

블랙홀의 열역학, 전기역학과 ‘H-R도’* THERMODYNAMICS, ELECTRODYNAMICS, AND ‘H-R DIAGRAM’ OF BLACK HOLES

박석재

한국천문연구원

SEOK JAE PARK

Korea Astronomy Observatory

E-mail: sjpark@kao.re.kr

Received 2001 Nov. 3; Accepted 2001 Dec. 5

ABSTRACT

In this review article we introduce the ‘H-R diagram’ of black holes. Some fundamental concepts of black hole thermodynamics and electrodynamics are also summarized in detail.

Keywords: black hole physics – galaxies: evolutions

I. 서 론

Kerr 블랙홀의 에너지를 추출할 수 있는 가능성은 Penrose (1969)에 의해 처음으로 제안되었고 곧이어 Christodoulou (1970)에 의해 연구되었다. 블랙홀의 엔트로피는 블랙홀의 표면적과 밀접한 관계가 있다는 사실이 밝혀지면서 블랙홀 열역학(black hole thermodynamics) 법칙이 알려지게 된다. 또한 Kerr 블랙홀의 질량은 최대 29%에 이르기까지 추출이 가능하다는 것이 알려지게 된다(Christodoulou & Ruffini 1971).

블랙홀 열역학은 곧 ‘블랙홀 전기역학(black hole electrodynamics)’ 출현을 촉진했다. 그리하여 블랙홀은 여느 천체와 마찬가지로 전하, 전류, 저항, 전기장, 자기장 등을 소유하게 된다. 블랙홀 전기역학은 블랙홀 주위에 자기장을 지닌 유입물질 원반(accretion disk)이 존재할 때 더욱 다양해진다. 이러한 블랙홀 자기권에 기초를 두고 블랙홀 열역학과 전기역학을 이용하여 Blandford & Znajek(1977)은 질량 추출 모델 수립에 성공한다. 2장에서는 이 내용에 대하여 정리한다.

3장에서는 블랙홀 열역학과 전기역학을 바탕으로 Okamoto & Kaburaki(1990, 지금부터 OK)가 x -축에 블랙홀의 각운동량 J , y -축에 블랙홀의 각속도 Ω^H 를 대응시켜 만든 블랙홀 ‘H-R도’에 대하여 알아보겠다. 블랙홀 H-R도는 블랙홀의 진화 추적에 아주 유용하다.

이 논문에서는 따로 언급이 없는 한 질량 M , 각운동량 J , $a \equiv J/M$ 를 갖는 Kerr 블랙홀을 생각하기로 한다. 모든 물리량은 $c = G \equiv 1$ 인 단위로 정의된다.

II. 블랙홀 열역학 및 전기역학

지연 함수를 α , 이동 벡터를 β^i , 3차원 공간의 계량 텐서를 γ_{ij} 라 하면 ‘3+1’-시공간을 이용한 4차원 시공간의 계량 텐서는 일반적으로

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

와 같이 주어진다. 여기서 라틴 문자는 1에서 3까지 달리고 시공간 부호는 $(-+++)$ 이다.

구좌표계 (r, θ, ϕ) 의 원점에 위치한 Kerr 블랙홀을 기술하는 시공간 계량은

$$\alpha = \frac{\rho}{\Sigma} \Delta \quad (2-2a)$$

$$\beta^\phi \equiv -\omega = -\frac{2aMr}{\Sigma^2} \quad (2-2b)$$

$$\gamma_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta^2} \quad (2-2c)$$

$$\gamma_{\theta\theta} = \rho^2 \quad (2-2d)$$

$$\gamma_{\phi\phi} \equiv \tilde{\omega}^2 = \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \quad (2-2e)$$

로 주어진다. 여기서 Δ, ρ, Σ 는 각각

$$\Delta^2 \equiv r^2 + a^2 - 2Mr, \quad (2-2f)$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (2-2g)$$

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta^2 \sin^2 \theta \quad (2-2h)$$

를 의미한다.

이 경우 블랙홀 주위의 FIDO(fiducial observer; Thorne et al. 1986; Novikov & Frolov 1988)는 $\omega^{\hat{r}}$ 각속도로 블랙홀을 공전하면서

$$e_{\hat{r}} = \frac{\Delta}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2-3a)$$

$$e_{\hat{\theta}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2-3b)$$

$$e_{\hat{\phi}} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (2-3c)$$

와 같은 관성계 단위 벡터를 갖는다.

Kerr 블랙홀은 두 사건의 지평선(event horizon)

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (2-4)$$

을 갖는데 r_{-} 는 천체물리학적 관측과 아무 관련이 없으므로 우리는 블랙홀의 반지름으로 $r = r_{+}$ 를 택하게 된다. 이 경우 중력 가속도 g^H 는

$$g^H = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{r_{+} - M}{2Mr_{+}} \right) e_{\hat{r}} \quad (2-5a)$$

블랙홀의 각운동량 Ω^H 는

$$\Omega^H = \frac{a}{2Mr_{+}} \quad (2-5b)$$

블랙홀의 표면적은

$$A^H = 4\pi(r_{+}^2 + a^2) \quad (2-5c)$$

로 주어지게 된다.

Kerr 블랙홀의 에너지를 추출할 수 있는 가능성은 Penrose (1969)에 의해 처음으로 제안되었고 곧이어 Christodoulou (1970)에 의해 연구되었다. Christodoulou (1970)는 정지해 있는 Schwarzschild 블랙홀은 모든 질량이 'irreducible' 상태에 있지만 회전하고 있는 Kerr 블랙홀의 질량은 'reducible+irreducible' 상태에 있다는 것을 발견했다. Christodoulou (1970)는 블랙홀의 reducible 질량을 모두 추출해버리면 irreducible 질량

$$M_{irr} = \sqrt{\frac{A^H}{16\pi}} = \frac{1}{2} \sqrt{r_{+}^2 + a^2} \quad (2-6)$$

만 남게 된다는 사실을 발견한다. 흔히 회전 질량(rotational mass), M_{rot} 로 표기되는 블랙홀의 reducible 질량은

$$M_{rot} = M - M_{irr} = M - \sqrt{\frac{M}{2}(M + \sqrt{M^2 - a^2})} \quad (2-7)$$

처럼 변형될 수 있으므로 최대 총질량의 29%에 이른다는 사실을 알 수 있다(Christodoulou & Ruffini 1971).

블랙홀의 엔트로피 s^H 는 블랙홀의 표면적 A^H 와 밀접한

관계가 있다는 사실이 알려지자(Bekenstein 1972, 1973) 결국 Bardeen, Carter, & Hawking(1973)은

$$dM = \frac{1}{8\pi} g^H dA^H + \Omega^H dJ \quad (2-8)$$

같이 열역학 법칙과 비슷한 관계식을 찾아내기에 이르렀다. 그리고 마침내 Hawking(1975, 1976)에 의해 엔트로피와 표면적 사이에는

$$s^H = \frac{k}{4\hbar} A^H \quad (2-9)$$

같은 관계가 성립한다는 사실이 밝혀지자, 식 (2-6)과 (2-9)로부터 s^H, A^H, M_{irr} 는 서로 완벽하게 대치될 수 있음을 깨닫게 된다. 식 (2-9)에서 물론 k 는 Boltzmann 상수, \hbar 는 Planck 상수이다.

Hawking(1974, 1975)은 양자장론적 접근에 의해 블랙홀은 사건의 지평선이 마치

$$T^H = \frac{\hbar}{2\pi k} g^H \quad (2-10)$$

의 온도를 갖는 것처럼 열복사를 방출할 수 있다는 사실도 깨달았다. 따라서 이 Hawking radiation 발견 이전 유도된 식 (2-8)은

$$dM = T^H ds^H + \Omega^H dJ \quad (2-11)$$

와 같이 '우아하게' 정리되기에 이른다. 식 (2-11)은 열역학 제1법칙

$$dE = T ds - p dV \quad (2-12)$$

에 견주어 블랙홀 열역학 제1법칙이라고 불린다. Hawking (1971)은 이미 블랙홀의 표면적 A^H 가 결코 감소할 수 없다는 것을 보인 바 있었다. 따라서 블랙홀 열역학 제2법칙, 즉 엔트로피 증가의 법칙

$$\delta s^H \geq 0 \quad (2-13)$$

은 이미 증명된 것이나 다름없었다.

블랙홀 열역학은 곧 블랙홀 전기역학 출현을 촉진했다(Damour 1978; Znajek 1978). 그리하여 블랙홀은 여느 천체와 마찬가지로 전하 σ^H , 전류 j^H , 저항 R^H , 전기장 E^H , 자기장 B^H 등을 소유하게 된다. 블랙홀 전기역학은 블랙홀 주위에 자기장을 지닌 유입물질 원반이 존재할 때 더욱 다양해진다. 홀로 있는 블랙홀은 원래 M, J , 그리고 전하밖에 소유할 수 없지만, 주위에 자기장을 지닌 원반이 있는 경우는 자기력선이 계속 유입되므로 중성자성과 마찬가지로 자기권을 소유하게 되는 것이다. 또한 블랙홀 자기권 모델은 유입물질 원반 자기권 모델에도 기초를 둘 수밖에 없었는데, 다행히 70년도 초반 비상대론적, 상대론적 유입물질 원반의 단순한 구조가 알려지게 되었다(Shakura & Sunyaev 1973; Novikov & Thorne 1973). 그러자 블랙홀과 유입물질 원반의 자기권 모델이 같이 연구되었고 마침내 Lovelace (1976),

Blandford (1976) 등에 의해 골격이 갖추어지게 되었다.

블랙홀의 사건의 지평선에서 전자기장을 지평선에 수직인 성분(\perp)과 평행인 성분(\parallel)으로 나누어 생각하면

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_r \equiv E_{\perp} \rightarrow 4\pi\sigma^H \quad (2-14a)$$

$$\alpha E_{\parallel} \rightarrow \mathbf{E}^H = R^H \mathbf{j}^H = 4\pi \mathbf{j}^H \quad (2-14b)$$

$$\alpha \mathbf{B}_{\parallel} \rightarrow \mathbf{B}^H = 4\pi \mathbf{j} \times \mathbf{e}_r \quad (2-14c)$$

$$\mathbf{E}^H = \mathbf{e}_r \times \mathbf{B}^H \quad (2-14d)$$

로 주어진다(Macdonald & Thorne 1982; Thorne et al. 1986; Novikov & Frolov 1988).

Blandford & Znajek (1977)은 블랙홀 열역학과 전기역학을 이용하여 회전 질량의 추출 모델 수립에 성공한다. 회전 질량의 운동학적 또는 파동역학적 추출은 거의 불가능한 것으로 알려져 있었기 때문에 전기역학적 시도는 남아 있던 유일한 가능성이었다(Bardeen, Press, & Teukolsky 1972; Zel'dovich 1971, 1972; Misner 1972; Press & Teukolsky 1972; Starobinsky 1973; Teukolsky & Press 1974). Blandford-Znajek process는

$$\Omega^H dJ = -\frac{\Omega^H}{4\pi} (\Omega^H - \Omega^F) (\tilde{\omega} B_{\perp})^2 dA^H dt \quad (2-15a)$$

$$T^H ds^H = \frac{1}{4\pi} (\Omega^H - \Omega^F)^2 (\tilde{\omega} B_{\perp})^2 dA^H dt \quad (2-15b)$$

와 같은 관계식을 이용하게 되는데(Macdonald & Thorne 1982; Thorne et al. 1986; Novikov & Frolov 1988), 여기서 Ω^F 는 블랙홀 자기권 내 자기력선들의 각속도를 의미하고 $B_{\perp} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_r$ 이다. 따라서 식 (2-11)에 의해

$$dM = -\frac{\Omega^F}{4\pi} (\Omega^H - \Omega^F) (\tilde{\omega} B_{\perp})^2 dA^H dt \quad (2-16)$$

를 얻게 되는데, 이것이 바로 Blandford-Znajek process에 의해 추출되는 블랙홀 질량이다.

III. 블랙홀 'H-R도'

이제 준비가 다 되었으므로 OK가 x -축에 J , y -축에 Ω^H 를 대응시켜 만든 그림 1과 같은 블랙홀 H-R도를 생각해보자. 차원이 없는 양 h 를

$$h \equiv \frac{a}{r_+} \quad (3-1)$$

와 같이 정의하자. 즉 Schwarzschild 블랙홀 경우는 $h=0$, 최대 회전하는 Kerr 블랙홀 경우에는 $h=1$ 에 해당됨에 유의하자. 그러면 주요 물리량들은

$$M_{irr} = \frac{M}{\sqrt{1+h^2}} \quad (3-2a)$$

$$M_{rot} = M \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \right) \quad (3-2b)$$

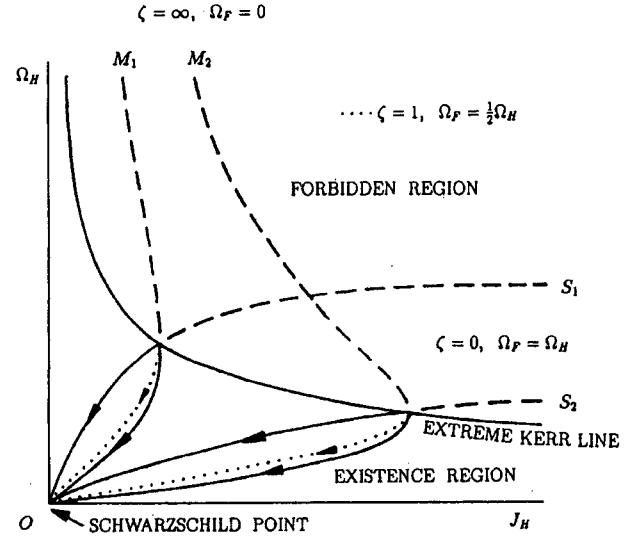


그림 1. 질량이 각각 M_1, M_2 인 두 블랙홀의 진화 경로를 보여주는 블랙홀 H-R도. 진화경로는 각각 등질량 곡선 $M=M_1, M=M_2$ 와 등엔트로피 곡선 $s=s_1, s=s_2$ 사이에 놓이게 된다. (Okamoto 1992에서 발췌).

$$J = 2M^2 \frac{h}{1+h^2} \quad (3-2c)$$

$$\Omega^H = \frac{h}{2M} \quad (3-2d)$$

$$s^H = \frac{4\pi k M^2}{\hbar} \frac{1}{1+h^2} \quad (3-2e)$$

$$T^H = \frac{\hbar}{8\pi k M} (1-h^2) \quad (3-2f)$$

처럼 정의된다(OK). 식 (3-2a), (3-2b)로부터 $h=1$ 일 경우에는 $M_{irr} = (1/\sqrt{2})M \approx 0.71M_0$, $M_{rot} = (1-1/\sqrt{2})M \approx 0.29M_0$ 를 각각 얻는다.

물리량 (3-2a)~(3-2f) 중 해당되는 것들을 식 (2-10), (2-15a), (2-15b), (2-16)에 넣고 정돈하면

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dh^2} = \frac{1-h^2}{2(1+h^2)[(\zeta+1) + (\zeta-1)h^2]} \quad (3-3a)$$

을 얻는데 여기서 ζ 는 식

$$\Omega^F = \frac{\Omega^H}{1+\zeta} \quad (3-3b)$$

로 정의되는 차원이 없는 물리량이다(Okamoto 1992). 즉 ζ 는 $\Omega^F=0$ 이면 $\zeta=\infty$, $\Omega^F = \Omega^H/2$ 이면 $\zeta=1$, $\Omega^F = \Omega^H$ 이면 $\zeta=0$ 값을 갖는 파라미터이다.

식 (2-16)으로부터 Blandford-Znajek power는

$$P = \frac{\zeta}{(1+\zeta)^2} \frac{(\Omega^H)^2}{4\pi} \oint (\tilde{\omega} B_{\perp})^2 dA^H \quad (3-4a)$$

가 되므로 이것을 식 (3-3a)과 결합하여

$$\frac{P}{M} = -\frac{1-h^2}{2(1+h^2)[(\zeta+1) + (\zeta-1)h^2]} \frac{dh^2}{dt} \quad (3-4b)$$

처럼 나타낼 수도 있게 된다.

초기 상태를 $M = M_0, h = h_0$ 같이 놓고 식 (3-3a)를 적분하면

$$M = M_0 \sqrt{\frac{1+h^2}{1+h_0^2}} f(h, h_0, \zeta) \quad (3-5a)$$

가 되는데 여기서 함수 $f(h, h_0, \zeta)$ 는

$$f(h, h_0, \zeta) = \left[\frac{(\zeta+1) + (\zeta-1)h_0^2}{(\zeta+1) + (\zeta-1)h^2} \right]^{\frac{\zeta}{2(\zeta-1)}}, \quad \zeta \neq 1 \quad (3-5b)$$

$$f(h, h_0, \zeta) = \exp[(h_0^2 - h^2)/4], \quad \zeta = 1 \quad (3-5c)$$

로 주어지는 함수이다. 따라서 진화의 마지막에 이르러 $M = M_f, h = h_f$ 상태가 된다고 하면, $h_0 = 1$ 인 블랙홀이 진화하여 $h_f = 0$ 이 되는 경우 M_f 는 각각

$$M_f(\zeta) = \frac{M_0}{\sqrt{2}} \left[\frac{2\zeta}{\zeta+1} \right]^{\frac{\zeta}{2(\zeta-1)}}, \quad \zeta \neq 1 \quad (3-6a)$$

$$M_f(\zeta) = \frac{M_0}{\sqrt{2}} e^{1/4}, \quad \zeta = 1 \quad (3-6b)$$

로 주어진다. 물론 $h_0 = 1$ 일 때는 $M_{irr} = (1/\sqrt{2})M_0$, $M_{rot} = (1-1/\sqrt{2})M_0$ 를 만족하는 것이다.

회전하지 않아서 $h = 0$ 상태에 있는 Schwarzschild 블랙홀은 $J = 0, \Omega^H = 0$ 상태에 있으므로 M 에 관계없이 원점에 자리잡게 된다. 가장 회전이 빠른 상태에 있어서 $h = 1$ 을 만족하는 블랙홀들은 식 (3-2c), (3-2d)에 의해 $\Omega^H = 1/(2\sqrt{J})$ 를 만족하게 되므로 그림 1에서 보는 'Extreme Kerr line'이 된다. 이 경우 $J \propto M^2, \Omega^H \propto 1/M$ 인 관계가 있으므로 곡선의 왼쪽에 M 이 작은 블랙홀들이, 오른쪽에 M 이 큰 것들이 자리잡게 된다. 그리고 어떠한 블랙홀도 $h > 1$ 상태에 있을 수는 없으므로 곡선의 위쪽으로 자리잡을 수는 없음에 유의하자. 이 '금지된 지역(forbidden region)'에서는 식 (3-2f)에서 볼 수 있듯이 $T^H < 0$ 가 된다.

이 H-R도에서 블랙홀의 진화를 생각해보자. 만일 블랙홀이 $\Omega^F = \Omega^H$, 즉 $\zeta = 0$ 을 만족하며 진화한다면 식 (3-6a)로부터 $M_f(0) = M_{irr} = (1/\sqrt{2})M_0 \approx 0.71M_0$ 이 되어 모든 M_{rot} 이 추출됨을 알 수 있다. 만일 블랙홀이 $\Omega^F = 0$, 즉 $\zeta = \infty$ 를 만족하며 진화한다면 식 (3-6a)로부터 $M_f(\infty) = M_{irr} = M_0$ 이 되어 블랙홀 질량이 보존되면서 $M_{rot} = 0$ 이 된다.

IV. 결 론

식 (3-4a), (3-4b)로부터 추출되는데 걸리는 시간 t_{ext} 는 대략

$$t_{ext} \propto \frac{(1+\zeta)^2}{\zeta[(1+h^2)\zeta+1-h^2]} \quad (4-1)$$

가 되어 $\zeta \rightarrow 0$ 이면 $t_{ext} \rightarrow \infty$ 이다. 즉 이 단열적 각운동량

추출 과정은 그림 1에서 등엔트로피 곡선 $s = s_1, s = s_2$ 를 따라 원점으로 접근하도록 진화하게 되는 것이지만 현실적으로는 불가능하다(OK). 그리고 이 경우에는 식 (3-4a)에서 알 수 있듯이 $P = 0$ 이 된다.

만일 $\zeta \rightarrow \infty$ 이면 $t_{ext} \rightarrow$ (유한값)이 되어 그림 1에서 등질량 곡선 $M = M_1, M = M_2$ 를 따라 원점으로 접근하도록 진화하게 되고 이론적으로는 가능하게 된다(OK). 하지만 이 경우도 식 (3-4a)에서 알 수 있듯이 $P = 0$ 이 되며, 무엇보다도 $\Omega^F = 0$ 상태를 실제 천체물리학적 환경에서 기대하기 힘들다.

따라서 블랙홀의 진화는 $0 < \Omega^F < \Omega^H$, 즉 $0 < \zeta < \infty$ 사이에서 일어난다고 추정할 수밖에 없다. 즉 실제 진화는 $\Omega^F = 0, \zeta = \infty$ 를 만족하는 단열적 진화와 $\Omega^F = \Omega^H, \zeta = 0$ 을 만족하는 비현실적인 진화 사이에서 이루어져야 한다는 것이다.

그림 1에는 $\Omega^F = \Omega^H/2, \zeta = 1$ 인 경우 블랙홀의 진화 경로를 점선으로 나타내었다. 예를 든 두 블랙홀은 $h = 1$ 곡선을 출발하여 하나는 $M = M_1, s = s_1$ 두 곡선의 사이에서, 또 하나는 $M = M_2, s = s_2$ 두 곡선 사이에서 진화 경로를 그리게 되는 것이다. 참고로 $\zeta = 1$ 이면 $M_{rot} = 0$ 을 향하여 감소하는 동안 M_{irr} 는 $M_{irr} = (1/\sqrt{2})M_0 \approx 0.71M_0$ 로 부터 증가하여 $M_f(1/2) = M_{irr} = (e^{1/4}/\sqrt{2})M_0 \approx 0.91M_0$ 이 되고, 이 블랙홀은 일생동안 $(1 - e^{1/4}/\sqrt{2})M_0 \approx 0.09M_0$ 만큼의 질량을 잃게 된다. 이 경우 식 (3-4a)에서 알 수 있듯이 P 는 최대값을 갖는다.

참고문헌

- Bardeen, J. M., Press, W. H., & Teukolsky, S. A. 1972, ApJ, 178, 347
- Bardeen, J. M., Carter, B., & Hawking, S. W. 1973, Commun. Math. Physics, 31, 161
- Bekenstein, J. D. 1972, Nuovo Cim. Lett., 4, 737
- Bekenstein, J. D. 1973, Phys. Rev., D7, 2333
- Blandford, R. D. 1976, MNRAS, 176, 465
- Blandford, R. D., & Znajek, R. L. 1977, MNRAS, 179, 433
- Christodoulou, D. 1970, Phys. Rev. Lett., 25, 1596
- Christodoulou, D., & Ruffini, R. 1971, Phys. Rev., D4, 3552
- Damour, T. 1978, Phys. Rev., D18, 3598
- Hawking, S. W. 1971, Phys. Rev. Lett., 26, 1344
- Hawking, S. W. 1974, Nature, 248, 30
- Hawking, S. W. 1975, Commun. Math. Physics, 43, 199
- Hawking, S. W. 1976, Phys. Rev., D13, 191
- Lovelace, R. V. E. 1976, Nature, 262, 649
- Macdonald, D. A., & Thorne, K. S. 1982, MNRAS, 198, 345
- Misner, C. W. 1972, Phys. Rev. Lett., 28, 994
- Novikov, I. D., & Frolov, V. P. 1988, Physics of Black Holes (Kluwer Academic Pub.)
- Novikov, I. D., & Thorne, K. S. 1973, in Black Holes, ed. DeWitt, C., & DeWitt, B. (Gordon & Breach), 343
- Okamoto, I. 1992, MNRAS, 254, 192
- Okamoto, I., & Kaburaki, O., 1990, MNRAS, 247, 244 (OK)
- Penrose, R. 1969, Nuovo Cim., 1, 252

Press, W. H., & Teukolsky, S. A. 1972, *Nature*, 238, 211
Shakura, N. I., & Sunyaev, R. A. 1973, *A&A*, 24, 337
Starobinsky, A. A. 1973, *JETP*, 37, 28
Teukolsky, S. A., & Press, W. H. 1974, *ApJ*, 193, 443
Thorne, K. S., Price, R. H., & Macdonald, D. A. 1986, *Black*

Holes: The Membrane Paradigm (Yale Univ. Press)
Zel'dovich, Y. B. 1971, *JETP Lett.*, 14, 180
Zel'dovich, Y. B. 1972, *JETP*, 35, 1085
Znajek, R. L. 1978, *MNRAS*, 185, 833