

분수차분 장기기억과정과 증권의 가격결정

이 일 균*

〈요 약〉

주가가 장기기억과정에 의하여 생성되면 주가과정에 가해진 충격은 쌍곡선감소율로 소멸한다. 따라서 충격의 영향이 대단히 느리게 감소하여 충격이 지속성을 가진다. 반면 주가가 단기 기억과정을 따르면 지수율로 감소하여 소멸한다. 지수율감소는 충격의 영향을 급속히 소멸시킴으로 충격의 영향이 조만간 소멸한다. 따라서 충격으로 변화된 주가는 평균으로 회귀한다. 충격의 영향이 영원히 존재하는 과정도 존재한다. 장기기억과정은 쪽거리차분과정 또는 분수차분과정이다. 차분모수가 분수일 것이 요구되는 시계열은 장기기억과정이다.

주가가 장기기억과정에 의하여 생성되고 있는지의 여부를 검정하였다. 장기기억과정을 형성시키는 차분모수는 분수차분모수이다. 일별 주가지수의 수익률을 사용하여 차분모수를 추정하였는 바 그 값이 0에 근접하고 있음이 밝혀졌다. 그러나 Kospi, Nasdaq과 Mib30은 장기기억모수가 0에 접근하고 있으나 0이 아니다. 따라서 이 지수들은 장기기억과정에 의하여 생성된다고 할 수 있다. 반면 Dow Jones, S&P 500와 Dax는 장기기억모수가 0이라는 가설이 기각되지 않고 있어 이 지수들은 단기 기억과정을 따르고 있다. 따라서 평균회귀과정에 의하여 생성되고 있음을 알 수 있다.

I. 서 론

주가가 장기기억과정에 의하여 생성되면 주가과정에 가해진 충격은 쌍곡선감소율로 소멸한다. 따라서 충격의 영향이 대단히 느리게 감소하여 충격이 지속성을 가진다. 반면 주가가 단기 기억과정을 따르면 지수율로 감소하여 소멸한다. 지수율감소는 충격의 영향을 급속히 소멸시킴으로 충격의 영향이 조만간 소멸한다. 따라서 충격으로 변화된 주가는 평균으로 회귀한다.

장기기억과정은 쪽거리차분과정 또는 분수차분과정이다. 한 시계열에 비정상성(non-

* 명지대학교 경영학과

** 유익한 조언을 주신 익명의 두분 심사위원께 감사드립니다.

stationarity)이 존재하면 서로 인접한 두 개 값의 차분을 통하여 정상성을 얻을 수 있다. 이때 차분의 정도 또는 회수를 표상하는 모수가 정수일 수도 있고 분수일 수도 있다. 차분모수가 분수일 것이 요구되는 시계열은 장기기억과정이다. 차분모수가 정수일 때의 대표적인 모형 중 하나가 적분자기회귀 이동평균모형이고 차분모수가 분수인 모형이 분수적분 자기회귀 이동평균모형이다. 단기기억과정의 대표적 모형이 자기회귀 이동평균모형이라 할 수 있다.

Geweke와 Porter-Hudak(1983)은 환율이 분수적분 자기회귀 이동평균모형에 의하여 생성되고 있다는 점을 발견한 바 있다. 李逸均(1995b)은 주가도 이 모형을 따르고 있음을 실증분석을 통하여 밝히고 있다. Lobato와 Savir(1998)는 주가가 장기기억과정에 의하여 생성되고 있음을 발견하였다. 그는 분수 일반자기회귀 조건부 이분산과정을 정립하고 실증분석을 수행하였다. 그는 주가가 장기기억과정과 단기기억과정의 혼합형태를 따르고 있으며 이 두 과정의 상호작용에 의하여 주가가 형성되고 있다는 점을 제시하고 있다. Baillie 등(1996)은 주가가 분수적분 일반자기회귀 조건부 이분산과정에 의하여 생성되고 있다는 점을 밝히고 있다. 그러나 주가가 단기기억과정에 의하여 형성되고 있다는 연구결과도 있다. Lo(1991)는 단기의존관계에 민감한 재척도 범위통계량(rescaled range statistic)을 수정하여 단기의존관계성이 제거된 수정 재척도 범위통계량을 정립하고 미국의 주가시계열에 적용한 바 주가가 단기기억과정에 의하여 생성되고 있음을 발견하였다. Porterba와 Summers(1988)는 분산비율분석 검정을 통하여 주가가 평균회귀과정을 따르고 있음을 발견하였다. Malliaropulos와 Priestly(1999)는 동남아 증권시장에서 주가가 평균에 회귀하고 있음을 제시하고 있다. 평균회귀과정은 단기과정이다. 주가가 장기기억과정에 의하여 형성되고 있다는 주장과 단기기억과정에 의하여 생성되고 있다는 주장이 현존하고 있으므로 주가가 장기기억과정에 의하여 형성되고 있는지 또는 단기기억과정에 의하여 형성되고 있는지를 규명하는 것은 중요한 과제이다.

이 논문의 목적은 주가가 장기기억과정에 의하여 생성되고 있는지 또는 단기기억과정에 의하여 생성되고 있는지를 검정하는데 있다. 이 논문에서는 차분모수를 추정하고자 한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제2장에서는 차분모수의 추정방법을 다룬다. 제3장에서는 실증분석을 수행하고 제4장에서는 결론을 제시한다.

II. 분수차분모수 추정방법

잘 알려져 있는 바와같이, 자기회귀과정, 이동평균과정과 자기회귀 이동평균과정에서 형성되는 자기공분산 함수는 지수함수율로 감소하며 0에 수렴한다. 그러나 자기공분산의 0에로의 수렴률이 지수함수율보다 상당히 느린 정상적 과정(stationary processes)이 존재하기도 하는데 이 과정을 장기기억과정이라 한다. 비정상적 과정은 차분을 통하여 정상적 과정으로 변환시킬 수 있다. 어느 시계열을 1차 차분을 통하여 변환시킨 시계열을 1차 차분의 적분과정이 되며 이를 I(1)과정이라 한다. 그런데 차분의 차수는 이론적으로 제한되어 있지 않으나 일반적으로 1이나 2이다. 통상 I(1)이면 대개 정상성이 확보되고 있다. 따라서 I(0)이나 I(1) 과정이 실제에 많이 적용되고 있는 실정이다. 그러나 I(0)과 I(1)에 의하여 서로 정상성이 형성되지 않는 시계열도 존재한다. 이같은 경우에는 분수차분을 수행하여 정상성을 얻을 수 있다. 이때 이 과정은 분수적분과정으로 I(d)이다. 물론 d는 실수이다. I(0)과정은 충격이 지수율로 소멸하고 I(1)과정은 평균회귀가 형성되지 않는 과정이다. 말하자면 충격의 결과가 영원하다. 차분모수가 실수로서 특정한 값을 가지면 I(d)과정은 충격이 쌍곡선율로 감소하여 소멸한다.

장기기억과정을 보다 엄밀하게 살펴보자. 어느 시계열 $\{y_t : t \in Z\}$ 가 존재한다고 하자. 이때 Z는 양정수의 집합이다. 이 시계열의 자기공분산을 $\gamma(\cdot)$ 라 하자. 그리고 이 시계열이 제2계 정상과정이라 하자. 어떤 적당한 $\alpha \in (0, 1)$ 와 $c > 0$ 가 존재하여 다음이 성립하면 이 시계열 $\{y_t\}$ 는 장기기억을 갖는 제2계 정상과정이라 한다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma(k)}{ck^{-\alpha}} = 1$$

그런데 시계열 $\{y_t : t \in Z\}$ 가 식 (1)을 만족하는 제2계 정상과정이며 다음을 만족하는 스펙트럼 밀도(spectral density) $f(\lambda)$ 가 존재한다.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda)}{c' |\lambda|^{-(1-\alpha)}} = 1 \tag{1}$$

이때 Γ 를 감마함수라 할 때 c' 은 다음의 값을 가진다.

$$c' = \pi^{-1} c \Gamma(1-\alpha) \text{Sin}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

4 財務管理研究

역으로 제2계 정상과정 $\{y_t\}$ 의 스펙트럼 밀도 $f(\lambda)$ 가 식 (1)을 만족하면 자기공분산 $\gamma(\cdot)$ 는 다음을 만족한다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma(k)}{ck^{-a}} = 1$$

위에서 c 는 다음과 같다.

$$c = 2c' \Gamma(a) \text{Sin} \left\{ \frac{\pi(1-\gamma)}{2} \right\}$$

따라서 장기기억의 정의는 시차가 무한대로 진행되어감에 따라 형성되는 자기공분산의 행동만을 기술하고 있음을 알 수 있다.

적분자기회귀 이동평균과정 ARIMA(p, d, q)는 차분모수 d 를 양의 정수라 할 때 $\phi(L)(1-L)^d y_t = \eta(L) u_t$ 이다. 여기에서 B 는 시차작용소(backward shift operator)이고 $\phi(L)$ 와 $\eta(L)$ 는 차수가 p 와 q 인 다항식이다. 그런데 d 가 정수가 아닌 양의 실수일 때 이 과정은 분수적분 자기회귀 이동평균과정 ARFIMA(p, q, d)이다. 임의의 실수에 대하여 $(1-L)^d$ 는 다음과 같다.

$$(1-L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-L)^k,$$

$$\binom{d}{k} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)}$$

그런데 ARFIMA(p, q, d)는 $-1/2 < d < 1/2$ 일 때 장기기억 과정이 된다.

한 시계열과정 $\{y_t\}$ 에서 $(1-L)^d y_t$ 가 정상적 과정(stationary process)이면 이 과정은 차수 d 로 적분된다고 한다. 차분모수 d 가 정수가 아닌 실수이면 이 시계열과정은 분수적분(fractional integration)된다고 한다.¹⁾ 분수차분된 시계열과정은 분수적분과정

1) 시계열에 대한 대표적 모형이면서 다른 모형의 정립의 기본요소(building block)가 되는 모형이 자기회귀과정과 이동평균과정이다. 이 두 모형의 결합적 형태가 자기회귀 이동평균과정이다. 이 과정에서 시계열의 차분이 요청되면 적분자기회귀 이동평균과정, 즉 ARIMA 과정을 얻는다. 단일 변량 시계열 y_t 의 ARIMA과정은 다음과 같다.

$$\phi(L)(1-L)^d y_t = \theta + \theta(L) a_t$$

위에서 L 은 시차작용소(lag operator)이다. a_t 는 백색잡음이다. $(1-L)^d y_t$ 는 y_t 를 d 번 차분하는 것을 의

이다. 한 시계열모형이 다음과 같다고 하자.

$$(1 - L)^d y_t = u_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \tag{2}$$

위에서 u_t 는 백색잡음과정(white noise process)이다. 정수로 차분될 때 시계열이 과도하게 차분되거나 덜 차분되는 경우에는 d 가 정수가 아닌 실수이다. 이때 분수차분작용소 $(1 - L)^d$ 는 매클로린 급수에 의하여 다음과 같은 전개를 가진다.

$$(1 - L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j - d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j + 1)} L^j$$

위에서 $\Gamma(x)$ 는 Euler 감마함수로서 그 정의는 다음과 같다.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} z^{x-1} \exp(-z) dz, \quad x > 0$$

$$\Gamma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)k!} + \int_0^{\infty} z^{x-1} \exp(-z) dz,$$

$$x < 0, x \neq -1, -2, -3, \dots$$

자기회귀모수와 이동평균모수가 각각 0이고 적분모수가 분수적분모수 d 인 분수차분 자기회귀 이동평균과정, 즉 ARFIMA(0, d , 0)과정의 j 번째 자기상관(autocorrelation)은 다음과 같다.²⁾

미한다. 따라서 y_t 는 d 개 단위근을 갖게되며 차수 d 로 적분하게 된다. 표준적인 ARIMA과정에서 차분모수 d 는 양의 정수이다. 실증분석을 통하여 밝혀진 바는 적분차수는 일반적으로 0과 1이며 때로는 2가 되는 경우도 존재 한다. 그러나 분수 브라운 운동과정이 본격적으로 정의되고 이 과정이 수자원의 연구에 많이 사용되면서 d 가 정수가 아닌 실수로도 정의하여 사용하는데도 관심의 폭이 확대되었다. 분수차분화(fractional differencing)는 장기기억을 모형화하는데 큰 기여를 하고 있다. 차분계수 d 가 0이나 1일 때, y_t 는 I(0)과 I(1)과정이다. I(1)에서 자기회귀상관함수는 선형으로 감소한다. I(0)에서는 y_t 는 정상성을 가지며 자기회귀 상관함수는 지수적으로 감소한다. 따라서 단기기억과정이다. d 의 값이 $d \in (-0.5, 0.5)$ 일 때 이 시계열은 장기기억과정이다.

장기지속성(long persistence)은 시계열의 값이 크면 차기에도 큰 값을 갖고 낮으면 차기에도 낮은 값을 갖는 경향이 있다는 것을 의미한다. 이와 같은 장기기억을 표상하는 모형이 분수적분 ARIMA, 즉 ARFIMA(p, d, q) 모형이다. 이 모형은 Hosking(1981)과 Granger와 Joyeux(1980)가 심도있게 분석하였다.

2) ARFIMA(p, d, q)에서 회귀모수 $\phi(L)$ 과 이동평균모수 $\theta(L)$ 의 모든 근은 단위원 외부에 존재한다. $0 < d < \frac{1}{2}$ 이면 이 모형의 자기회귀 상관함수는 쌍곡선적으로 감소한다. 즉 $\rho_k \sim k^{-\epsilon}$ 이다. 이 감소는 $d=0$ 인 ARMA과정의 지수적 감소보다 상당히 느리다. 지수적 감소는 $0 < \epsilon < 1$ 에 대하여 $\rho_k \sim \epsilon^k$ 이다. 따라서 장기기억의 성질을 갖는다. 그러나 ARMA는 단기기억을 표상하는 과정이다. $d \geq \frac{1}{2}$ 이면 시계열 y_t 의 분

$$\rho_j(d) = \prod_{i=1}^j \frac{d+i-1}{i-d}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

표본자기상관계수는 \bar{y} 를 y_t 의 평균이라 하면 다음과 같다.

$$\hat{\rho}_j = \frac{\sum_{t=1}^{t-j} (y_t - \bar{y})(y_{t+j} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2} \quad (4)$$

ARFIMA(0, d, 0)과정의 분수차분모수 d 를 추정하기 위하여 Tieslau 등(1996)과 Chong(2000)은 최소거리 추정량(minimum distance estimator)을 개발하였는데, 이 방법은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{d} &= \text{Argmin } S(d) \\ d &\in (-0.5, 0.25) \end{aligned} \quad (5)$$

위에서 S 는 행렬로 다음과 같다.

$$S(d) = [\hat{\rho} - \rho(d)]C^{-1}[\hat{\rho} - \rho(d)] \quad (6)$$

여기에서 $\rho(d)$ 와 $\hat{\rho}$ 는 n 벡터이다. C 는 $\hat{\rho}$ 의 점근 분산·공분산 행렬이며 이 행렬의 (i, j) 원소는 다음과 같다.

$$C_{ij} = \sum_{s=1}^{\infty} (\rho_{s+i} + \rho_{s-i} - 2\rho_s \rho_i)(\rho_{s+j} + \rho_{s-j} - 2\rho_s \rho_j) \quad (7)$$

산은 무한이다. 따라서 이 시계열은 非定常性을 가진다.

시계열 y_t 가 ARFIMA(0, d, 0)과정을 따를 때, $d < 1/2$ 이면 정상과정이고 무한의 이동평균 모형으로 표현된다. 그러나 $d > 1/2$ 일 때에는 y_t 는 可逆的(invertible)이고 무한의 자기회귀모형으로 표현된다. 따라서 $-1/2 < d < 1/2$ 일 때 y_t 는 정상적이고 가역적이다. $d > 0$ 이면 y_t 는 장기지속과정이다. 장기지속성은 자기상관함수가 쌍곡선적으로 감소함을 의미한다. $0 < d < 1/2$ 이면 ARFIMA(0, d, 0)과정은 장기기억 정상과정이다. 그리고 y_t 의 상관계수와 부분상관계수는 양수이고 단조 쌍곡선감소이다. ARFIMA(0, d, 0)에서 d 가 구간 $[-1/2, 1/2]$ 에 놓일 때까지 y_t 를 차분화해야 한다. 이렇게 얻어진 시계열은 정상적이고 가역적이다. 그러나 $d = \pm 1/2$ 일 때에는 d 차분을 통 하여 얻은 시계열과정은 정상적이거나 아니면 가역적이다. 그러나 두 조건이 동시에 충족되는 과정은 아니다. ARFIMA(0, 1/2, 0)과정은 이산시간 $1/f$ 잡음이다. ARFIMA(0, 0, 0)과정은 상관계수가 0이고 분광밀도가 일정한 백색잡음과정이다. $-1/2 < d < 0$ 일 때 ARFIMA(0, d, 0)과정은 단기기억을 가지며 반지속성(anti-persistence)을 가진다. 이 과정의 자기상관계수와 부분상관계수들은 $\rho_0 = 1$ 인 경우를 제외하면 모두 음수이며, 단조쌍곡선적으로 감소할 때 ARFIMA(0, -1/2, 0)은 정상적이지만 비가역적이다.

Chong(2000)은 Tieslau 등(1996)의 차분모수 추정방법에는 모수 d의 추정에서 제1차 자기상관을 사용하지 않을 때 efficiency가 상당한 손실을 입는다는 점을 증명하였다. 그리고 이 efficiency loss를 제거하기 위한 방법을 제시하였다. 이 방법을 간략히 보면 다음과 같다.

Chong은 Tieslau와는 달리 표본편상관함수를 사용하여 적률조건을 형성시키고 이를 이용하여 추정량을 도출하고 있다. 분수백색잡음과정의 n차 편상관함수는 다음과 같다.

$$\alpha_n(d) = \frac{d}{n-d} \tag{8}$$

위 식은 Hosking(1981)이 증명한 방정식이다. n=1이면 편상관함수는 자기상관과 일치한다. $\alpha_n(d)$ 는 모든 n에 대하여 d와 오직 하나의 관계, 즉 유일한 관계를 형성하고 있다. 따라 $\alpha_n(d)$ 만을 사용하거나 또는 $\alpha_n(d)$ 의 조합을 사용하여 d의 추정량을 도출할 수 있다.

Y와 $\rho(n)$ 은 벡터로 다음과 같이 정의하자.

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_T)'$$

$$\rho(n) = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)'$$

$$X_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ y_1 & 0 & \dots & 0 \\ y_2 & y_1 & \dots & 0 \\ & y_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & 0 \\ & & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & y_1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ & & \dots & \cdot \\ y_{T-1} & y_{T-2} & \dots & y_{T-n} \end{pmatrix}$$

그러면 위의 데이터를 이용하여 회귀계수를 추정할 수 있다. $\hat{\beta}(n)$ 을 회귀계수가 벡터라 하면 이 계수들은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}(n) &= (\widehat{\beta}_{n,1}, \widehat{\beta}_{n,2}, \dots, \widehat{\beta}_{n,n-1}, \widehat{\beta}_{n,n})' = (X_n' X_n)^{-1} X_n' Y \quad (9) \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{t=2}^T y_{t-1}^2 & \sum_{t=3}^T y_{t-1} y_{t-2} & \cdots & \sum_{t=n+1}^T y_{t-1} y_{t-n} \\ \sum_{t=3}^T y_{t-1} y_{t-2} & \sum_{t=3}^T y_{t-2}^2 & \cdots & \sum_{t=n+1}^T y_{t-2} y_{t-n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{t=n+1}^T y_{t-1} y_{t-n} & \sum_{t=n+1}^T y_{t-2} y_{t-n} & \cdots & \sum_{t=n+1}^T y_{t-n}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=2}^T y_t y_{t-1} \\ \sum_{t=3}^T y_t y_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{t=n+1}^T y_t y_{t-n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

모든 t 에 대하여 기대값은 $E(y_t) = 0$ 이라고 가정한다. 위 행렬의 각 원소를 $\sum_{t=2}^T y_t^2$ 으로 나누고 확률극한을 취하면 다음을 얻는다.

$$\widehat{\beta}(n) \xrightarrow{p} \Phi(n-1)^{-1} \rho(n) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(n)$$

위에서 $\Phi(n-1)$ 은 $(n \times n)$ 의 Toeplitz 행렬이며 다음과 같다.

$$\Phi(n-1) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

그런데 벡터 $\widehat{\beta}(n)$ 의 원소들은 확률에서 d 의 함수로 수렴한다. $\widehat{\beta}(n)$ 의 n 번째 원소의 확률극한은 다음과 같다.

$$\widehat{\beta}_{n,n} \xrightarrow{p} \frac{d}{n-d} = \alpha_n(d)$$

따라서 n 차 표본편자기상관은 y_t 를 $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-n}$ 에 회귀시킬 때 y_{t-n} 의 추정된 계수로부터 얻을 수 있다.

다음과 같이 정의하자.

$$\Omega = \lim_{T \rightarrow \infty} T \begin{pmatrix} \text{var}(\widehat{\beta}_{1,1}) & \text{cov}(\widehat{\beta}_{1,1}, \widehat{\beta}_{2,2}) & \cdots & \text{cov}(\widehat{\beta}_{1,1}, \widehat{\beta}_{n,n}) \\ \text{cov}(\widehat{\beta}_{2,2}, \widehat{\beta}_{1,1}) & \text{var}(\widehat{\beta}_{2,2}) & \cdots & \text{cov}(\widehat{\beta}_{2,2}, \widehat{\beta}_{n,n}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{cov}(\widehat{\beta}_{n,n}, \widehat{\beta}_{1,1}) & \text{cov}(\widehat{\beta}_{n,n}, \widehat{\beta}_{2,2}) & \cdots & \text{var}(\widehat{\beta}_{n,n}) \end{pmatrix} \quad (11)$$

차분모수 d 의 추정량은 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{d} = \underset{d \in (-0.5, 0.25)}{\text{Argmin}} \quad S(d) \quad (12)$$

위에서 $S(d)$ 는 행렬로 다음과 같다.

$$S(d) = [\hat{\alpha} - \alpha(d)]' W [\hat{\alpha} - \alpha(d)]$$

여기에서 여기서 벡터 $\hat{\alpha}$ 와 $\alpha(d)$ 는 다음과 같다.

$$\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1(d), \hat{\alpha}_2(d), \dots, \hat{\alpha}_n(d))' = (\hat{\beta}_{1,1}, \hat{\beta}_{2,2}, \dots, \hat{\beta}_{n,n})' \quad (13-1)$$

$$\alpha(d) = (d/(j-d)), j = 1, 2, \dots, n \quad (13-2)$$

여기에서 $\alpha(d)$ 는 n 벡터이고 동시에 행벡터이다. 가중치행렬 W 는 대칭의 양정치행렬로 Ω^{-1} 인데, 이 점은 잠시뒤에 살펴보도록 하겠다. 식 (12)의 최적화에 대한 해를 구하기 위해서는 $\alpha(d)$ 의 제1차 도함수가 필요하다. 이 도함수는 다음과 같다.

$$D = \frac{\partial \alpha(d)}{\partial d} = \left(\frac{1}{(1-d)^2}, \frac{2}{(2-d)^2}, \dots, \frac{n}{(n-d)^2} \right) \quad (14)$$

목적함수 (12)의 제1차 도함수와 제2차 도함수는 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial S(d)}{\partial d} = -2D' W [\hat{\alpha} - \alpha(d)] \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 S(d)}{\partial d^2} = 2D' W^{-1} D + o_p(1) \quad (16)$$

정상적 과정 y_t 에서는 추정량 $\hat{\beta}_{j,j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$)은 점근적으로 정규성을 가진다. 따라서

$$\sqrt{T} [\hat{\alpha} - \alpha(d)] \xrightarrow{d} N(0, \Omega)$$

$S(d)$ 의 도함수를 좀 더 고찰해 보자.

$$\frac{\partial S(d)}{\partial \hat{d}} = \frac{\partial S(d)}{\partial d} + \frac{\partial^2 S(d)}{\partial d^2} (\hat{d} - d) = 0$$

위에서 d_* 는 d 와 \hat{d} 사이에 있다. $(\hat{d} - d)$ 에 대하여 풀면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \hat{d} - d &= - \left[\frac{\partial^2 S(d)}{\partial d^2} \right]^{-1} \frac{\partial S(d)}{\partial d} \\ \sqrt{T} \frac{\partial S(d)}{\partial d} &\xrightarrow{d} N(0, 4D'W\Omega WD) \\ \sqrt{T}(\hat{d} - d) &\xrightarrow{d} N(0, [D'WD]^{-1}D'W\Omega WD[D'WD]^{-1}) \end{aligned}$$

따라서 대칭의 양정치 가중행렬 W 는 $W = \Omega^{-1}$ 이다. 최적의 경우 다음을 얻는다.

$$\sqrt{T} [\hat{d} - d] \xrightarrow{d} N(0, [D'\Omega^{-1}D]^{-1}) \quad (17)$$

벡터 $L(i)$ 가 i 벡터이고 $L(i) = (0, 0, \dots, 0, 1)$ 이라 하자. 즉 원소가 i 개인 행벡터이다. 분산·공분산행렬 Ω 의 (l, m) 원소는 다음과 같다.

$$\Omega_{l,m} = \lim_{T \rightarrow \infty} T [L(l)E(\hat{\beta}(l) - \beta(l))(\hat{\beta}(m) - \beta(m))L(m)'] \quad (18)$$

위 식으로부터 다음을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{\alpha}_l(d), \hat{\alpha}_m(d)) &= \text{cov}(\hat{\beta}_{l,l}, \hat{\beta}_{m,m}) \\ &= L(l)\Phi(l - l)^{-1}\Psi(l, m)\Phi(m - l)^{-1}L(m)' \quad (19) \end{aligned}$$

여기에서 $\Psi(l, m)$ 의 (i, j) 원소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Psi(l, m)_{i,j} &= c_{i,j} - \sum_{h=1, h \neq i}^l \beta_{l,h} c_{|i-h|,j} - \sum_{k=1, k \neq j}^m \beta_{m,k} c_{|j-k|,i} \\ &\quad + \sum_{h=1, h \neq i}^l \sum_{k=1, k \neq j}^m c_{|i-h|,|k-j|} \beta_{l,h} \beta_{m,k} \end{aligned} \quad (20)$$

목적함수 (12)의 최적화를 기하기 위하여 필요한 제1차 및 제2차 도함수가 구하여졌으며, 제1차 및 제2차 도함수에 필요한 W 와 Ω 가 구하여 졌으므로 이것들을 이용하여 분수적분모수 d 를 추정할 수 있다. 이때에는 비선형 계산방법, 예컨대 Newton-

Raphson의 방법에 의하여 적분모수를 용이하게 구할 수 있다. 그리고 식 (17)에 의하여 검정통계량을 구할 수 있다. 보다 구체적으로 위에서 제시한 식들을 사용한 추정절차를 구체적으로 설명하면 다음과 같다.

모수추정은 식 (15)와 (16)을 사용한다. Newton-Raphson방법이나 BHHH(Berndt, Hall, Hall and Gausman)방법에 의하여 비선형 방정식의 모수를 추정할 수 있다. 모수 추정은 제1차도함수와 제2차도함수의 결합으로 이루어지는 함수이다. 이 추정방법은 추정모수를 β 라 하고 n 번째의 추정값을 β_n 이라하고 $\partial L / \partial \beta$ 를 목적함수의 제1차 편도함수라 하면 다음과 같다.

$$\beta_{n+1} = \beta_n - P_n \frac{\partial L}{\partial \beta} \Big|_{\beta_n}$$

위에서

$$P_n = \begin{cases} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta'} \right]^{-1} \Big|_{\beta_n} & \text{(Newton-Raphson 방법)} \\ - \left[\sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial L_t}{\partial \beta} \right) \left(\frac{\partial L_t}{\partial \beta} \right)' \right]^{-1} \Big|_{\beta_n, \sigma_n^2} & \text{(BHHH 방법)} \end{cases}$$

식 (15)의 D는 식 (14)에 의하여 구하며 $\hat{\alpha}$ 와 $\alpha(d)$ 식 (13)에 의하여 계산한다. 특히 $\alpha(d)$ 는 식 (8)에 의하여 구할 수 있다. 식 (15)와 (16)의 W와 W^{-1} 는 $W = \Omega^{-1}$ 이므로 식 (11)에 의하여 구한다. 식 (11)의 행렬 Ω 의 각 원소는 식 (18)에 의하여 계산한다. 식 (18)의 공분산은 식 (19)를 사용하여 추정한다. 그리고 식 (19)의 행렬 Ψ 의 각 원소는 식 (20)에 의하여 계산한다. 검정통계량은 식 (17)에 의하여 얻게 되는데 이 식은 D와 W의 함수이다. 위에서 이에 D와 W를 구했으므로 검정통계량을 용이하게 계산할 수 있다.

제III장의 <표 3>에서 시차가 1부터 9까지이다. 위에서 제시된 방정식 중 하첨자(subscript) n은 시차를 의미한다. 시차가 1일 경우 X_n 행렬은 X_1 이 된다. 시차가 2일 경우에는 X_n 이 X_2 이다. 시차가 9일 때 X_n 은 X_9 이다. 이에 따라서 식 (9)가 시차 1에서부터 시차 9까지의 각각의 β 를 구할 수 있게 해준다. 각 시차에 따라 모든 방정식의 값이 다르다. 따라서 각 시차에 대하여 모수와 검정통계량을 구할 수 있다.

Ⅲ. 실증분석

앞절에서 논의한 추정식을 통해 분수차분모수를 추정하려고 한다. 이를 위하여 사용한 데이터는 한국의 Kосpi, 미국의 Dow Jones, Nasdaq, S&P 500, 독일의 Dax와 이탈리아의 Mib30이다. 모두 일별주가지수 수익률을 사용하였으며 표본기간은 1980~1999년이다.

주가지수 수익률의 기술통계량을 제시하면 <표 1>과 같다. 이 표에 의하면 이탈리아의 Mib30의 수익률이 가장 크고 Nasdaq이 그 다음을 차지하고 있다. 한국의 Kосpi의 일별 수익률이 오히려 가장 작다. 표준편차는 Mib30이 가장 높다. 미국의 S&P 500와 Dow Jones의 수익률은 유사한데 표준편차는 오히려 Dow Jones가 높다. Kосpi의 평균수익률이 S&P 500의 평균수익보다 낮음에도 불구하고 Kосpi의 표준편차가 S&P 500의 표준편차보다 오히려 크다. 한국의 주식시장은 일반적으로 신흥시장(emerging market)이라고 분류되는 것 같다. 이 시장의 특성은 진폭성(volatility)이 높지만 그만큼 수익도 높다는 것인데, 이 표에 의하면 한국시장은 이같은 특성을 결여하고 있다는 인상이 짙다.

<표 1> 기술통계량

지 수	평 균	표 준 편 차
Kосpi	0.00041	0.01431
Dow	0.00052	0.01016
Nasdaq	0.00066	0.01092
S&P500	0.00053	0.00991
Dax	0.00057	0.01178
Mib30	0.00082	0.01467

분수차분모수는 시계열상관을 기본으로 하여 추정되고 있다. 이 상관계수의 움직임 을 파악하기 위하여 시계열 상관계수를 구하였는 바, 이를 제시하면 <표 2>와 같다. 시계열상관계수는 제1계가 Kосpi에 있어 약 0.14이고 Nasdaq과 Mib 30이 각각 약 0.11이다. 그 이외에는 상당히 작다. 그리고 급속히 감소하고 있다. 그러나 시차 10에 이르면 시계열 상관이 상당히 안정된 값을 취하고 있는 것으로 보인다. <표 2>의 시계열 상관계수는 지수율로 급격히 소멸하는 양태를 띄고 있음을 볼 수 있다. 시차 초기의 시계열 상관만으로서의 추가수익률이 장기기억과정을 따르고 있는지의 여부를 판별하기

가 용이하지 않다. 오히려 단기과정을 따르고 있는 것 같이 보인다. 그러나 시차 10에 이르면 상당히 안정되어 있으므로 주가시계열은 초기단계는 지수감소율로 감소하다가 일정 기간이 경과한 후에 쌍곡선율로 감소하는 양태를 따를 수 있다. 따라서 초기에는 지수율로 그 다음에는 쌍곡선율로 주가의 시계열 상관이 감소하여 소멸하는 과정을 따르고 있다는 상정도 가능하다.

<표 2> 자기상관

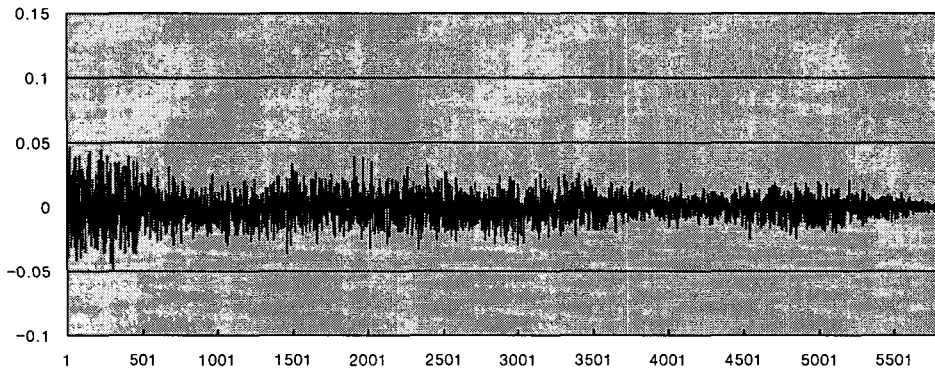
시 차	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kospi	0.1383	-0.0307	0.0090	-0.0062	-0.0353	-0.0391	-0.0038	-0.0010	0.0377	0.0164
Dow	0.0207	-0.0376	-0.0334	-0.0281	0.0301	-0.0093	-0.0263	-0.0157	-0.0039	0.0242
Nasdaq	0.1095	0.0380	0.0087	0.0108	0.0048	0.0020	-0.0056	0.0201	-0.0078	0.0174
S&P500	0.0324	-0.0263	-0.0448	-0.0258	0.0196	-0.0095	-0.0301	-0.0096	-0.0076	0.0161
Dax	0.0206	-0.0450	-0.0154	0.0082	0.0311	-0.0566	-0.0011	-0.0008	0.0144	0.0167
Mib30	0.1129	-0.0128	0.0058	0.0308	-0.0040	-0.0098	-0.0341	-0.0004	0.0219	0.0435

이 점을 보다 잘 살펴보기 위하여 Kospi의 시계열 상관을 그래프화 하였다. 이를 제 시하 면 [그림 1]과 같다. [그림 1]에 의하면 시계열 상관이 궁극적으로 소멸하고 있으나 상당한 변동성을 가지고 있음을 알 수 있다. 따라서 시계열 상관이 지수적 감소율로 소멸한다고 보기는 어렵다. 그러나 일정기간이 지나면 시계열 상관은 상당한 안정성을 유지하면서 서서히 감소하고 있음을 볼 수 있다.³⁾ 주가 수익률의 시계열상관만

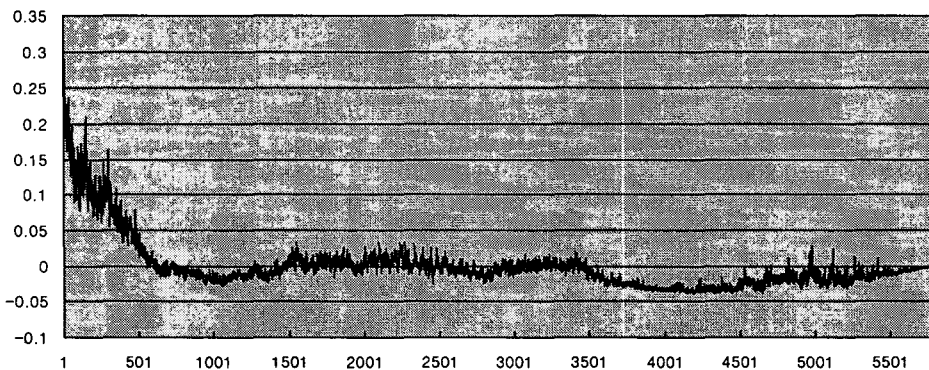
3) $\phi(L)(1-L)^d y_t = \theta(L) a_t$ 의 ARFIMA(p, d, q)에서 $d < 1/2$ 이면 y_t 는 정상적이고 $\phi(z) = 0$ 의 모든 근은 단위원 외부에 존재한다. $d > 1/2$ 이면 y_t 는 가역적이고 $\theta(z) = 0$ 의 모든 근은 단위원 외부에 존재한다. $-1/2 < d < 0$ 일 때 각 충격은 다른 충격들과 음의 상관관계를 갖는다. 따라서 부분합의 분산은 개별충격의 분산보다 작게 증가한다. d 가 $-1/2$ 근방에 있으면 음의 공분산들은 충격의 합산분산을 거의 모두 상쇄한다. $0 < d < 1/2$ 일 때 충격들은 양의 상관을 가지며 합산의 분산은 개별충격의 분산보다 빠르게 증가한다. d 가 $1/2$ 의 근처에 있으면 부분합의 분산의 증가는 거의 2차형이다. $d \geq 1/2$ 이면 ARFIMA(p, d, q)는 비정상적이다. $0 < d < 1/2$ 이면 이 과정은 상관구조가 분수 Gauss 잡음과 유사한 정상장기기의 과정이다. $d=0$ 이면 단기기의 ARMA 과정이고 $-1/2 < d < 0$ 일 때 빈도 0에서 소멸(vanish)되는 분광밀도를 가지며 비지속성 과정이다. 차분모수 d 가 $-1/2 < d < 1/2$ 이면 이 과정은 공분산 정상과정(covariance stationary process)이다. $d < 1$ 이면 평균 회귀를 의미한다. 분수백색 잡음과정은 $(1-L)^d y_t = a_t$ 이며 이에 대응되는 무한의 자기회귀모형은 $\pi_j = \Gamma(j-d)/\{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)\}$ 이라 할 때 $y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j y_{t-j} + a_t$ 이다. $\rho_j \approx \{\Gamma(1-d)/\Gamma(d)\} j^{-(2d-1)}$ 이다. 이같은 의미에서 I(d) 과정은 I(0) 과정과 I(1) 과정 사이에 존재한다고 할 수 있다. 요컨대, ARFIMA(p, d, q) 과정은 시계열의 단기 및 장기 의존구조의 모형화를 가능하게 해주는 과정인 것이다. d 모수가 0이면 이 시계열은 장기 의존관계를 갖지 않는다. $d > 0$ 이면 시차가 증가함에 따라 자기상관이 쌍곡선적으로 감소하며 빈도 0에서 분광밀도가 무한이라는 사실은 지속성이 존

으로서는 수익률시계열이 단기 기억과정에 의하여 생성되고 있는지 또는 장기 기억과정에 의하여 생성되고 있는지를 판단하기가 어려우므로 주가수익률의 제공값과 절대값의 시계열 상관을 하였다. 이를 [그림 2]와 [그림 3]으로 제시한다. 이 그림에 의하면 초기에는 시계열 상관이 지수율로 감소하고 있다. 그러나 일정시간이 지나면 무척 완만한 속도로 감소하여 소멸함을 볼 수 있다. 따라서 주가시계열이 장기 기억과정에 의하여 생성되고 있을 가능성이 상당히 높다. 지면을 위하여 여기에서는 할애하였는데, 외국의 다른 지수들도 KOSPI와 유사한 양태를 보여주고 있다. 이에 대한 엄밀한 검토가 요청되고 있다. 이 그림들에 의하면 종합주가지수의 수익률에는 조건부 이분산이 존재하고 있음을 알 수 있다. 이 점은 특히 수익률의 제공의 자기상관을 통하여 알 수 있다.

[그림 1] 수익률의 시계열상관

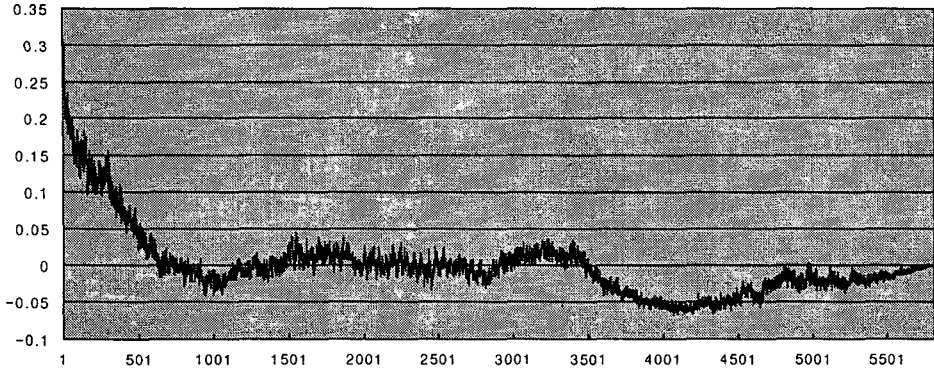


[그림 2] 수익률자승의 시계열상관



제한다는 것을 의미한다. 자기 상관의 쌍곡선적 감소는 이 과정이 점근적 자기닮음과정을 의미한다.

[그림 3] 수익률절감값의 시계열상관



<표 3> 차분모수

시 차	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kospi	0.1223 (0.0136)	0.1083 (0.0126)	0.0939 (0.0121)	0.0898 (0.0114)	0.0811 (0.0109)	0.0741 (0.0107)	0.0666 (0.0104)	0.0610 (0.0104)	0.0553 (0.0102)
Dow	0.0227 (0.0175)	0.0044 (0.0158)	-0.0029 (0.0152)	-0.0077 (0.0150)	-0.0005 (0.0145)	-0.0007 (0.0142)	-0.0036 (0.0142)	-0.0048 (0.0142)	-0.0042 (0.0143)
Nasdaq	0.1013 (0.0159)	0.0961 (0.0141)	0.0912 (0.0135)	0.0867 (0.0129)	0.0835 (0.0122)	0.0790 (0.0116)	0.0733 (0.0108)	0.0644 (0.0097)	0.0505 (0.0065)
S&P500	0.0340 (0.0173)	0.0178 (0.0153)	0.0067 (0.0148)	0.0017 (0.0145)	0.0061 (0.0141)	0.0059 (0.0138)	0.0030 (0.0137)	0.0020 (0.0137)	0.0021 (0.0138)
Dax	0.0224 (0.0175)	0.0046 (0.0164)	0.0025 (0.0159)	0.0032 (0.0156)	0.0097 (0.0151)	0.0065 (0.0150)	0.0076 (0.0151)	0.0078 (0.0150)	0.0078 (0.0151)
Mib30	0.1036 (0.0153)	0.0921 (0.0142)	0.0837 (0.0139)	0.0826 (0.0133)	0.0821 (0.0128)	0.0766 (0.0123)	0.0726 (0.0118)	0.0662 (0.0112)	0.0584 (0.0103)

* : 괄호는 표준오차임.

** : 시차는 제II장의 방정식들의 하첨자(subscript) n을 의미한다. 예컨대 시차2의 경우 $x_n = x_2$ 이다.

분수차분모수의 추정값은 <표 3>과 같다. 이 표에서 시차는 앞 장의 방정식들의 하첨자 n을 의미한다. n이 1이면 시차는 1이다. 앞 장의 변수 X_n 은 시차 1일 때 X_1 이고, 시차 3이면 X_3 이다. 시간시차에 따라 각 방정식의 크기가 결정된다. 즉 행렬의 크기가 정해진다. 말하자면 시차 n이 2이면 X_2 는 $T \times 2$ 행렬이 된다.

<표 3>에 의하면 시차가 증가함에 따라 분수차분모수의 값이 서서히 감소하고 있다. 예컨대 Kospi에 있어서 시차 1에 있어서는 모수의 추정값이 약 0.12이지만 시차가

너무 짧아 큰 의미를 부여하기가 어렵다. 그런데 시차 9에 이르면 이 값은 약 0.05이다. 그러나 이 시차에 이르면 모수의 추정치는 안정적인 값을 유지하고 있다. 이같은 형상은 Nasdaq과 Mib30 지수에 있어서도 유사하다. 차분모수, 즉 장기기억과정 모수가 0에 접근하고 있으나 0이라는 결론을 내리기는 어렵다. 그러나 Dow Jones, S&P 500과 Dax는 차분모수가 0이라는 가설을 기각하는데 실패하고 있다. 즉 이 지수들에 있어서는 장기기억과정이 기각되고 있다.⁴⁾ 따라서 Kospi, Nasdaq과 Mib30는 장기기억과정을 따르고 있으며, Dow Jones, S&P 500와 Dax는 단기기억과정 즉 I(0)과정을 따르고 있다고 할 수 있다.

그러면 종합주가지수 수익률의 시계열은 I(0)이라 할 수 없다. I(0)의 적분과정은 정상적·어고딕과정(stationary ergodic process)이다. 이일균(2000a)은 비선형 이산시간 마코브과정들 간의 공시운동을 규명하고 있는데, 그는 증분 디키·풀러(augmented Dickey-Fuller)검정을 통하여 종합주가지수의 수익률이 단위근과정을 따르고 있지 않고 정상성·어고딕과정을 따르고 있음을 발견한 바 있다. 그는 Kwiatkowski 등(1996)의 검정법에 의하여 검정해도 종합주가지수의 수익률 시계열이 정상성·어고딕과정, 즉 I(0)과정에 의하여 생성된다는 결과를 얻고 있다. 말하자면 주가시계열이 0개의 단위근을 가진다. 본 논문의 결과는 이일균(2000a)의 결과와 일치하지 않고 있다. 이 논문의 결과는 Kospi, Nasdaq과 Mib30지수의 시계열은 비선형과정에 의하여 생성된다는 가설이 기각되지 않는다.

차분모수 d 가 0이면 시차작용소 $(1-L)^d$ 는 $(1-L)^d = (1-L)$ 이 된다. 이 경우 $(1-L)^d y_t = (1-L)y_t = y_t - y_{t-1} = u_t$ 이다. 제1차 차분이 백색잡음과정을 따르고 있다. 그렇다면 이 시계열이 마팅게일 차분과정(martingale difference process)에 의하여 생성될 수도 있다. 그러나 이일균(2000b)은 종합주가지수의 수익률 시계열이 마팅게일 차분과정을 따른다는 가설을 Anderson-Darling 검정법, Kolmogorov-Smirnov 검정법, Kuiper 검정법과 Cramér von-Mises 검정법을 사용하여 검정한 바 이 가설이 기각되었음을 발견하였다. 따라서 경제에 미친 충격의 영향이 영구적으로 존재하고 있다고 보는 보기가 어렵다.

결함이 전혀 없는 검정방법들은 드문 것 같다. 제1형 오류나 제2형 오류가 존재하는 경우가 흔하다. 디키·풀러검정법은 단위근의 비존재를 귀무가설로 하고 있으며,

4) ARMA 모형에서 AR 다항식에 단위근이 존재하는 시계열은 $d=1$ 이고, MA 다항식에 단위근이 존재하는 시계열은 $d=-1$ 이며 동시에 비가역적이다. 그러나 AR과 MA 다항식에서는 모든 근들이 단위원 외부에 있는 시계열은 $d=0$ 이고 정상적이며 가역적이다.

Kwiatowski등의 검정법은 단위근의 존재를 귀무가설로 하는 검정법이다. 그리고 앞에서 이일균이 사용한 마팅계일과정을 귀무가설로 하는 여러 검정법은 마팅계일과정은 직접 검정하는 방법이다. 이 여러방법들은 검정력에 문제가 존재하고 있다. 이 논문에서 다른 모든 지수들은 장기기억모수가 0에 접근하고 있다. 장기모수가 0에 접근하고 있는 만큼 어느 검정방법은 이것을 0으로 인식하고 다른 것은 0이 아닌 값으로 인식하고 있다는 감이 짙다. 따라서 보다 엄밀하고 검정력도 높은 방법의 개발이 필요하다고 할 수 있다.

어느 시계열의 차분모수 d 는 그 값이 $(-0.5, 0.25)$ 사이에 있으면 이 시계열은 장기기억과정에 의하여 생성된다. 종합주가지수의 수익률에 있어서 d 의 값이 0이 아니고 0에 근접하고 있는 값이라면 종합주가지수를 비롯하여 Nasdaq과 Mib30은 장기기억과정을 따르고 있다고 할 수 있다. 미국이라는 동일한 경제아래에 경제활동을 전개하고 있는 Dow Jones와 S&P 500시장이 Nasdaq시장과는 달리 단기기억과정을 따르고 있으며 이에따라 평균회귀가 발생하고 있다는 점이 발견되었다. 이 같은 현상은 특이한 현상이므로 이에 대한 연구가 요청되고 있다. 아울러 Kospi, Nasdaq과 Mib30 주가지수의 장기기억성은 조건부 이분산에 의하여 발생하고 있을 가능성도 존재한다. 이 점도 규명이 요청된다고 할 수 있다.

IV. 결 론

주가가 장기기억과정에 의하여 생성되고 있는지의 여부를 검정하였다. 장기기억과정을 형성시키는 차분모수는 분수차분모수이다. 일별 주가지수의 수익률을 사용하여 차분모수를 추정하였는 바 그 값이 0에 근접하고 있음이 밝혀졌다. 그러나 Kospi, Nasdaq과 Mib30은 장기기억모수가 0에 접근하고 있으나 0이 아니다. 따라서 이 지수들은 장기기억과정에 의하여 생성된다고 할 수 있다. 그러나 Dow Jones, S&P 500와 Dax는 장기기억모수가 0이라는 가설이 기각되지 않고 있어 이 지수들은 단기기억과정을 따르고 있다. 따라서 평균회귀과정에 의하여 생성되고 있음을 알 수 있다.

자본시장에 장기기억이 존재하고 있는가 또는 존재하고 있지 않는가는 투자론에서 매우 중요한 과제이다. 최적소비·투자결정이나 포트폴리오 결정은 주식의 수익률이 장기적 의존성을 가지면 투자기간에 극도로 민감하다. 따라서 장기적 의존성이 존재하면 자본자산의 보유기간이 짧을 경우에 자본자산 가격결정모형이 예측해주는 값보다는 보유기간이 장기일 때 자본자산 가격결정모형이 예측값으로 제공하는 값이 높은 신뢰

도를 갖게 된다. 뿐만아니라 옵션의 가격결정을 예측하는데에도 장기기억이 중요시된다. 충격이 조건부평균에 장기적으로 영향을 미치고 있으나 궁극적으로는 소멸하는 경우와 충격이 분산에 가해져 오랜동안 영향을 지속한 후 소멸하는 경우도 있다. 후자의 경우 충격은 분산과정안에서 존재하고 조건부 평균과정으로 이동할 필요가 없다. 충격이 이같은 특징을 가지면 분산의 값에 민감한 옵션의 가격결정에 장기기억이 큰 영향력을 행사하게 된다. 뿐만아니라 분산이 장기기억 과정을 따르고 있을 때 분산의 예측이 가능하므로 보다 정확한 옵션의 가격을 결정할 수 있다. Black-Scholes의 옵션 가격결정모형을 비롯한 옵션 가격결정모형은 기저자산(underlying asset)의 분산을 제외한 모든 외생변수의 값이 알려져 있는 값이다. 그러나 분산은 추정해야 한다. 옵션 가격결정모형들이 제시하는 옵션 가격의 정확도는 분산의 예측치의 정확도에 의존한다. 그러므로 기저자산이 장기기억과정을 따를 때 장기기억모수는 자기상관에 의하여 결정되므로 자기상관(자기공분산)의 예측의 정확도가 증가하게되어 보다 정확하게 측정할 수 있다. 따라서 옵션의 가격을 보다 정확하게 예측할 수 있다.

옵션의 가격을 도출하기 위하여 사용되는 확률과정은 마팅게일과정이다. 이 과정은 영구기억과정이다. 장기기억과정과 영구과정은 성질들이 서로 다른 과정이다. Amin과 Ng(1993)은 장기기억의 변동성이 존재할 때 위험중립적 평가방법을 옵션의 가격결정에 도입할 수 없음을 증명한 바 있다. 그들은 만기가 긴 옵션이 만기가 짧은 옵션에 비하여 가격이 낮음을 보여주고 있다. Bollerslev와 Mikkelson(1996)은 기저자산이 장기기억을 따를 때 기존의 옵션 가격이 올바른 가격을 제시해주고 있지 못함을 시뮬레이션을 통하여 제시해주고 있다. 기본모형의 현실과의 괴리는 장기의 옵션에서 심하게 나타나고 있다. 따라서 정확한 옵션에 가격을 제공하는 모형을 얻기 위하여는 기저자산이 장기기억을 따르고 있으므로 기존의 옵션 가격결정 모형들에 대한 수정이 불가피하다.

참 고 문 헌

- 이일균, “Quo Vadis?”, 재무관리논총, 제2권 제2호, 1995a, 1-64.
- 이일균, “쪽거리와 장기기억”, 재무관리연구, 제12권, 1995b, 1-18.
- 이일균, “주가의 장기기억과 분수적분 일반자기회귀 조건부 이분산”, 증권학회지, 제25집, 1999a, 31-70.
- 이일균, “쪽거리, 분수브라운 운동과정, 장기기억 및 분수적분 일반자기회귀 이분산 : 주가형성과정에 대한 한 탐구”, 증권학회지, 제24집, 1999b, 1-53.
- 이일균, “非線型 마코브過程간의 共時運動과 증권의 價格決定”, 재무관리연구, 2000a, 게재예정.
- 이일균, “조건부 이분산성과 주가의 마팅계일차분과정”, 보험과금융연구, 제13권, 2000, 5-19.
- Amin, K. I. and V. Ng, Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility, *Journal of Finance*, 48, 1993, 881-910.
- Backus, D. K. and S. E. Zin, “Long-Memory Inflation Uncertainty : Evidence from the Term Structure of Interest Rate,” *Journal of Money, Credit and Banking*, 25 (3), 1993, 681-700.
- Baillie, R. T. and T. Bollerslev, “Cointegration, Fractional Cointegration and Exchange rate dynamic,” *Journal of Finance*, 49, 1994, 737-745.
- Baillie, R. T., “Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics,” *Journal of Econometrics*, 73, 1996, 5-59.
- Baillie, R. T., C. F. Chung and M.A. Tieslau, “Analyzing Inflation by the Fractionally Integrated ARFIMA-GARCH Model,” *Journal of Applied Econometrics*, 11 (1), 1996, 23-40.
- Baillie, R. T., T. Bollerslev and H. O. Mikkelsen, “Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 74, 1996, 3-30.
- Cheung, Y. W., “Tests for Fractionally Integration : A Monte Carlo Investigation,” *Journal of Time Series Analysis*, 14, 1993, 331-345.
- Chong, T. T. -L., “Estimating the Differencing Parameter via the Partial Auto-correlation Function,” *Journal of Econometrics*, 97, 2000, 365-381.

- Chung, C. F. and R. T. Baillie, "Small Sample Bias in Conditional Sum-of-Squares Estimators of Fractionally Integrated ARMA Models," *Empirical Economics*, 18, 1993, 791-806.
- Crato, N. and P. Rothman, "Fractional Integration Analysis of Long-Run Behavior for US Macroeconomic Time Series," *Economics Letters*, 45, 287-291.
- Diebold, F. X. and G. D. Rudebusch, "Long Memory and Persistence in Aggregate Output," *Journal of Monetary Economics*, 24, 1989, 189-209.
- Diebold, F. X., S. Husted and M. Rush, "Real Exchange Rates Under the Gold Standard," *Journal of Political Economy*, 99, 1991, 1252-1271.
- Ding, Z., C. W. J. Granger and R. F. Engle, "A Long Memory Property of Stock Returns and a New Model," *Journal of Empirical Finance*, 1, 1993, 83-106.
- Geweke, J. and S. Porter-Hudak, "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models," *Journal of Time Series Analysis*, 4, 1983, 221-238.
- Granger, C. W. J. and R. Joyeux, "An Introduction to the Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing," *Journal of Time Series Analysis*, 1, 1980, 15-29.
- Hassler, U. and J. Wolters, "Long Memory in Inflation Rates : International Evidence," *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, 1995, 37-45.
- Hosking, J. R. M., "Fractional Differencing," *Biometrika*, 68, 1981, 165-175.
- Hurst, H. E., "Long-Term Storage Capacity of Reservoirs," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, 1951, 770-799.
- Hurvich, C. M. and B. K. Ray, "Estimation of the Memory Parameter for Nonstationary or Noninvertible Fractionally Integrated Processes," *Journal of Time Series Analysis*, 16, 1995, 17-41.
- Li, W. K. and A. I. McLeod, "Fractional Time Series Modelling," *Biometrika*, 73, 1986, 217-221.
- Lo, A. W., "Long-Term Memory in Stock Market Prices," *Econometrica*, 59, 1991, 1279-1313.
- Lobato, N. and N. G. Savir, "Real and Spurious Long-Memory Properties of Stock-Market Data," *Journal of Business & Economic Statistics*, 16, 1998, 261-268.
- Malliaropolus, D. and R. P. Priestly, Mean Reversion in Southeast Asian Stock Mar-

- kets, *Journal of Empirical Finance*, 6, 1999, 355-384.
- Robinson, P. M., "The memory of stochastic volatility models," *Journal of Econometrics*, 101, 2001, 195-218.
- Porterba, J. M. and L. H. Summers, "Mean Reversion in Stock Price : Evidence and Implications," *Journal of Finance Economics*, 22, 1988, 27-569.
- Robinson, P. M., "The Memory of Stochastic Volatility Models," *Journal of Econometrics*, 101, 2001, 195-218.
- Shea, G. S., "Uncertainty and Implied Variance Bounds in Long Memory Models of the Interest Rate Term Structure," *Empirical Economics*, 16, 1991, 287-312.
- Sowell F., "Modeling Long Run Behavior with the Fractional ARIMA Model," *Journal of Monetary Economics*, 29, 1992b, 277-302.
- Sowell, F. B., "Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models," *Journal of Econometrics*, 53, 1992a, 165-188.
- Tieslau, M. A., P. Schmidt and R. T. Baillie, "A Minimum Distance Estimator for Long-Memory Processes," *Journal of Econometrics*, 71, 1996, 249-264.