

축대칭을 만족하고 시간에 따라 변하지 않는 블랙홀 자기권의 편원 좌표계적 기술 STATIONARY, AXISYMMETRIC BLACK HOLE MAGNETOSPHERES IN OBLATE SPHEROIDAL COORDINATES

박석재, ANDRÉ B. FLETCHER
한국천문연구원

SEOK JAE PARK AND ANDRÉ B. FLETCHER
Korea Astronomy Observatory
E-mail: sjpark@kao.re.kr, abfletch@kao.re.kr
Received 2001 Nov. 19; Accepted 2001 Dec. 12

ABSTRACT

In this paper, we simplify the equations of the Macdonald-Thorne black hole magnetosphere. Our major assumption is that the 3-D electric and magnetic flux isosurfaces respectively form families of confocal oblate spheroids and hyperboloids. As a result, the magnetospheric equations are greatly simplified, and may provide a useful framework for instances when rigorous, theoretical approaches are not necessary.

Keywords: black hole physics – MHD – galaxies: jets

I. 서 론

Macdonald와 Thorne(1982, 이하 MT)은 유입물질 원반으로 둘러싸인 거대한 블랙홀의 자기권을 이론적으로 잘 정리하였다. 즉 MT는 시간에 따라 변하지 않고 블랙홀의 자전축이 대칭축이 되는 모델을 '3+1' 시공간을 이용하여 정리함으로써 QSO 같은 활동성 은하핵의 엔진 규명에 큰 획을 긋게 되었다. 그리하여 MT 모델은 이제 교과서에 수록될 정도가 되었다(e.g., Thorne et al. 1986; Novikov & Frolov 1988).

MT 모델에서 자기장은 자기 flux에 의해서 주어지지만 전기장은 전기 flux에 의해 주어지지 않는다. 사실 전기 flux는 애당초 정의조차 되지 않으므로 전기장도 자기 flux를 이용하여 정의된다. 우리는 이 논문에서 처음으로 전기 flux에 의해 정의된 전기장을 도입하여, 전기장을 자기장과 동등하게 기술한다. 그리고 MT 모델과 대칭을 이루도록 전기 flux로 자기장까지 기술할 수 있는 새로운 표기법을 소개한다.

우리는 MT 모델의 자기 flux가 열린 곡면 모양을 이루어야 한다는 사실을 알고 있다. 자기 flux가 열린 곡면 모양을 이루면 전기 flux는 닫힌 곡면 모양을 이루게 된다. 구체적으로 자기 flux 곡면은 hyperboloids, 전기 flux 곡면은 oblate spheroids를 이룬다고 가정하면 편원 좌표계를 이용하여 기술할 수 있게 된다.

이 논문에서 시도하는 극단적 단순화는 나중에 여러 면에서 유용할 수 있다. 예를 들어, 관측 결과와 비교하기 위해

블랙홀에서 떨어진 Newtonian 지역의 간단한 이론적 결과가 필요하다면, 굳이 정교한 방정식들을 동원할 이유는 없는 것이다.

II. Macdonald-Thorne 모델 전자기장의 새로운 표기법

서론에서 언급한 극단적인 단순화를 위해서는 이미 잘 알려진 MT 모델의 전자기장 물리량들을 유용한 모양으로 바꿔야 한다.

MT 모델을 기술하는 가장 기본이 되는 물리량은 물론 4차원 계량 텐서이다. 지연 함수를 α , 이동 벡터를 β , 3차원 공간의 계량 텐서를 γ_{ij} 라 하면 '3+1' 시공간을 이용한 4차원 시공간의 계량 텐서는 일반적으로

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

와 같이 주어진다. 여기서 라틴 문자는 1에서 3까지 달리고 시공간 부호는 $(-+++)$ 이다. 이 논문에서 모든 물리량의 단위는 $c = G = 1$ 로 잡는다.

구좌표계 (r, θ, ϕ) 의 원점에 위치한 블랙홀을 기술하는 시공간 계량은

$$\alpha = \frac{\rho}{\Sigma}, \quad (2-2a)$$

$$\beta^\phi \equiv -\omega = -\frac{2aMr}{\Sigma^2} \quad (2-2b)$$

$$\gamma_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta^2} \quad (2-2c)$$

$$\gamma_{\theta\theta} = \rho^2 \quad (2-2d)$$

$$\gamma_{\varphi\varphi} = \tilde{\omega}^2 = \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \quad (2-2e)$$

로 주어진다. 여기서 Δ , ρ , Σ 는 각각

$$\Delta^2 \equiv r^2 + a^2 - 2Mr, \quad (2-2f)$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2-2g)$$

$$\Sigma^2 \equiv (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta^2 \sin^2 \theta \quad (2-2h)$$

를 의미한다.

이 경우 블랙홀 주위의 FIDO(fiducial observer)는

$$e_{\hat{r}} = \frac{\Delta}{\rho} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (2-3a)$$

$$e_{\hat{\theta}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (2-3b)$$

$$e_{\hat{\varphi}} = \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (2-3c)$$

와 같은 관성계 단위 벡터를 갖는다.

식 (2-2e)로 주어지는 $\tilde{\omega}$ 에 의해 $m \equiv \tilde{\omega} e_{\hat{\varphi}}$ 로 정의되는 벡터 m 은 축대칭 Killing 벡터가 되며 ∂A 는 m -고리(loop)라고 보면 된다. 축대칭 가정으로부터 임의의 스칼라 f 와, 임의의 벡터 f , 그리고 m 에 대한 Lie 미분 L_m 에 대하여

$$m \cdot \nabla f = 0, \quad L_m f = 0, \quad (2-4a)$$

이 성립하고 시간에 따라 변하지 않는다는 조건으로부터

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (2-4b)$$

을 만족한다.

따라서 Kerr 블랙홀 주위 FIDO가 측정하는 Maxwell 방정식은

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho_e \quad (2-5a)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2-5b)$$

$$\nabla \times (\alpha E) = (B \cdot \nabla \omega) m \quad (2-5c)$$

$$\nabla \times (\alpha B) = 4\pi\alpha j - (E \cdot \nabla \omega) m \quad (2-5d)$$

로 주어져야 한다.

블랙홀 사건의 지평선과 만나지 않는 m -고리 A 를 생각해 보자. 가장자리를 ∂A , 그리고 A 의 작은 면적에 대한 직교 벡터를 ds 같이 표시하면, 우리는 A 를 관통하는 총 전류 $I(r)$, 총 전기 flux $\Phi(r)$, 총 자기 flux $\Psi(r)$ 를 각각,

$$I(r) = -\int_A \alpha j \cdot ds, \quad (2-6a)$$

$$\Phi(r) = \int_A E \cdot ds, \quad (2-6b)$$

$$\Psi(r) = \int_A B \cdot ds \quad (2-6c)$$

와 같이 정의할 수 있게 된다. 식 (2-6b)로 정의되는 전기 flux는 MT에서 전혀 도입된 바 없다. 하지만 시간에 따라 변하는 전자기장을 기술하기 위해서는 필수적인 물리량임에 유의하자(e.g., Park 2000).

이 경우 MT 자기권에서의 전기장과 자기장은

$$\alpha j^P = -\frac{\nabla I \times e_{\hat{\varphi}}}{2\pi\tilde{\omega}} = -\frac{\nabla I \times m}{2\pi\tilde{\omega}^2}, \quad (2-7a)$$

$$E^P = \frac{\nabla \Phi \times e_{\hat{\varphi}}}{2\pi\tilde{\omega}} = -\frac{\nabla \Phi \times m}{2\pi\tilde{\omega}^2}, \quad (2-7b)$$

$$B^P = \frac{\nabla \Psi \times e_{\hat{\varphi}}}{2\pi\tilde{\omega}} = \frac{\nabla \Psi \times m}{2\pi\tilde{\omega}^2}, \quad (2-7c)$$

$$E^T = 0, \quad (2-7d)$$

$$B^T = -\frac{2I}{\alpha\tilde{\omega}} e_{\hat{\varphi}} = -\frac{2I}{\alpha\tilde{\omega}^2} m \quad (2-7e)$$

와 같이 주어진다. 식 (2-7b)로 주어지는 전기장은 이 논문에서 처음으로 소개되는 것이다. 즉 MT 모델에서는 처음으로 소개되는 전기 flux (2-6b)에 의해 정의된 전기장인 것이다.

이미 서론에서 밝힌 바와 같이 MT에서는 플라즈마가 $e_{\hat{\varphi}}$ 방향으로 회전하는 경우만 생각했다. 즉 자기력선은 플라즈마와 같이 회전한다고 가정하고 FIDO에 대한 자기력선의 속도 v^F 를

$$v^F = -\frac{\omega - \Omega^F}{\alpha} \tilde{\omega} e_{\hat{\varphi}} = -\frac{\omega - \Omega^F}{\alpha} m \quad (2-8)$$

으로 준다.

전기장이 highly-conducting 조건

$$E = -v^F \times B \quad (2-9a)$$

를 만족하면 식 (2-7b), (2-8)에 의해

$$E^P = -v^F \times B^P = \frac{\omega - \Omega^F}{2\pi\alpha} \nabla \Psi \quad (2-9b)$$

$$B^P = -\frac{\alpha}{2\pi(\omega - \Omega^F)\tilde{\omega}^2} \nabla \Phi \quad (2-9c)$$

가 된다. 식 (2-9b)로 주어지는 전기장은 원래 잘 알려진, 자기 flux에 의해 정의된 전기장이다. 하지만 식 (2-9c)로 주어지는 전기 flux에 의해 정의된 자기장은 이 논문에서 처음으로 소개되는 것이다. 원래의 MT 모델에서 B^P 는 식 (2-7c)보다 간단하게 나타내질 수는 없었음에 유의하자.

각운동량 Poynting 벡터 S_L 의 poloidal 성분은

$$S_L^P = \frac{1}{2\pi\alpha} I B^P = -\frac{I}{4\pi^2(\omega - \Omega^F)\tilde{\omega}^2} \nabla \Phi \quad (2-10a)$$

에너지 Poynting 벡터 S_E 의 poloidal 성분은

$$S_E^P = \Omega^F S_L^P = \frac{I\Omega^F}{2\pi\alpha} B^P = -\frac{I\Omega^F}{4\pi^2(\omega - \Omega^F)\tilde{\omega}^2} \nabla\Phi \quad (2-10b)$$

처럼 주어진다. 식 (2-10a), (2-10b)처럼 전기 flux에 의해 주어지는 Poynting 벡터들도 물론 이 논문에서 처음으로 소개되는 것들이다. MT 모델에서 이 Poynting 벡터들은 블랙홀로부터 주위로 각운동량과 에너지를 꺼내는 중요한 역할을 맡게 된다(Blandford & Znajek 1977).

III. 전자기 flux와 편원 좌표계

우리는 구체적으로 Ψ 의 모양을 모르지만 열린 곡면 모양을 이루어야 한다는 사실은 알고 있다. 식 (2-9a), (2-9b), (2-9c)로부터 변수들 사이에 $\nabla\Phi = -v^F \times \nabla\Psi$, $E^P \perp B^P$, $E^P \parallel \nabla\Psi$, $B^P \parallel \nabla\Phi$, $\nabla\Phi \perp \nabla\Psi$ 같은 관계가 성립하고 있으므로, Ψ 가 열린 곡면 모양을 이루고 있으면 Φ 는 닫힌 곡면 모양을 이루어야 한다.

이 논문에서는 Ψ 가 그림 1에서 보는 바와 같이 편원 좌표계 u, v, φ 의 v -좌표와 관계가 있다고 가정한다(Arfken 1970). 즉 Ψ 가 hyperboloids 형태를 갖는다고 가정하는 것이다. 그러면 Φ 는 oblate spheroids 형태를 갖게되어, 그림 1에서처럼 v -상수인 곡면과 Ψ -상수인 곡면, u -상수인 곡면과 Φ -상수인 곡면은 항상 1-1 대응시킬 수 있게 된다.

우선 유입물질 원반 안쪽 꼬트머리 지점의 $\tilde{\omega}$ 값을 $\tilde{\omega}_D$ 라고 할 때 직교 좌표계 (x, y, z) 에 의해

$$x = \tilde{\omega}_D \cosh u \sin v \cos \varphi \quad (3-1a)$$

$$y = \tilde{\omega}_D \cosh u \sin v \sin \varphi \quad (3-1b)$$

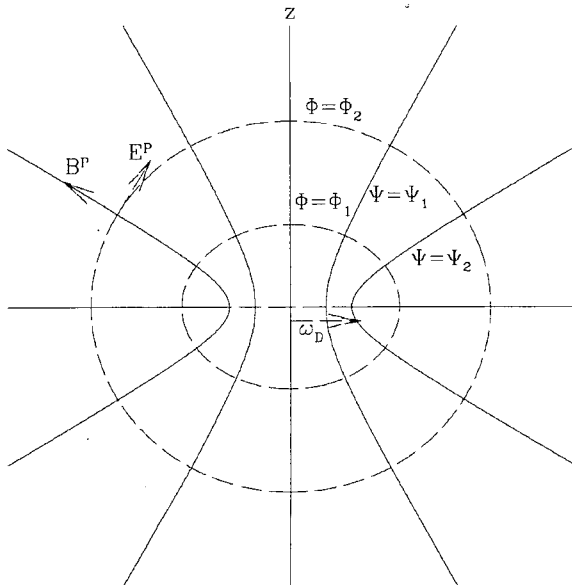


그림 1. 편원 좌표계와 블랙홀 자기권

$$z = \tilde{\omega}_D \sinh u \cos v \quad (3-1c)$$

로 정의되는 편원 좌표계 (u, v, φ) 를 잡자. 이 좌표계를 이용하면 $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 범위 내에서 좌표가 변하게 되는데, 블랙홀의 자전축은 $v = 0, \pi$ 인 곳에, 유입물질 원반은 $v = \pi/2$ 인 곳에 자리잡게 된다.

여기서 좌표계 (u, v, φ) 대신

$$\xi = \cos v, \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (3-2a)$$

$$\zeta = \sinh u, \quad 0 \leq \zeta < \infty \quad (3-2b)$$

를 이용하여

$$x = \tilde{\omega}_D \sqrt{(1-\xi^2)(1+\zeta^2)} \cos \varphi \quad (3-3a)$$

$$y = \tilde{\omega}_D \sqrt{(1-\xi^2)(1+\zeta^2)} \sin \varphi \quad (3-3b)$$

$$z = \tilde{\omega}_D \xi \zeta \quad (3-3c)$$

로 정의되는 좌표계 (ξ, ζ, φ) 를 잡으면 더욱 편리하다. 이 새로운 좌표계에서 단위 벡터들 사이에는 $e_\xi \times e_\zeta = e_\varphi$ 와 같은 관계가 성립한다. 이 새로운 좌표계에서

$$\Psi = F(\xi)\xi \quad (3-4a)$$

$$\Phi = G(\zeta)\zeta \quad (3-4b)$$

로 놓으면 블랙홀 자기권을 간결하게 기술할 수 있다. 회전하는 타원체는 ζ -상수에 의해, 유입물질 원반은 $\xi = 0$ 에 의해, 대칭축은 $\xi = \pm 1$ 에 의해 각각 기술된다. 따라서 우리는 경계치 조건 $F(\pm 1) = 0$ 를 얻게 된다.

이 좌표계를 이용하여, 예를 들어, 대칭축에서 거리 R 만큼 떨어진 Newtonian 전자기장과 Poynting 벡터들을 기술해 보자. 식 (3-4a), (3-4b)를 이용하면 식 (2-9b), (2-9c), (2-10a), (2-10b)는 각각

$$E^P = -\frac{\Omega^F}{2\pi} \nabla(F\xi) \quad (3-5a)$$

$$B^P = \frac{1}{2\pi\Omega^F R^2} \nabla(G\zeta) \quad (3-5b)$$

$$S_L^P = \frac{I}{4\pi^2\Omega^F R^2} \nabla(G\zeta) \quad (3-5c)$$

$$S_E^P = \frac{I}{4\pi^2 R^2} \nabla(G\zeta) \quad (3-5d)$$

가 된다. 그런데 Newtonian 경우 단위 벡터들을 $\mathbf{1}$, $\tilde{\omega}_D$ 를 R_D 로 놓으면

$$\begin{aligned} \nabla = & \mathbf{1}_\xi \sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi^2 + \zeta^2}} \frac{1}{R_D} \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{1}_\zeta \sqrt{\frac{1+\zeta^2}{\xi^2 + \zeta^2}} \frac{1}{R_D} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ & + \mathbf{1}_\varphi \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)(1+\zeta^2)}} \frac{1}{R_D} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (3-6)$$

가 되므로 식 (3-5a), (3-5b), (3-5c), (3-5d)는 각각

$$E^P = -\frac{\Omega^F}{2\pi R_D} \sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi^2+\zeta^2}} \left(F + \frac{dF}{d\xi} \right) \quad (3-7a)$$

$$B^P = \frac{\alpha}{2\pi\Omega^F R_D R^2} \sqrt{\frac{1+\zeta^2}{\xi^2+\zeta^2}} \left(G + \frac{dG}{d\zeta} \right) \quad (3-7b)$$

$$S_L^P = \frac{I}{4\pi^2\Omega^F R_D R^2} \sqrt{\frac{1+\zeta^2}{\xi^2+\zeta^2}} \left(G + \frac{dG}{d\zeta} \right) \quad (3-7c)$$

$$S_E^P = \frac{I}{4\pi^2\Omega^F R_D R^2} \sqrt{\frac{1+\zeta^2}{\xi^2+\zeta^2}} \left(G + \frac{dG}{d\zeta} \right) \quad (3-7d)$$

로 주어진다.

IV. 결 론

서론에서 기술한 바와 같이 이론적 결과를 극단적으로 단순화시켜 놓는 접근은 여러 면에서 유용할 수도 있다. 특히 식 (3-4a), (3-4b)에서 $F = G = 1$ 인 경우, 즉

$$E^P = -\frac{\Omega^F}{2\pi R_D} \sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi^2+\zeta^2}} \quad (4-1a)$$

$$B^P = -\frac{\alpha}{2\pi\Omega^F R_D R^2} \sqrt{\frac{1+\zeta^2}{\xi^2+\zeta^2}} \quad (4-1b)$$

$$S_L^P = \frac{I}{4\pi\Omega^F R_D R^2} \sqrt{\frac{1+\zeta^2}{\xi^2+\zeta^2}} \quad (4-1c)$$

$$S_E^P = \frac{I}{4\pi^2 R_D R^2} \sqrt{\frac{1+\zeta^2}{\xi^2+\zeta^2}} \quad (4-1d)$$

로 주어지는 자기권의 기술은 매우 간편해질 수 있다.

또한 식 (3-4)를 이용하면 Laplacian 방정식 $\nabla^2 f = 0$ 은

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (1-\xi^2) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right\} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ (1+\zeta^2) \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right\} \\ & + \frac{\xi^2 + \zeta^2}{(1-\xi^2)(1+\zeta^2)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0 \end{aligned} \quad (4-2)$$

으로 주어지므로 만일 우리가 구하는 함수 f 가 $f(\xi, \zeta, \varphi) = X(\xi)Z(\zeta)W(\varphi)$ 처럼 변수 분리된다면 $X(\xi)$ 와 $Z(\zeta)$ 는 associated Legendre 방정식에, $W(\varphi)$ 는 spherical harmonics와 이어지게 된다. 이 경우 우리는

$$f(\xi, \zeta, \varphi) = \sum_{l,m} X_{lm}(\xi) Z_{lm}(\zeta) W_m(\varphi) \quad (4-3)$$

로 놓고 문제를 생각할 수 있게 된다. 이러한 구체적인 예를 생각해 보는 일은 또 하나의 독립된 과제이므로 이 논문에서는 설명을 약한다.

서론에서 밝혔듯이 관측 결과와 비교하기 위해 블랙홀에서 떨어진 Newtonian 지역의 간단한 이론적 결과가 필요하다면, 굳이 정교한 방정식들을 동원할 이유는 없는 것이다. 왜냐하면 정교한 방정식들은 Hubble 망원경의 분해능조차 미치지 못하는, 극단적으로 상대론적인 활동성 은하핵의 엔진 주위 몇 AU 지역에서 적용되는 것들이기 때문이다.

참고문헌

- Arfken, G. 1970, *Mathematical Methods for Physicists*, 2nd ed. (New York: Academic Press)
- Blandford, R. D. & Znajek, R. L. 1977, *MNRAS*, 179, 433
- Macdonald, D. A. & Thorne, K. S. 1982, *MNRAS*, 198, 345
- Novikov, I. D. & Frolov, V. P. 1988, *Physics of Black Holes* (Dordrecht: Kluwer)
- Park, S. J. 2000, *JKAS*, 33, 19
- Thorne, K. S., Price, R. H., & Macdonald, D. A. 1986, *Black Holes: The Membrane Paradigm* (New Haven: Yale University Press)