大韓環境工學會誌 · 논문
J. of KSEE Vol. 22, No. 2, pp. 363~374, 2000.
Journal of Korean Society of Environmental Engineers

특성선 방법을 이용한 관망 수격현상 해석의 보간방법연구

정봉석 · 김주인 · 김상현 · 박남식*

부산대학교 환경공학과
*동아대학교 토목공학과

(1999년 9월 14일 접수, 1999년 11월 12일 채택)

A Study of Interpolation Methods for the Water Hammer Analysis using the Method of Characteristics

Bong Seog Jung · Chu In Kim · Sang Hyun Kim · Nam Sik Park*

Department of Environmental Engineering, Pusan National University
**Department of Civil Engineering, Dong-a University*

ABSTRACT

It is necessary to employ the interpolation technique to resolve problems, which are associated with the characteristic locus in time-distance space, in the unsteady analysis of pipe flow. Various interpolation methods such as linear timeline interpolation, linear spaceline interpolation, wave speed adjustment, cubic spaceline interpolation and cubic timeline interpolation have been suggested and tested to investigate the interpolation error. Performance of various interpolation techniques was evaluated both a single pipeline and a complex one. The range of error was calculated as the courant number varied between 0 and 1 in a single pipeline. Reorganization of computational element and proper selection of interpolation method are found to be prerequisites for the effective computation of unsteady analysis.

Key Words : Interpolation, Pipe Flow, Characteristic, Reorganization, Unsteady Analysis

요 약 문

특성선 방법을 이용한 관망의 부정류 해석시 빈번히 발생되는 계산진행시간과 공간 축에서 특성선 궤도의 불일치는 개개의 계산요소에 대해 보간을 필요로 한다. 발생되는 보간 오차를 검토하기 위하여 선형공간 보간법, 선형시간 보간법, 파속도 조정법, 입방공간 보간법, 입방시간 보간법 등을 제시하고 비교 검토하였다. 사용된 보간방법의 적용성 검토를 위해 단일관망과 복합관망에 대해 수치모의를 실시하였다. 단일 관망의 경우 Courant 수를 1 이하의 범위에서 변화시켜가면서 보간이 필요없는 계산해와의 종합적인 비교를 통해 각각의 보간방법이 발생시키는 오차의 범위를 제시하였다. 관망 계산요소의 적절한 재구성과 알맞은 보간방법의 선정은 효율적인 부정류해석의 전제조건임을 확인할 수 있었다.

주제어 : 보간, 관수로, 특성선, 재구성, 부정류해석

1. 서 론

복합관망의 부정류해석을 하기 위해서는 특성선 방법이 널리 사용되어진다.[1,2] 특성선 방법은 운동량방정식과 연속방정식의 편미분 형태를 상미분 형태로 변형하여 유한차분형태로 적분을 통해 임의의 지점의 수두와 유량에 관한 해를 구한다. 고정된 진행시간의 방정식은 편리한 부정류해석을 진행시켜 주지만, 진행시간의 일치성이란 전제조건은 적절한 보간방법의 도입을 필요로 한다.

관련연구로 Parmakian[3]은 마찰항을 무시하고 나온 결과치를 수정하는 도해적 수격현상해석에 관한 연구를 하였고, Paynter[4]는 운동방정식과 연속방정식의 마찰항과 다른 비선형항을 선형화하여 사인곡선에 적용하여 해석적인 해를 얻었으며, Rachford 등[5]은 유한요소법을 이용한 부정류해석을 하였고, Karney 등[6]은 관망내의 부속물들을 통합관성요소를 이용하여 수치모의하였고, Holley 등[7]은 입방보간을 특성선 방법에 적용하였다.

관련연구들이 여러 가지 방법들을 활용하여 수격현상해석을 실시하였으나, 여러 가지 보간방법들에 대한 종합적인 검토는 그 필요성에 비해서 상대적으로 체계적이고 충분한 검토가 이루어져 있지 않다. 따라서 본 연구에서는 특성선 방법을 관망의 부정류해석에 적용시 사용되어지는 여러 가지 보간법을 제시하고, 또한 효율적인 관망의 해석을 위해 관망의 재구성을 실시하였다. 단계적으로 각각의 보간법에 대해 수치모의를 하고 비교 분석을 하였다. 본 연구는 적절한 보간법의 사용은 정확한 관망의 수격현상 해석에 필수적임을 보여준다.

2. 특성선방법의 지배방정식과 해석

일반적인 관로내에서 부정류해석을 위한 미분방정식으로 나타나는 운동량방정식과 질량보존 방정식의 형태는 다음과 같다.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA}\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA\frac{\partial H}{\partial x} + RQ|Q| = 0 \tag{2}$$

여기서, $R = f/(2DA)$, H=piezometric 수두, Q는 유량, D는 내부관경, f는 Darcy-Weisbach 마찰계수, a는 충격파속도, g는 중력가속도, A는 관로단면적이다. 식 (1)과 (2)를 조합하여 Q와 H로 이루어진 특성방정식을 얻을 수 있는데[1] 이 식은 천이상태에서 효율적인 수치해석적 해를 구하는데 이용된다.

$$\frac{dQ}{dt} \pm \frac{gA}{a}\frac{dH}{dt} + RQ|Q| = 0 \tag{3}$$

위의 식은 $dx/dt = \pm a$로 정의되어지는 C^+와 C^-

특성선(characteristic line)상에서만 유효하게 적용되어진다. 이러한 특성관계를 만족하기 위해서는 $\Delta x = \pm a\Delta t$의 관계가 성립되어야 한다. 일단 초기조건과 시간-공간 축이 결정되어지면 식 (3)은 Fig. 1에서 보여지는 AP와 BP선을 따라 적분되어진다.

Fig. 1에서 미지점 P에 대한 2개의 방정식은 다음과 같다.

$$Q_P = C_p - C_a H_P \tag{4}$$

$$Q_P = C_n + C_a H_P \tag{5}$$

여기서 적분상수는 다음과 같다.

$$C_p = Q_A + C_a H_A - RQ_A|Q_A|\Delta t \tag{6}$$

$$C_n = Q_B - C_a H_B - RQ_B|Q_B|\Delta t \tag{7}$$

$$C_a = \frac{gA}{a} \tag{8}$$

여기서, 수두 H와 유량 Q의 아래첨자는 그 지점의 수두와 유량을 의미한다. P점에서 수두와 유량을 계산하기 위해서는 초기조건 A점과 B점이 알려져야 하는데, 임의의 관망에 식(4)에서 식(8)을 적용하는 과정은 정류상태의 값들을 부정류상태의 초기값으로 취함으로써 부정류상태의 계산이 진행될 수 있다.

관로에서 식 (6)과 (7)을 활용하기 위해서는, 특성선상의 계산요소 Δx가 정의되어야 한다. 일반적으로 관로는 여러 개의 계산요소로 구성되어 있는데, 이는 Δx가 관로의 전 영역에서 동일하게 구성

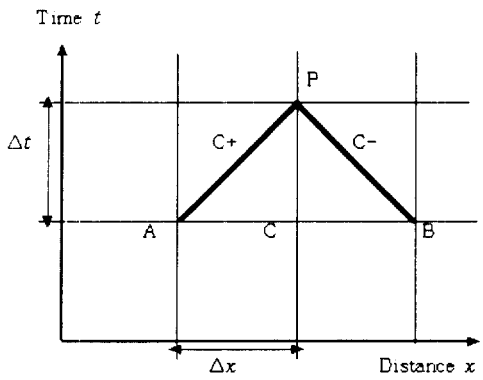


Fig. 1. Grid for solving pipe problem.

될 수 없음을 의미한다. 상이한 Δx중 가장 작은 Δx에 대한 Δt의 정의를 식 (9)에 적용하여 이 계산요소에 대한 Courant 수(C_r)는 1을 만족하게 결정되고 전 계산요소에 동일하게 적용된다.

$$C_r = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \tag{9}$$

여기서 a는 충격파속도이다. 임의의 계산요소에 대한 C_r는 수치계산상의 파속도에 실제파속도의 비를 나타낸다. 따라서 관로내의 각각 계산요소의 C_r는 항상 1과 같거나 작게 된다.

3. 보간법

3.1. 보간의 필요성

Fig. 2는 계산요소1과 계산요소2가 절점 2에 의해 연결되어 있다. 각 계산요소의 파진행시간이 같다면, Δt는 같은 계산시간간격으로 계산되어지고, 각 단위들은 C_r가 1이 된다. 이 방법에서는 유일한 해가 각 시간간격마다 얻어진다. Fig. 3에서 두 개의 계산요소에 대한 진행시간이 다르다면, Fig. 2에서와는 달리 F와 G가 불일치한다. 이 문제를 해결하기 위해서는, F와 G점간의 보간이 필요하게 된다. 이는 계산요소의 진행시간이 모든 진행시간 중 가장 짧은 Δt와 같지 않으면 보간을 필요함을 의미

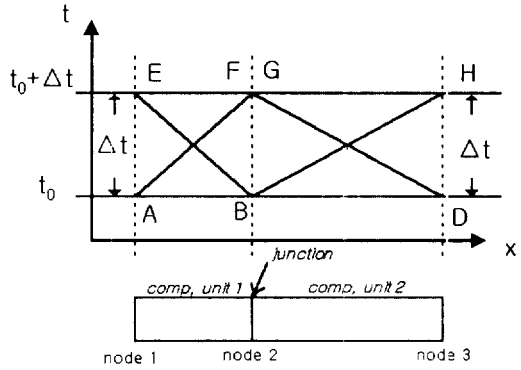


Fig. 2. Characteristic line with even wave travel time.

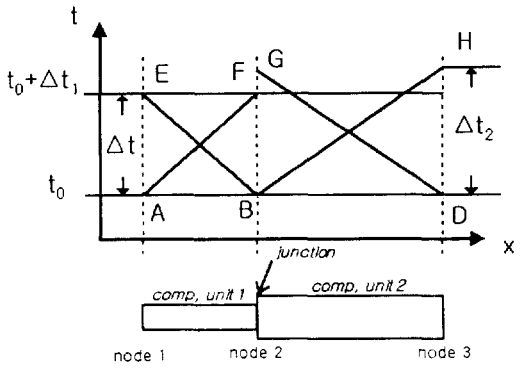


Fig. 3. Characteristic line with uneven wave travel time.

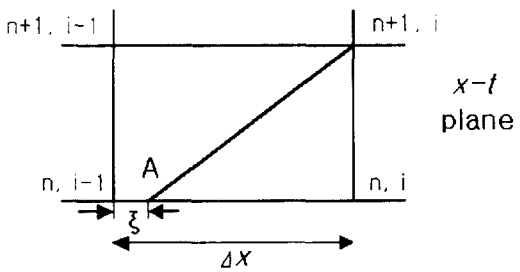


Fig. 4. Spaceline interpolation for the C^+ characteristic; n=time index, i=space index.

한다. 보간은 계산이 진행됨에 따라 오차를 유발하기 때문에, 적절한 보간방법의 사용은 신뢰성있는 천이문제해석에 필수적이다.

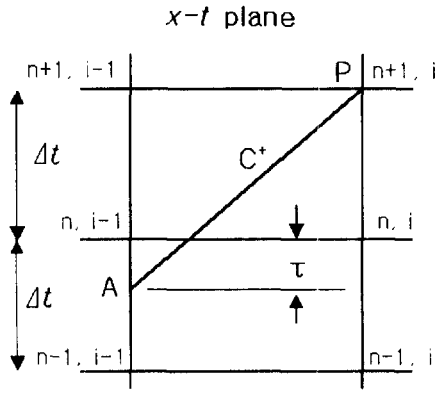
3.2. 선형 공간 보간 (Spaceline Linear Interpolation)

Fig. 4는 절점(n+1, i)로부터 특성선은 시간 n축의 A점에 교차되며, A점의 값은 절점(n, i-1)과 절점(n, i)사이의 선형적인 보간에 의해 결정될 수 있음을 보여준다.[8]

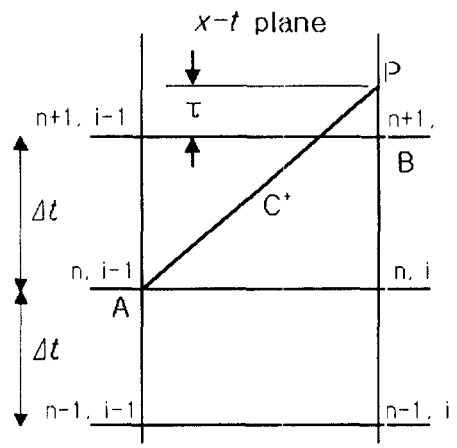
$$h_A = \frac{\xi}{\Delta x} h_i^n + \frac{\Delta x - \xi}{\Delta x} h_{i-1}^n \tag{10}$$

$$Q_A = \frac{\xi}{\Delta x} Q_i^n + \frac{\Delta x - \xi}{\Delta x} Q_{i-1}^n \tag{11}$$

여기서, ξ는 A점과 절점(n, i-1)사이의 공간선상의 간격이고, h_A와 Q_A는 A점의 수두와 유량이다. 식



(a) Linear timeline interpolation at kr.own level



(b) Linear timeline interpolation at unknown level

Fig. 5. Timeline interpolation for the C^+ characteristic ; n=time index, i=space index.

(10)은 절점(n, i-1)의 수두와 절점(n, i)의 수두의 선형보간을 나타내고, 식 (11)은 절점(n, i-1)의 유량과와 절점(n, i)의 유량의 선형보간을 나타낸다.

3.3. 선형 시간 보간 (Timeline Linear Interpolation)

특성선이 미지의 시간축인 n+1로부터 A점으로 기지의 시간선을 양분한다면(Fig. 5a), 절점(n-1, i-1)와 절점(n, i-1)사이에 보간이 식 (12)와 같이 이루어진다.[9]

$$h_A = \frac{\tau}{\Delta t} h_{i-1}^{n-1} + \frac{\Delta t - \tau}{\Delta t} h_{i-1}^n \tag{12}$$

여기서, τ는 A점과 절점(n, i-1)사이의 시간선상의 간격이다. 식 (12)는 기지점 선형 시간 보간(Linear timeline interpolation at known level)을 나타낸다. 만약 특성선이 절점A(Fig. 5b)에 위치하고 있다면, 이 특성선은 시간선을 가로질러 절점 P에 위치하게 된다. 절점 B에 대한 수두는 P점과 절점(n, i)을 이용한 보간으로 구해질 수 있다.

$$h_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{\Delta t + \tau} h_P + \frac{\tau}{\Delta t + \tau} h_i^n \qquad (13)$$

여기서, τ는 B점과 절점(n+1, i)사이의 시간선상의 간격이다. 식 (13)은 미지점을 계산식에 포함하고 있으므로, 이 식을 미지점 선형 시간 보간(Linear timeline interpolation at unknown level)이라 한다.

3.4. 파속도 조정법 (Wave Speed Adjustment)

Ghidaoui와 Karney[10]는 보간방법들은 실제값에 수치적 산란이 포함되고, 파속도는 관내의 공기방출 같은 현상으로 변화될 수 있다는 것을 알아냈다. 이와 같은 파속도의 불확실성을 고려해서 비교적 간단한 보간방법을 제시했는데, 즉 기지값으로부터 미지값으로 직접 특성선을 연결하기 위해 파속도의 변형을 제시했다. Fig. 6의 실선 AP은 실제 파속도의 특성선을 나타내고, 점선 AB는 조정된 파속도의 특성선을 나타낸다.

3.5. 입방 공간 보간 (Cubic Compact Space Interpolation)

선형적인 방법들과 비교해 입방 보간방법은 해를 근사시키는데 더욱 정확하다.[7] 이 보간방법은 시간축의 알고있는 모든 절점의 수두와 유량값, 그리고 수두와 유량의 도함수 값을 이용하여 얻어진다. Fig. 7은 공간선상에서 적용되어지므로 입방공간보간이라 한다. A점의 수두와 유량은 다음과 같다.

$$h_A = a_1 h_{i-1}^n + a_2 h_i^n + a_3 \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{i-1}^n + a_4 \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_i^n \qquad (14)$$

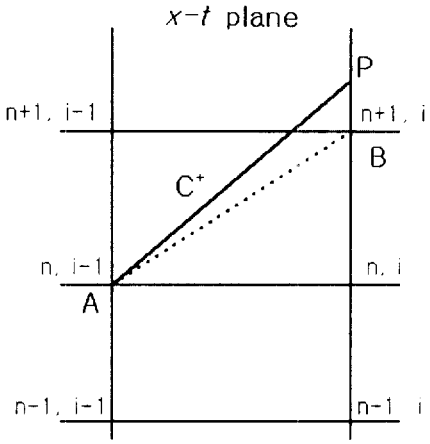


Fig. 6. Wave speed adjustment.

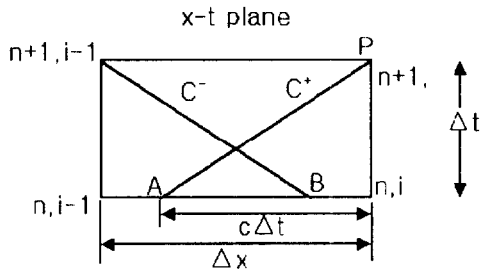


Fig. 7. Characteristic lines in computational unit for compact cubic spaceline interpolation.

$$Q_A = a_1 Q_{i-1}^n + a_2 Q_i^n + a_3 \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{i-1}^n + a_4 \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^n \qquad (15)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_A = c_1 h_{i-1}^n + c_2 h_i^n + c_3 \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{i-1}^n + c_4 \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_i^n \qquad (16)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_A = c_1 Q_{i-1}^n + c_2 Q_i^n + c_3 \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{i-1}^n + c_4 \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^n \qquad (17)$$

여기서 각 계수는 다음과 같다.

$$a_1 = C_r^2(3 - 2C_r) \qquad a_2 = 1 - C_r^2(3 - 2C_r) = 1 - a_1$$
$$a_3 = C_r^2(1 - C_r)\Delta x \qquad a_4 = -C_r(1 - C_r^2)\Delta x \qquad (18)$$

$$c_1 = \frac{6C_r(C_r - 1)}{\Delta x} \qquad c_2 = -\frac{6C_r(C_r - 1)}{\Delta x} = -c_1$$
$$c_3 = C_r(3C_r - 2) \qquad c_4 = (C_r - 1)(3C_r - 1) \qquad (19)$$

식 (14)는 A점의 수두가 (n,i-1)점과 (n,i)점의 수두와 수두의 도함수로 나타낼 수 있음을 보여준

다. 식 (16)은 A점의 수두의 도함수가 (n,i-1)점과 (n,i)점의 수두와 수두의 도함수로 나타낼 수 있음을 보여준다. 마찬가지로 유량에 관한 식 (15)와 식 (17)도 상기과정과 같다.[11] 식 (14), (15), (16), (17)의 계수는 식 (18)과 (19)에서처럼 C_r의 함수이다.

3.6. 입방 시간 보간 (Cubic Compact Time-line Interpolations)

입방 공간 보간과 반대로, 입방 시간 보간은 공간 도함수대신에 시간도함수를 이용한다. Fig. 8의 A점과 B점의 보간해유도는 입방 공간 보간과 유사하다.

$$h_A = a_1 h_{i-1}^{n-1} + a_2 h_{i-1}^{n} + a_3 \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{i-1}^{n-1} + a_4 \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{i-1}^{n} \tag{20}$$

$$Q_A = a_1 Q_{i-1}^{n-1} + a_2 Q_{i-1}^{n} + a_3 \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{i-1}^{n-1} + a_4 \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{i-1}^{n} \tag{21}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_A = b_1 h_{i-1}^{n-1} + b_2 h_{i-1}^{n} + b_3 \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{i-1}^{n-1} + b_4 \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{i-1}^{n} \tag{22}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_A = b_1 Q_{i-1}^{n-1} + b_2 Q_{i-1}^{n} + b_3 \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{i-1}^{n-1} + b_4 \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{i-1}^{n} \tag{23}$$

여기서 각 계수는 다음과 같다.

$$a_1 = x^2(3-2x) \quad a_2 = 1 - x^2(3-2x) = 1 - a_1 \tag{24}$$
$$a_3 = x^2(1-x)\Delta t \quad a_4 = -x(1-x^2)\Delta t$$

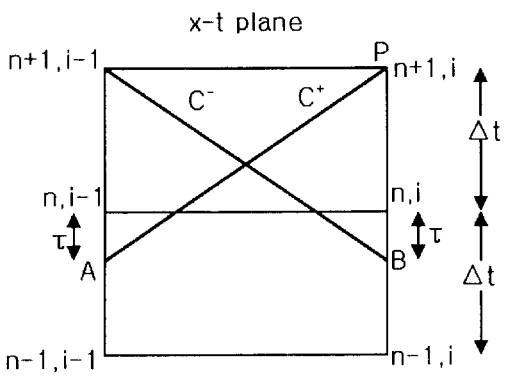


Fig. 8. Characteristic lines in computational unit for compact cubic timeline interpolation.

$$b_1 = \frac{6x(x-1)}{\Delta t} \quad b_2 = -\frac{6x(x-1)}{\Delta t} = -b_1 \tag{25}$$
$$b_3 = x(3x-2) \quad b_4 = (x-1)(3x-1)$$

$$x = \frac{1}{C_r} - 1 \tag{26}$$

식 (20)은 A점의 수두가 (n,i-1)점과 (n-1,i-1)점의 수두와 수두의 도함수로 나타낼 수 있음을 보여준다. 식 (22)는 A점의 수두의 도함수가 (n,i-1)점과 (n-1,i-1)점의 수두와 수두의 도함수로 나타낼 수 있음을 보여준다. 마찬가지로 식 (21)와 식 (23)도 상기과정과 같다.[11]

일반적으로 입방 보간방법은 선형적인 보간방법에 비해 훨씬 더 큰 정확도를 제공한다. 하지만 이 고차방법들은 위의 식에서처럼 Q와 h의 천이방정식의 계산과 도함수 $\partial Q/\partial t$와 $\partial h/\partial t$에 대한 천이방정식을 계산하기 위해 보다 긴 시간을 필요로 한다.

4. 적용예

4.1. 단일 관망

Fig. 9는 일정수두의 저수지와 유량조절밸브, 100m, 900m 관으로 구성되어있다. 관의 직경은 1m, Darcy-Weisbach 마찰계수는 0.012이다. 저수지 쪽의 200.99m의 수두로 물이 밸브 쪽으로 흐르면서 시간 4초에서 5초 동안 밸브가 선형적으로 닫힘으로써 수격현상을 도입하였다. 관망의 과속도는 모두 1000m/s로 설정하였고, 관망의 최소 C_r는 1/9이므로 900m 관은 보간을 필요로 한다. 최소 C_r의 변화에 따른 결과를 비교해 보기 위해, 900m

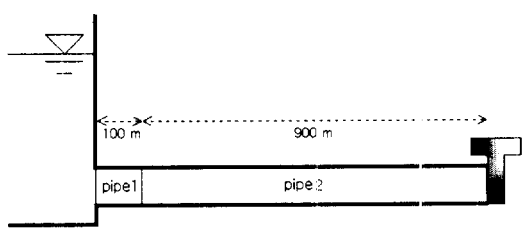


Fig. 9. A simple network.

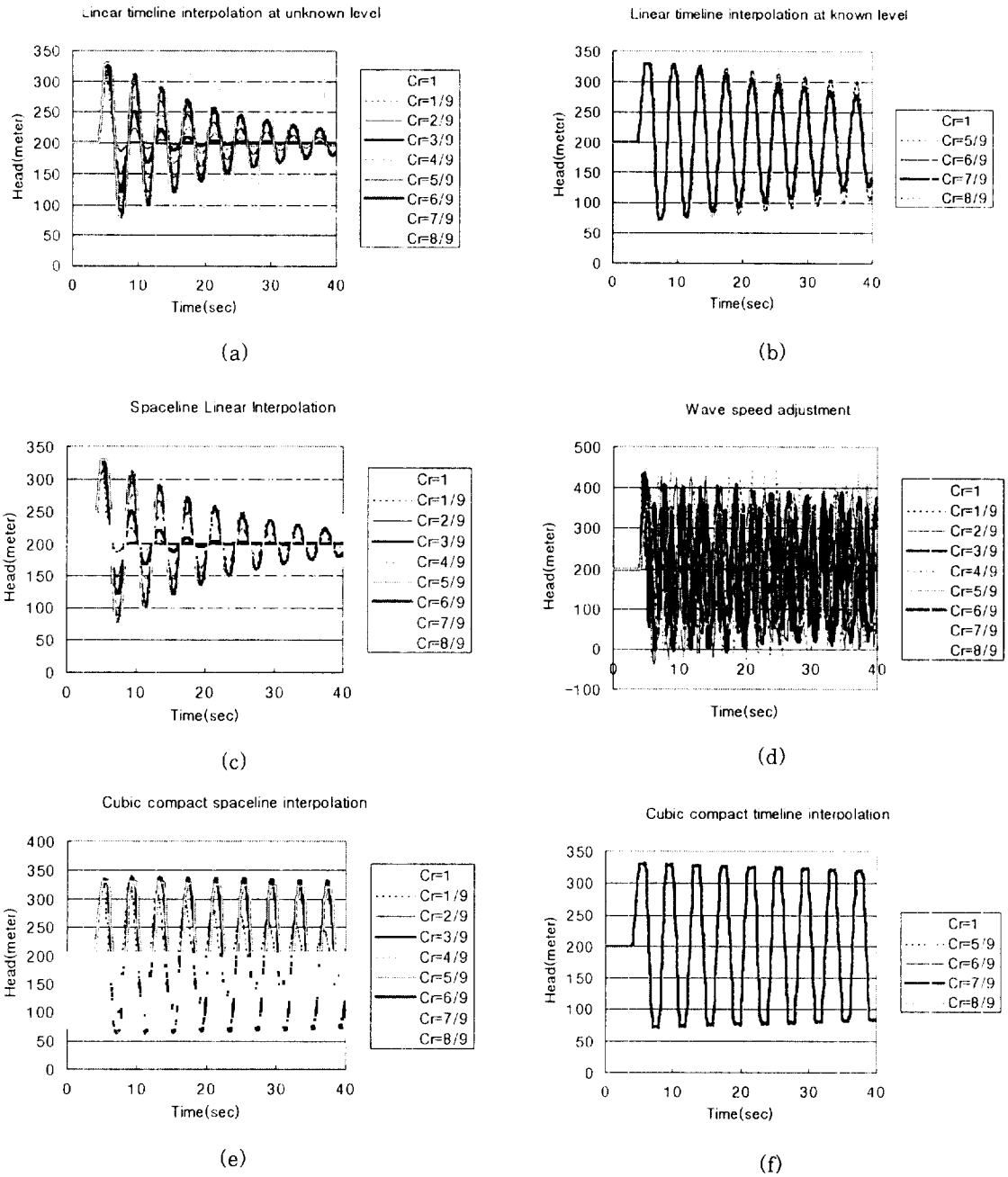


Fig. 10. Head variations as a function of C_r and interpolation method.

관을 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8개로 나누어 설정한 최소 C_r=1/9, 2/9, 3/9, 4/9, 5/9, 6/9, 7/9, 8/9을 900m 관을 9개로 나누어 보간오차가 없게 설정한 최소 C_r=9/9=1인 경우와 비교하여 40초간 0.1초 간격으로 수치모의를 실시하였다.

Fig. 10은 Fig. 9을 각각의 최소 C_r와 보간방법에 따라 밸브가 있는 지점에서 수두를 계산한 것이다. 초기 4초간 정상상태를 유지하다가, 밸브의 잠김으로 인한 수격현상을 보여주고 있다. Fig. 10(a)는 미지점 선형시간보간을 이용하여 각각의 최소 C_r

에 따른 수두값을 비교한 것이다. 최소 C_r가 커짐에 따라 C_r=1인 값에 근접하여 감을 알 수 있다. Fig. 10(b)는 기지점 선형시간보간을 이용하여 각각의 최소 C_r에 따른 수두값을 비교한 것이다. 본 연구에서 제시된 기지점 선형시간보간은 3.3절에서 보인 수식의 특성에 따라 최소 C_r가 0.5 미만에서는 수렴하지 않음을 알 수 있다. Fig. 10(c)는 선형공간보간을 이용하여 각각의 최소 C_r에 따른 수두값을 비교한 것이다. 이 선형시간 보간법과 선형공간 보간법의 경우 C_r=1인 해에 비해 시간이 지남에 따라 감쇄가 있음을 알 수 있다. Fig. 10(d)는 파속도 조정법을 이용하여 각각의 최소 C_r에 따른 수두값을 비교한 것이다. 파속도 조정법은 파고의 차 뿐만 아니라 위상의 차도 동반하여 다른 방법에 비해 현격히 큰 오차를 보이고 있다. 이는 임의로 파속도를 조정하는 파속도 조정법의 특성상 최소 C_r가 작아질수록 임의로 바뀌는 파속도의 값이 커지는 것에 기인된다. Fig. 10(e)와 Fig. 10(f)는 입방보간법을 이용하여 각각의 최소 C_r에 따른 수두값을 비교한 것이다. 입방보간법은 선형보간법에 비해 각 절점의 도함수에 대한 천이방정식까지 계산하여 좀 더 정확한 값을 나타내지만, 수치모의시 많은 계산시간이 소모되었다. 입방시간보간법은 기지점 선형시간보간처럼 수식의 특성에 따라 최소 C_r가 0.5 미만에서는 수렴하지 않았다. 0.1초 간격의 40초간 총 400단계동안 C_r=1인 값과 차이의 절대값의 총합은 Table 1과 같다.

Table 1은 보간오차가 없는 C_r가 1인 수두값과 각각의 C_r와 보간방법에 따른 수두값의 차이의 절대값의 총합을 나타내었다. Table 1의 결과에 따라 기지점 선형시간보간과 입방시간보간을 제외한 보간법들은 C_r수가 1에 가까워짐에 따라 보간오차가 감소함을 알 수 있다. 기지점 선형시간보간과 입방시간보간은 C_r수가 1과 0.5에 가까울수록 오차가 적어짐을 알 수 있다. 파속도 조정법은 제시된 보간법 중 가장 큰 오차값을 보여 주었다. 입방보간법들은 선형보간법들에 비해 비교적 작은 오차를 보여주고 있는데, 입방시간보간은 C_r수가 0.5와 1사이에서 현격히 작은 오차를 발생시켰다.

4.2. 복합관망

Fig. 11(a)는 총 29개의 관과 23개의 절점으로 구성되어진 관망이다. Fig. 11(a)에서 각 숫자들은 절점을 표시하고, 점선들은 외부 유출을 나타내고, 절점 1, 6, 10, 16에서는 일정수두의 저수지와 연결되어 있다. Table 2는 수치모의를 위하여 각 관의 파속도를 1000m/s로 설정하여, 최소 C_r는 0.25가 되도록 관망을 구성하였다. 따라서 200m, 400m는 여러 가지 보간방법에 의해 해석되어진다. 초기 정

Table 1. The sum of absolute difference between head for C_r=1 and head for other C_r with interpolation method

	C_r=1/9	C_r=2/9	C_r=3/9	C_r=4/9	C_r=5/9	C_r=6/9	C_r=7/9	C_r=8/9
Linear timeline interpolation at unknown level	31573.14	30310.15	28563.21	26128.74	22796.97	18470.8	13201.76	7100.015
Linear timeline interpolation at known level	*	*	*	*	5323.856	8915.21	8594.569	5760.758
Linear spaceline interpolation	31575.44	30312.67	28566.32	26132.49	22801.32	18474.99	13204.89	7101.928
Wave speed adjustment	33387.99	35291.26	39792.04	51805.27	51418.65	48088.17	45899.09	39703.78
cubic compact spaceline interpolation	28116.88	12085.56	7903.548	5554.344	4093.108	3106.9	2424.078	1894.573
cubic compact timeline interpolation	*	*	*	*	363.6985	408.5776	408.9809	357.5045

(*can't solve)

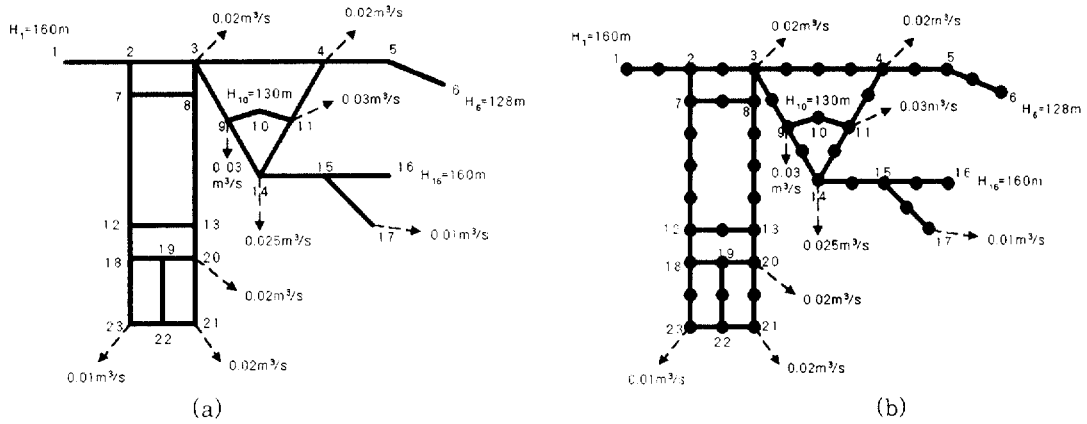
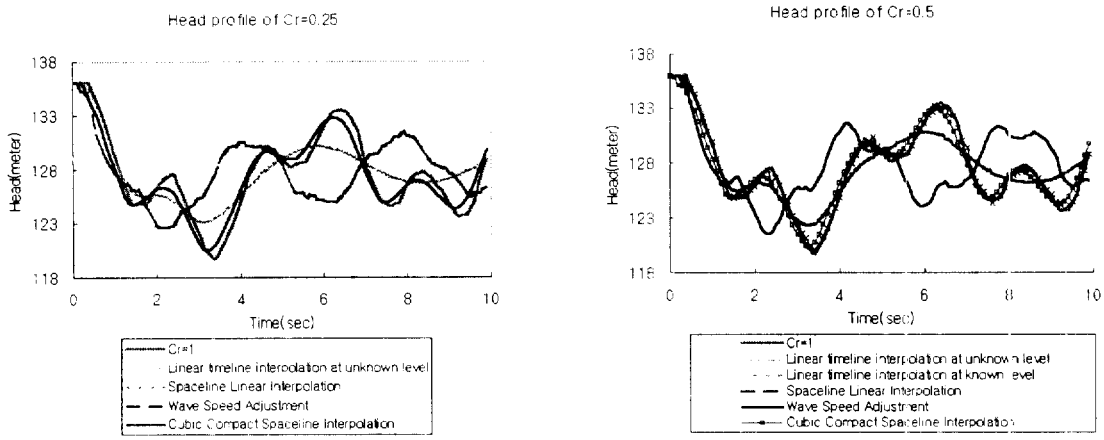


Fig. 11. A complex network.

Table 2. Feature of the pipe in Fig. 10(a)

Pipe Number	Upstream node	Downstream node	Length(m)	Diameter(m)	Darcy friction factor
1	1	2	200	0.5	0.04
2	2	3	200	0.5	0.04
3	3	4	400	0.5	0.04
4	4	5	200	0.5	0.04
5	5	6	200	0.5	0.04
6	2	7	100	0.5	0.04
7	7	8	200	0.5	0.04
8	3	8	100	0.5	0.04
9	3	9	200	0.5	0.04
10	9	10	100	0.5	0.04
11	10	11	100	0.5	0.04
12	4	11	200	0.5	0.04
13	9	14	200	0.5	0.04
14	11	14	200	0.5	0.04
15	14	15	200	0.5	0.04
16	15	16	200	0.5	0.04
17	15	17	200	0.5	0.04
18	7	12	400	0.5	0.04
19	8	13	400	0.5	0.04
20	12	13	200	0.5	0.04
21	12	18	100	0.5	0.04
22	13	20	100	0.5	0.04
23	18	19	100	0.5	0.04
24	19	20	100	0.5	0.04
25	20	21	200	0.5	0.04
26	19	22	200	0.5	0.04
27	18	23	200	0.5	0.04
28	21	22	100	0.5	0.04
29	22	23	100	0.5	0.04



(a) (b)

Fig. 12. Head variation as a function of C_r and interpolation method.

Table 3. The sum of absolute difference between head for C_r=1 and head for other C_r with interpolation method

	Linear timeline interpolation at unknown level	Linear timeline interpolation at known level	Linear spaceline interpolation	Wave speed adjustment	cubic compact spaceline interpolation	cubic compact timeline interpolation
minimum C_r=0.25	147.4407	*	147.941	320.4643	84.0252	*
minimum C_r=0.5	123.3062	0.792	123.8167	337.3362	73.7797	25.6738

(* : can't solve)

상상태에서의 1번 절점에서, 1초간 수두를 160m에서 130m로 낮추어서 수격현상을 발생시키고, 3번 절점에서의 수두값을 10초간 수치모의를 실시하였다. 최소 C_r가 0.5가 되도록 설정하기 위하여 400m의 관을 200m로 나누어 수치모의를 실시하였다. Fig. 11(a)에서 수행되어지는 각각의 보간방법을 비교하기 위해 관의 모든 길이를 100m로 관망을 재구성하여 C_r가 1이 되어 보간 오차가 없도록 구성한 관망은 Fig. 11(b)에 나타나있다.

Fig. 12는 Fig. 11(a)를 최소 C_r=0.5, 최소 C_r=0.25으로 구성하여 각각의 보간방법에 대해 수두값을 비교한 것이다. 단일관망에서처럼 기지점 선형시간보간과 입방시간보간은 C_r가 0.5보다 작은 경우 발산하는 것을 알 수 있다. 선형보간들은 시간이 지남에 따라 입방보간들에 비해 상당한 감쇄가 나타남을 알 수 있다. 파속도 조정법 역시 단일관망과 마찬가지로 상당한 오차를 보여줌을 알 수 있다. 보간방법별로 오차의 정량적인 분석을 위해 0.1초 간격의 10초간 총 100단계동안 C_r=1인 계산해와 각 보간방법에 의한 계산해의 차이의 절대값의 총합을 계산하였다.

Table 3은 보간오차가 없는 C_r가 1인 수두값과 각각의 C_r와 보간방법에 따른 수두값의 차이의 절대값의 총합을 보여주고 있다. 기지점 선형시간보간과 입방 시간보간을 제외한 보간들은 최소 C_r가 커짐에 따라 보간오차가 작아짐을 알 수 있다. 기지점 선형시간보간과 입방시간보간은 단일 관망에서처럼 C_r가 0.5인 경우 보간 오차가 다른 방법에 비해 미소함을 알 수 있다. 따라서 C_r가 0.5 미만인 경우는 입방공간보간을 사용하고, C_r가 0.5에서 1사이인 경우는 기지점 선형시간보간과 입방시간보간 중 계산시간을 고려하여 하나를 선택하는 것이 효율적임을 알 수 있다. 그러나 Table 1과 Table 3에서 보면 C_r의 범위에 따라 10%에서 크게 5000%까지

변화되므로, 기존의 관망의 최소 C_r값이 1에 가까워 지도록 관망을 재구성하고, 재구성된 관망에서 정확도와 계산시간을 고려하여 선형시간보간이나 입방시간보간을 선정하는 것이 적절하다고 판단된다.

5. 결 론

본 연구에서는 특성선 방법을 이용한 관망의 부정류해석시 발생되는 제약조건을 효율적으로 해결하기 위해, 기존 관망의 재구성과 보간방법인 미지점 선형시간보간, 기지점 선형시간보간, 선형 공간보간, 파속도 조정법, 입방공간보간, 입방시간보간을 제시하고 C_r에 따른 오차해석을 실시하였다. 기저점 선형시간보간과 입방시간보간을 제외한 보간방법들은 C_r가 1에 가까워짐에 따라 보간오차가 적어짐을 알 수 있었다. 기지점 선형시간보간과 입방시간보간은 본 연구에서 제시한 수식의 특성에 의해 최소 C_r가 0.5보다 작은 경우 수렴하지 않았다. 두 보간방법은 C_r가 0.5에 가까울수록 보간오차가 적어짐을 알 수 있었다. 입방보간은 선형보간에 비해 더 많은 계산시간을 요구하지만, 보다 정확한 값에 근접하는 것을 알 수 있었다. 특히 최소 C_r가 0.5 이상에서는 입방시간보간이 가장 작은 보간오차를 보여주었다. 파속도 조정법은 보간방법의 특성으로, 다른 보간방법들에 비해 더욱 큰 보간오차를 발생하는 것을 알 수 있었다. 이는 수격작용의 크기와 위상에서 큰 불일치를 보이는데 기인한다. 효율적으로 관망을 해석하기 위해서는, 기존의 관망을 최소 C_r 값이 1에 가까워 지도록 관망을 재구성하고, 재구성된 관망에서 서로 진행시간이 다른 관들은 적당한 보간방법들을 이용하여야 한다. 따라서 복잡한 관망에서 신뢰성 있는 부정류해석을 위해서는 관망의 재구성과 보간방법을 적절히 선택하여 수치모의를 실시하여야 할 것으로 판단된다.

사 사

본 논문은 한국과학재단 지정 환경기술·산업개발연구센터(RRC-IETI)의 지원(과제번호 : 99-10-02-99-A-3)에 의하여 연구되었으며 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Roberson, J., Cassidy, J. and Chaudhry, M. H., Hydraulic engineering, Boston Graphics, Inc.(1993).
2. Wylie, E. B. and Streeter, V. L., Fluid transients in Systems, Prentice Hall(1993).
3. Parmakian, J., Water-Hammer Analysis, Dover New York(1963).
4. Paynter, H. M., "Studies in Unsteady Flow," *J. Boston Soc. Civil Eng.*, **39**, 120~165(1952).
5. Rachford, Jr. H. H. and Ramsey, E. L., "Application of Variational Methods to Model Transient Flow in Complex Liquid Transmission Systems," Paper SPE 5663, Society of Petroleum Engineers of AIME, Dallas(1975).
6. Karney, B. and McInnis, D., "Efficient calculation of transient flow in single pipe network," *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, **118**(7), 1014~1030(1992).
7. Sibetheros, I. A., Holley, E. R. and Branski, J. M., "Spline Interpolations for Water Hammer Analysis," *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, **117**(10), 1332~1351(1991).
8. Wiggert, D. C. and Sundquist, M. J., "Fixed-Grid Characteristics for Pipeline Transients," *Journal of Hydraulics Division, ASCE*, **103**(12), 1403~1416(1977).
9. Goldberg, D. E. and Wylie, E. B., "Characteristics Method using Time-line Interpolations," *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, **109**(5), 670~683(1983).
10. Ghidaoui, M. S. and Karney, B. W., "Equivalent Differential Equations in Fixed-Grid Characteristics Method," *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, **120**(10), 1159~1175(1994).
11. Chen, L. C., Pipe Network Transient Analysis-The Forward and Inverse Problem, Ph. D. dissertation, Cornell University(1995).