있으며 현물과 선물 지수는 분수 공적분되어 있다. 식 (9)과 (10)에서 분수 공적분 변수는 $z_t^* = [(1-L)^{0.4362} - (1-L)]z_t$ 로 나타내진다.

4) 적분 계수를 추정하기 위하여 Doornik & Ooms(1999)의 Arfima package 1.0 for Ox를 사용하였다.

<표 3> 현물, 선물 지수 및 베이스스의 GPH 검정

스펙트럴 좌표의 수	$\Delta \log(b)$	$\Delta \log(f)$	베이스스
30 ($m^a = 0.5$)	0.2080	0.1635	0.3746***
35 ($m = 0.525$)	0.2869**	0.2491**	-0.4608***b
42 ($m = 0.55$)	0.3199***	0.2791***	-0.4056***b
59 ($m = 0.6$)	0.1270	0.1191	-0.2541***b

a : 스펙트럴 좌표(spectral ordinate)의 수 = T^m

b : GPH 검정은 적분 계수 $d < 0.5$ 인 안정 시계열에 대해서만 의미가 있으므로 d 가 0.5보다 커서 1차 차분 시계열에 대해 검정한 값임.

$m = 0.5, 0.525, 0.55, 0.6$ 에서 표준오차는 각각 0.1401, 0.1275, 0.1142, 0.0937임.

*** : 1% 수준에서 유의함.

** : 5% 수준에서 유의함.

<표 4> 현물, 선물 지수 및 베이스스의 ARFIMA(1,d,1) 검정

	$\Delta \log(b)$	$\Delta \log(f)$	베이스스
d	-0.0199 (0.0419)	-0.0448 (0.0486)	0.4362*** (0.0719)
AR-1	-0.0726 (0.2232)	0.2356 (0.2139)	0.8609*** (0.0441)
MA-1	0.2520 (0.1959)	-0.1148 (0.1955)	-0.6978*** (0.0868)
Constant	-0.00004 (0.0008)	0.0001 (0.0008)	0.0007 (0.0332)

*** : 1% 수준에서 유의함.

3. 모형의 추정

여러 모형에서 추정된 평균과 분산-공분산 방정식의 결과는 <표 5>에 나와 있다. 평균 방정식에서 VAR과 EC, FIEC 모형의 시차는 SIC(Schwarz Information criteria)를 따랐다. 이에 따라 VAR과 EC 모형은 시차 2까지, FIEC 모형은 시차 1까지 포함하고 있다. 따라서 EC 모형은 VAR 모형을 포함하지만 FIEC 모형은 다른 모형을 포함하지 않는다. 또한 GARCH 항을 포함한 모형은 이를 포함하지 않는 모형과 같은 시차를 갖는 것으로 하고 추정하였다.

VAR와 VAR-GARCH 모형에서 현물과 선물 수익률은 각각 선물과 현물 수익률의 시차 값에 대해 정의 영향을 받고 있다. 즉 선물 수익률이 증가하면 하루 또는 이틀 후

에 현물 수익률이 증가하며, 현물 수익률이 증가하면 하루 후에 선물 수익률이 증가하는 상호 작용을 보여 주고 있다. 현물 수익률은 2 시차 현물 수익률에 대해서 역의 영향을 받고 있어 평균 반전 현상을 보여주고 있다.

EC와 EC-GARCH 모형에서는 현물 수익률만이 선물 수익률의 시차 값에 대해 정의 영향을 받고 있으며, 현물 수익률은 VAR와 VAR-GARCH 모형과 마찬가지로 평균 반전 현상을 보여주고 있다. 베이스스에 대해서는 선물 수익률만이 유의하게 부의 영향을 받고 있다. 즉 베이스스가 증가하면 선물 수익률은 감소하고, 감소하면 선물 수익률

<표 5> 헤지 비율 추정 결과

a. 평균 방정식

모형	종속변수	상수	Δp_{t-1}	Δp_{t-2}	Δf_t	Δf_{t-1}	Δf_{t-2}	z_{t-1}	z_{t-1}^*
OLS	Δp_t	0.0000 (0.0004)			0.7147 (0.0140)				
VAR	Δp_t	-0.0000 (0.0008)	-0.0515 (0.0674)	-0.2432* (0.0662)		0.1930* (0.0555)	0.1855* (0.0557)		
	Δf_t	0.0000 (0.0010)	0.2620* (0.0824)	-0.0558 (0.0810)		-0.1078 (0.0679)	-0.0267 (0.0682)		
EC	Δp_t	-0.0000 (0.0008)	-0.0578 (0.0696)	-0.2467* (0.0669)		0.1996* (0.0585)	0.1897* (0.0570)	-0.0110 (0.0308)	
	Δf_t	-0.0002 (0.0010)	0.1954* (0.0847)	-0.0931 (0.0814)		-0.0374 (0.0712)	0.0720 (0.0693)	-0.1179* (0.0375)	
FIEC	Δp_t	-0.0000 (0.0008)	0.0364 (0.0744)			0.1053 (0.0673)			0.1049 (0.1065)
	Δf_t	-0.0000 (0.0010)	0.1383 (0.0900)			0.0272 (0.0814)			-0.3728* (0.1288)
VAR-GARCH	Δp_t	-0.0000 (0.0005)	-0.0677 (0.0550)	-0.1168* (0.0536)		0.2186* (0.0441)	0.1046* (0.0435)		
	Δf_t	0.0001 (0.0007)	0.1643* (0.0686)	0.0481 (0.0682)		-0.0395 (0.0596)	-0.0421 (0.0611)		
EC-GARCH	Δp_t	0.0002 (0.0005)	-0.0773 (0.0569)	-0.1261* (0.0546)		0.2248* (0.0461)	0.1120* (0.0450)	-0.0106 (0.0241)	
	Δf_t	-0.0006 (0.0007)	0.1063 (0.0713)	0.0103 (0.0681)		0.0157 (0.0617)	-0.0031 (0.0619)	-0.0911* (0.0305)	
FIEC-GARCH	Δp_t	0.0001 (0.0005)	-0.0491 (0.0546)			0.2008* (0.0439)			0.0362 (0.0689)
	Δf_t	0.0004 (0.0007)	0.2296* (0.0676)			-0.0966 (0.0588)			-0.3054* (0.0930)

* : 5% 수준에서 유의함.

<표 5> 헤지 비율 추정 결과 (계속)

b. 분산-공분산 방정식

모형	종속변수	상수 ^a	$\sigma_{pp,t-1}$	$\sigma_{ff,t-1}$	$e_{ff,t-1}^2$
VAR	$\sigma_{pp,t}$	5.8645			
	$\sigma_{ff,t}$	8.7735			
	ρ	0.8745			
EC	$\sigma_{pp,t}$	5.8637			
	$\sigma_{ff,t}$	8.6773			
	ρ	0.8782			
FIEC	$\sigma_{pp,t}$	5.9416			
	$\sigma_{ff,t}$	8.6888			
	ρ	0.8780			
VAR-GARCH	$\sigma_{pp,t}$	0.0440* (0.0137)	0.9009* (0.0111)		0.0963* (0.0123)
	$\sigma_{ff,t}$	0.0821* (0.0220)		0.8958* (0.0117)	0.0992* (0.0117)
	ρ	0.8799* (0.0070)			
EC-GARCH	$\sigma_{pp,t}$	0.0435* (0.0139)	0.9000* (0.0115)		0.0975* (0.0128)
	$\sigma_{ff,t}$	0.0792* (0.0220)		0.8959* (0.0120)	0.0997* (0.0122)
	ρ	0.8827* (0.0069)			
FIEC-GARCH	$\sigma_{pp,t}$	0.0433* (0.0138)	0.9002* (0.0112)		0.0975* (0.0125)
	$\sigma_{ff,t}$	0.0795* (0.0222)		0.8952* (0.0120)	0.1005* (0.0121)
	ρ	0.8828* (0.0068)			

a: 분산과 분산의 표준오차는 1000을 곱한 수치임.

*: 1% 수준에서 유의함.

은 증가한다. 베이스스 즉 선물 지수와 현물 지수의 차이가 커지면 현물 지수는 영향을 받지 않으나 선물 지수가 감소하여 베이스스를 감소시킨다는 것이다. 이는 FIEC와 FIEC-GARCH 모형에서도 마찬가지였다.

분산-공분산 방정식에서는 현물과 선물 수익률이 이분산성을 갖는다는 것을 보여준

다. 분산은 높은 자기 상관성을 보여주어 조건부 분산이 지속된다는 것을 나타낸다.

조건부 분산의 1차 자기 상관계수가 현물 지수에서 모두 0.9 이상으로 나타나고 선물 지수에서는 조금의 차이지만 0.9보다 작게 나타나고 있어, Nikkei 선물 지수에 대한 Lien and Tse(1999)와는 달리, 선물보다 현물 지수에서 분산의 지속성이 더 높게 나타나고 있다. 또한 두 시계열의 상관계수는 모두 0.87이상으로 높게 나타나고 있다.

4. 추정 기간 외 헤지 성과

<표 5>의 추정 결과를 이용하여 추정기간 외 헤지 비율을 계산하고 헤지 성과를 비교하였다. 각 모형의 성과가 헤지 기간에 따라 달라질 수 있기 때문에 헤지 기간을 1, 5, 10, 20일로 하여 성과를 비교하였다. 본 연구에서는 효용함수에 대한 가정을 피하기 위하여 최소 분산 헤지 비율을 최적 헤지 비율로 가정하였기 때문에 헤지 성과는 헤지 포트폴리오의 수익률 분산으로 측정하였다.

VAR, EC, FIEC 모형에서는 추정된 분산과 상관계수에서 헤지 비율을 구할 수 있다. VAR 모형에서는 0.7150이고 EC 모형에서는 0.7219, FIEC 모형에서는 0.7261로 OLS의 0.7147보다 크게 나타났다. Lien and Tse(1999)에 의하면 EC 모형이 현물과 선물 지수 사이의 장기적인 관계를 좀 더 정확히 추정하기 때문에 EC 모형의 헤지 비율은 VAR 모형에서보다 크다고 하였다. 그러나 그 차이는 별로 크지 않았다.

이분산을 가정하는 GARCH 항이 있는 모형은 일정 상관계수를 가정하고 모형을 추정하였다. 헤지 비율은 헤지가 시작되기 전 날의 조건부 분산과 상관계수를 이용하여 구하였다. 헤지 비율은 GARCH 항이 없을 때에 비해 크게 나타나며 헤지 기간 20일의 예외를 제외하고는 FIEC-GARCH, EC-GARCH, VAR-GARCH 순으로 크게 나타나고 있다. 헤지 비율의 변동성은 세 모형에서 유의한 차이를 보이지 않았다.

<표 6>의 추정 기간 외 헤지 성과를 보면 헤지 포트폴리오의 수익률 분산이 감소할 수록 수익률 평균도 감소하고 있어 위험-수익률의 상반관계를 보여준다.

헤지에 따른 분산 감소의 효과는 GARCH 항이 있는 모형이, 없는 모형에 비해 크게 나타나며 각 모형에서 고려하고 있는 정보 집합의 크기가 큰 순서인 FIEC, EC, VAR, OLS 순으로 헤지 성과는 크게 나타나고 있다. 따라서 FIEC-GARCH 모형이 가장 우수하다고 할 수 있다. 그러나 OLS 방법에 의한 헤지에 의해서도 수익률 변동감소분의 대부분이 사라졌다. OLS 방법에서 1일 헤지에서는 약 86%, 20일 헤지에서는 91%의 분산 감소를 보이고 있다. 다른 모형들은 OLS 모형과 비교하여 추가적인 분산 감소 효과는 크지 않아 Myers(1991)와 옥기울(1998)의 연구와 일치하는 결과를 보여준다.

<표 6> 추정 기간 외 헤지 성과

헤지 기간	모형	헤지 비율 평균	헤지 비율 분산	헤지 포트폴리오 수익률 평균 ^a	헤지 포트폴리오 수익률 분산 ^a	분산 감소율(%)
1일	무헤지			1.6477	0.6594	
	OLS	0.7147		0.3196	0.0939	85.76
	VAR	0.7150		0.3191	0.0938	85.77
	EC	0.7219		0.3063	0.0926	85.95
	FIEC	0.7261		0.2985	0.0920	86.05
	VAR-GARCH	0.7712	0.0023	0.1832	0.0895	86.42
	EC-GARCH	0.7752	0.0022	0.1769	0.0892	86.47
	FIEC-GARCH	0.7772	0.0023	0.1762	0.0891	86.48
5일	무헤지			6.6929	3.8264	
	OLS	0.7147		1.2433	0.4590	88.00
	VAR	0.7150		1.2411	0.4584	88.01
	EC	0.7219		1.1885	0.4453	88.36
	FIEC	0.7261		1.1564	0.4376	88.56
	VAR-GARCH	0.7742	0.0025	1.1563	0.3652	90.45
	EC-GARCH	0.7784	0.0023	1.1116	0.3605	90.57
	FIEC-GARCH	0.7798	0.0024	1.0397	0.3593	90.61
10일	무헤지			8.9229	4.0488	
	OLS	0.7147		1.6058	0.4197	89.63
	VAR	0.7150		1.6027	0.4193	89.64
	EC	0.7219		1.5321	0.4098	89.88
	FIEC	0.7261		1.4889	0.4043	90.01
	VAR-GARCH	0.7833	0.0031	0.5143	0.3679	90.91
	EC-GARCH	0.7872	0.0029	0.4743	0.3640	91.01
	FIEC-GARCH	0.7874	0.0030	0.4451	0.3561	91.20
20일	무헤지			17.8458	14.6974	
	OLS	0.7147		3.2116	1.2702	91.36
	VAR	0.7150		3.2054	1.2680	91.37
	EC	0.7219		3.0642	1.2193	91.70
	FIEC	0.7261		2.9782	1.1904	91.90
	VAR-GARCH	0.7896	0.0040	1.1677	1.0773	92.67
	EC-GARCH	0.7924	0.0039	1.0481	1.0486	92.86
	FIEC-GARCH	0.7917	0.0038	1.0011	1.0339	92.96

a : 1000을 곱했음.

또한 헤지 기간이 길어질수록 헤지 성과는 높게 나타나고 있다. 헤지 비율은 헤지 기

간에 따라 계산되어야 한다. 예를 들면 헤지 기간이 10일이면 헤지 비율을 계산하기 위해 10일간 지수 수익률을 사용하는 것이 적절할 것이다. 본 연구는 편의상 헤지 기간에 상관없이 헤지 비율 계산시 일일 지수 수익률을 사용하였음에도 불구하고 헤지 기간이 길수록 헤지 성과가 높게 나타나는 결과를 얻었다는 점에서 놀라운 결과라고 생각된다.

IV. 요약 및 결론

본 연구에서는 여러 계량 모형을 이용하여 계산한 헤지 비율의 성과를 비교하였다. 특히 헤지 비율을 추정하기 위하여 분수 공적분 오차 수정 모형을 이용하였다.

KOSPI200 현물과 선물 지수를 이용하여 검증한 결과 현물, 선물 지수는 1차 적분된 시계열이며 베이스는 분수 적분된 시계열이었다. 따라서 현물과 선물 지수는 분수 공적분된 시계열이었다.

최소 분산 헤지 비율을 최적 헤지 비율로 하여 성과를 측정한 결과 다음과 같은 결과를 얻었다. 첫째, 일정 공분산 모형에서는 FIEC, EC, VAR, OLS 순으로 헤지 비율이 크게 나타났으나 그 차이는 크지 않았다. 둘째, 이분산을 가정한 GARCH 항이 있는 모형이 없는 모형에 비해 헤지 비율이 크게 나타났다. 헤지 비율의 변동성은 세 모형에서 유의한 차이를 보이지 않았다. 셋째, 헤지 포트폴리오의 수익률 분산이 감소할수록 수익률 평균도 감소하고 있어 위험-수익률의 상반관계를 보여주었다. 넷째, 헤지 성과는 GARCH 항이 있는 모형이 없는 모형에 비해 크게 나타나며 각 모형에서 고려하고 있는 정보 집합의 크기가 큰 순서인 FIEC, EC, VAR, OLS 순으로 헤지 성과는 크게 나타나고 있다. 그러나 OLS 방법에 의한 헤지에 의해서도 수익률 변동의 많은 부분이 사라져, 다른 모형들은 OLS 모형과 비교하여 추가적인 분산 감소 효과는 크지 않았다. 다섯째, 헤지 기간이 길어질수록 헤지 성과는 높게 나타나고 있다. 이는 헤지 비율을 계산하기 위하여 일일 지수 수익률을 사용하였다는 점에서 놀라운 결과라고 생각된다.

참 고 문 헌

- 민상기, 권택호, “분포특성을 고려한 최소분산헤지의 개선방안”, 선물연구, 제3호(1995), 45-78.
- 옥기울, “Nikkei 225 선물과 최적헤지”, 재무연구, 제15호(1998) pp.101-122.
- Baillie, R. T. , “Long memory processes and fractional integration in econometrics,” *Journal of Econometrics*, 73, 1996, 5-59.
- Barkoulas, J., Labys, W. C., and J. Onochie, “Fractional dynamics in international commodity prices,” *Journal of Futures Markets*, 17, 1997,, 161-189.
- Bollerslev, T., “Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31, 1986, 307-327.
- _____, R. F. Engle and J. M. Wooldridge, “A capital asset pricing model with time-varying covariances,” *Journal of Political Economy*, 1988, 116-131.
- Cecchetti, Cumby and Figlewski, “Estimation of the optimal futures hedge,” *Review of Economics and Statistics*, 70, 1988, 623-630.
- Cheung, Y. W., “Long memory in foreign-exchange rates,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 11, 1993, 93-101.
- Cheung, Y. W. and K. S. Lai, “A Fractional Cointegration Analysis of Purchasing Power Parity,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 11, 1993, 103-112.
- Chou, W. L., K. K. F. Denis and C. F. Lee, “Hedging with the Nikkei index futures : The conventional model versus the error correction model,” *Quarterly Review of Economics and Finance*, 36, 1996, 495-505.
- Doomik, Jurgen A. and Marius Ooms, “A Package for estimating, Forecasting and Simulating Arfima Models : Arfima package 1.0 for Ox,” Discussion paper, (1999), Nuffield College, Oxford.
- Engle, R. F., “Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation,” *Econometrica*, 50, 1982, 987-1008.
- _____, and C. W. J. Granger, “Co-integration and error correction : Representation, estimation and testing,” *Econometrica*, 55, 251-276.
- Fang, H., K. S. Lai and M. Lai, “Fractal structure in currency futures prices,” *Journal of Futures Markets*, 14, 1994, 169-181.

- Geweke, J. and Porter-Hudak, S., "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models," *Journal of Time Series Analysis*, 4, 1983, 221-238.
- Ghosh, A., "Hedging with stock index futures : Estimation and forecasting with error correction model," *Journal of Futures Markets*, 13, 1993, 743-752.
- Granger, C. W. J., "Developments in the study of cointegrated economic variables," *Oxford Bulletin of Economics and Statics*, 48, 1986, 213-228.
- Hosking, J. R. M., "Fractional differencing," *Biometrika*, 68, 1981, 165-176.
- Kwiatowski, D., P. C. B. Phillips, P. Schmidt, and Y. Shin, "Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root : How sure are we that economic time series have a unit root?," *Journal of Econometrics*, 54, 1992, 159-178.
- Lee, Dongin and Peter Schmidt, "On the power of the KPSS test of stationarity against fractionally-integrated alternatives," *Journal of Econometrics*, 73, 1996, 285-302.
- Lien, D., "The effect of the cointegration relationship on futures hedging : A note," *Journal of Futures Markets*, 16, 1996, 773-780
- Lien, D. and Yiu Kuen Tse, "Fractional Cointegration and futures Hedging," *Journal of Futures Markets*, Vol 19, No. 4, 1999, 457-474.
- Myers, R. J., "Estimating time-varying optimal hedge ratios on futures markets," *Journal of Futures Markets*, 11, 1991, 39-53.
- Ooms, Marius and Jurgen Doornik, "Inference and Forecasting for Fractional Auto-regressive Integrated Moving Average Models, with an application to US and UK inflation," Discussion paper, Econometric Institute, Erasmus University Rotterdam, presented at the fourth annual meeting of the Society for Computational Economics, (1999), Cambridge, UK.
- Soofi, Abdol S., "A fractional cointegration test of purchasing power parity : the case of selected members of OPEC," *Applied Financial Economics*, 8, 1998, 559-566.
- Sowell, F., "Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models," *Journal of Econometrics*, 53, 1992, 165-188.