

비평행 이동 기간구조하에서 부분 듀레이션을 이용한 채권 면역 모델†

박우철 · 최경현

한양대학교 산업공학과

Bond Immunization Model with Non-parallel shift Term-Structure using Partial Duration

Woocheol Park · Gyunghyun Choi

Bond immunization model is used to minimize interest rate risk for investing in fixed-income market, the model equalizes asset and liability values using the duration which is the sensitivity of portfolio value with respect to the interest rate. However this model might generate an error in practice because the model is based on unreal hypothesis, so called "Parallel Shift Term Structure". In this paper, we use the neural network approach to overcome the parallel shift term structure and try to employ this term structure function to the traditional immunization model. Finally, we present some computational test results that show the superiority of the partial immunization model to the traditional methods.

1. 서론

고정금리상품은 정해진 수익률과 만기를 가진 금융상품으로 다른 금융상품에 비해 위험이 적으므로 금융기관의 자산·부채관리(asset-liability management)에서 중요한 역할을 하고 있다. 그러나 고정금리상품 역시 예측할 수 없는 위험을 가지고 있으며 이중 큰 비중을 차지하는 것이 이자율 변화에 따른 이자율 위험(interest-rate risk)이다. 이자율 위험은 크게 두 가지 부분으로 나뉘는데 이자율 상승시 보유하고 있는 채권의 가격이 상대적으로 하락하는 가격위험(price risk)과 이자율 하락시 만기가 돌아온 채권을 낮은 이자율의 상품에 투자하게 됨으로써 발생하는 재투자 위험(reinvestment risk)이 그것이다.

이와 같은 이자율 위험을 피하기 위한 자산·부채 관리문제는 크게 결정론적 방법(deterministic approach)과 확률적 방법(stochastic approach)으로 나누어지며, 면역 전략(immunization strategy)은 이자율 위험을 없애는 결정론적 방법으로 널리 사용되고 있다. 면역 전략은 이자율 위험을 피하기 위해 자산과 부채의 가격민감도를 일치시키는 것을 말한다. 이 때 사용되

는 가격민감도는 주로 수정 듀레이션(D)을 사용한다(McEnally, 1977). 면역 전략은 선형계획법 문제로 수행되므로 계산량이 적고 실제 현실문제에 적용되기 쉬우며 이자율 예측과 같은 불확실성을 고려하지 않는다는 점에서 유용한 위험회피 수단이 될 수 있으나, 이자율이 만기에 상관없이 항상 일정한 크기로 변화한다는 기간구조의 평행이동(parallel shift term-structure)이라는 가정하에서 수행된다는 것이 단점이다. 기간구조의 평행이동 가정하에서 고정금리상품의 가치는 그 상품의 만기에 상관없이 같은 크기로 변화하지만 실제 자산을 운용할 때의 이자율 변화는 평행하지 않은 움직임을 가지므로 자산과 부채의 가치에 차이가 생기게 된다. 이런 단점을 없애기 위한 방법으로 비평행한 움직임을 갖는 수익률 곡선을 도입하거나 고차 미분을 이용(high order matching)하는 방법들이 연구되어 왔다. Hiller and Schaack(1991), Cooper(1977), Chambers and Carleton (1981) 등은 수익률 곡선을 비선형 함수로 구성하거나 이산적 시간에 대한 수열로 표현하는 수익률 곡선의 모델링을 연구하였고, Reitano (1990, 1992), Barber and Copper (1996) 등은 이자율이 비평행하게 움직인다는 전제하에서 듀레이션을 분해하는 다중방향모델(multiple direction model)을 연구하였다. 고차 미분

† 이 논문은 1999년도 한양대학교 교내 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

의 이용에 대한 연구로는 Bierwag *et al.*(1988)와 Dahl *et al.*(1993) 등이 있으며 고차미분과 분산의 관계를 이용하여 상대적으로 큰 이자율 변동을 면역하는 방법을 연구하였다.

본 연구에서는 비평행 이동의 수익률 곡선을 이용하는 방법을 실제 현실에 적용할 수 있도록 확장하는 문제에 대해 다루고 있다. 이를 위해, 수익률 곡선의 비평행한 움직임을 설명하는 기간구조 함수(term structure function)를 정의하고, 신경망(neural networks)으로 기간구조 함수를 구성한 뒤, 이를 이용하여 확장된 면역 모델을 구성하게 된다. 이 모델은 전통적인 면역 전략과 마찬가지로 실제 현실 문제에 적용하기 쉽다는 점과 평행이동 가정을 없앨 수 있다는 장점을 가지고 있으며, 채권의 가격민감도로 사용되는 듀레이션이 보다 현실에 잘 반영할 수 있도록 확장된다는 점에서 그 중요성을 찾을 수 있다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 먼저, 면역 전략의 기초가 되는 듀레이션과 전통적 방식의 면역 모델에 대해 설명하며, 이어서 기간구조의 비평행 이동을 설명하는 기간구조 함수를 정의하고 이를 적용하기 위한 부분 듀레이션 모델에 대해 설명하게 된다. 다음으로 신경망을 이용한 기간구조 함수의 결정에 대해 설명한 뒤 이를 적용한 부분 듀레이션 모델을 구성하고 실제 데이터를 가지고 테스트하여 이 결과를 제시한다.

2. 듀레이션과 면역 전략

(Duration and Bond Portfolio Immunization Strategy)

다양한 현금흐름과 이자율을 가진 채권들의 합리적인 만기를 구하기 위해 Maculay(1938)는 듀레이션(duration)이라는 개념을 처음으로 제시하였다. 듀레이션은 채권의 현금흐름을 시간에 대해 가중 평균하여 채권의 가격으로 나눈 값으로, 채권 현금흐름의 인덱스를 $I = \{1, 2, \dots, m\}$, 현금흐름의 만기 집합을 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, $i \in I$ 번째 현금흐름과 현금흐름의 이자율을 각각 C_i , r_i 라 하면, 채권의 가격(P)과, 듀레이션(D)은

$$P = \sum_{i \in I} C_i (1 + r_i)^{-t_i} \quad (1)$$

$$D = \frac{\sum_{i \in I} t_i C_i (1 + r_i)^{-t_i}}{\sum_{i \in I} C_i (1 + r_i)^{-t_i}} = \frac{\sum_{i \in I} t_i C_i (1 + r_i)^{-t_i}}{P} \quad (2)$$

으로 정의되며, 이 경우 듀레이션은 채권의 현금흐름을 고려한 상대적인 만기를 나타내게 된다. 듀레이션은 채권의 상대적 만기를 나타내기도 하며 이자율에 대한 채권의 가격변화와도 깊은 관계를 가지고 있다. 즉, 수정 듀레이션(D')을

$$D' = -\frac{D}{1+r} = -\frac{dP}{dr} \frac{1}{P} \quad (3)$$

이라고 정의하면 수정듀레이션은 이자율에 대한 채권의 가격 변화량이 된다. 따라서 자산의 수정듀레이션이 부채의 수정듀레이션과 같아지도록 자산 포트폴리오를 구성할 경우, 이자율

변화에 대하여 자산과 부채의 포트폴리오의 가치가 같은 크기로 변화하므로 이자율 위험을 피할 수 있게 된다. 이와 같이 적절한 자산의 구성비율을 결정하여 이자율 위험을 피할 수 있도록 하는 것이 바로 면역 전략이다(Dahl *et al.*, 1993).

면역 전략의 수리모델은 채무 포트폴리오를 면역하는 자산의 구성비율을 구하는 최적화 문제이며, 모델에서 사용되는 상수와 변수를

- $I = \{1, 2, \dots, m\}$: 투자 가능 자산의 인덱스
- D_i : 각 투자자산 $i \in I$ 에 대한 듀레이션
- D_L : 부채 포트폴리오의 듀레이션
- r_i : 각 투자자산 $i \in I$ 의 이자율
- P_L : 부채 포트폴리오의 현재가치
- P_i : 각 투자자산 $i \in I$ 의 현재가치
- x_i : 각 투자자산 $i \in I$ 에 대한 투자비율

으로 정의한다(여기서 정의된 모든 듀레이션은 수정 듀레이션이며, 이후 사용되는 듀레이션은 모두 수정 듀레이션을 의미한다).

전통적인 면역 전략의 수리모델은 몇 가지 가정을 가지고 있는데, 부채는 전액 재투자되어 자산 포트폴리오를 구성한다는 가정과 모든 고정금리 상품의 이자율은 만기에 상관없이 같은 크기로 변화한다는 기간구조의 평행이동 가정이 그것이다. 전통적인 면역 전략의 수리 모델(immunization model)은 다음과 같이 정의된다.

[면역 모델]

$$\text{Maximize } \sum_{i \in I} D_i r_i x_i \quad (4)$$

$$\text{subject to } \sum_{i \in I} P_i x_i = P_L \quad (5)$$

$$\sum_{i \in I} D_i x_i = D_L \quad (6)$$

$$x_i \geq 0, \text{ for all } i \in I \quad (7)$$

첫 번째 제약식은 부채와 자산의 일치에 관한 것이며, 두 번째 제약식은 자산과 부채의 가격 민감도를 일치시키기 위한 것이다. 두 번째 제약식에 의해 자산과 부채의 가치변화는 일정하게 유지되므로 목적식은 기대수익률을 최대화하도록 구성되어 있다.

제약식들의 수리적 배경은 이자율에 대한 포트폴리오의 가치를 테일러 급수 전개(Taylor series expansion)한 것으로 설명할 수 있다. A, L 을 각각 자산과 부채의 포트폴리오, 자산과 부채의 현금흐름에 대한 이자율 벡터를 r 이라 할 때, $V(A, r)$, $V(L, r)$ 를 자산과 부채의 현재가치라 정의한다.

모델 수행 시점에서 금융기관의 자산과 부채가 동일하다고 가정하면

$$V(A, r) = V(L, r) \quad (8)$$

이 때 이자율이 변하여 r' 이 될 때 (8)식의 각 변을 일차 테일러 급수 전개하면

$$V(A, r') \cong V(A, r) + \frac{\partial V}{\partial r}(r' - r) \tag{9}$$

$$V(L, r') \cong V(L, r) + \frac{\partial V}{\partial r}(r' - r)$$

이 된다. 이자율이 변한 후에도 자산과 부채의 가치가 일치하려면 기간구조의 평행이동 가정과 식 (8)에 의해

$$\frac{\partial V(A, r)}{\partial r} = \frac{\partial V(L, r)}{\partial r} \tag{10}$$

이 성립되어야 하며, 식 (8), (10)은 각각 면역 모델의 제약식이 된다.

이론적으로 면역 모델은 자산과 부채의 가치를 정확하게 일치시키게 된다. 그러나 실제 현실에 적용할 경우 오차가 발생하는데, 이는 평행 이동 가정의 한계와 채권가치의 비선형 변화 때문이다. 우선 평행 이동 가정이 없을 경우, 식 (9)에서 식 (10)을 유도해 낼 수 없으므로 두 번째 제약식이 채권의 가치변화를 일치시킬 수 없게 된다. 따라서, 비평행이동의 기간구조 하에서는 면역 모델의 최적해가 부채를 완전히 면역할 수 없다. 다음으로 면역 모델에서의 채권가치는 이자율 변화에 대해 선형으로 움직이지만 실제 채권의 가치변화는 비선형이기 때문에 서로 다른 볼록성(convexity)을 가지는 자산과 부채에 대해 면역 모델을 적용하게 될 경우 오차가 발생한다. <그림 1>은 이자율에 따른 채권의 가치변화를 나타내고 있으며 비선형의 채권가치 움직임에 의한 오차를 설명하고 있다. 그림에서 실선으로 나타난 곡선이 자산의 가치변화 곡선, 점선으로 나타난 곡선이 부채의 가치변화 곡선이라고 하면, 이자율이 r_0 에서 r_1 로 변화할 때 실제 자산과 부채의 가치는 곡선을 따라 P_0 에서 각각 P_1, P_2 로 변하게 되지만, 면역 전략에서의 예측된 가치는 직선을 따라 P_d 로 변화하게 된다. 따라서, P_1, P_2

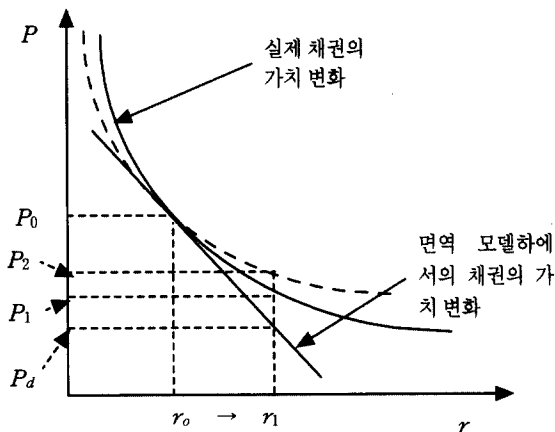


그림 1. 채권가치의 변화.

사이의 부채와 자산의 가격예측 오차가 되며, 이자율의 변화가 클수록 가격 예측 오차는 커지게 된다.

3. 비평행 이동 기간구조 함수

(Non-Parallel Shift Term-Structure Function)

이자율의 평행이동 가정을 피하기 위해 Barber and Copper (1996)는 평행하지 않은 움직임 가진 이자율을 설명하는 affine term structure model을 제시하였다. affine term structure model에서의 이자율은 단 한번의 현금흐름을 t 시점에 발생시키는 채권(zero coupon bond)에 대한 것으로 채권의 만기 t 와 외부의 변동요인 s 를 독립변수로 가지는 함수로 정의된다.

$$r(t, s) = r_0(t) + g(t)s \tag{11}$$

$r_0(t)$ 는 현재의 이자율 구조로 만기에 따른 채권의 이자율을 나타내고 있으며, $g(t)$ 는 해당 만기에 대한 변동량으로 이미 알려져 있다고 가정한다. 따라서, 현재의 이자율은 변동량과 외부 변동요인의 곱만큼 변화하게 된다.

<그림 2>는 affine term structure model에서의 이자율 변화를 설명하고 있다. 그래프에서 아래의 직선은 기준 시점의 이자율 구조($r_0(t)$)를 나타내고 있으며, 위의 직선은 외부 변동요인이 발생한 후의 이자율 구조를 나타내고 있다. 이자율은 외부 변동요인의 변동에 대해 $g(t_1), g(t_2)$ 의 비율로 변동한다. 변동량 $g(t)$ 를 결정하는 것은 선형적 문제(empirical question)이며, 평행이동 가정에서의 이자율은 $g(t) = 1$ 인 특별한 경우가 된다. Barber(1999)는 affine term structure model하에서 면역 전략이 단일 채무에 대해 전역 최적화(global optimization)를 이룰 수 있으며, 다수의 채무에 대해서도 부분 최적화(local optimization)를 이룰 수 있음을 증명하였다.

본 연구에서는 affine term structure model을 사용하는 대신 수익률 곡선이 비평행이동할 때 이를 나타낼 수 있는 함수가 존

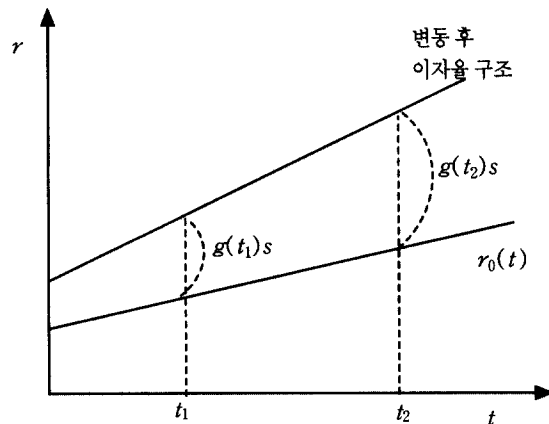


그림 2. Affine Term Structure.

재한다고 가정하여 이를 기간구조 함수(term-structure function)라 정의한다. 기간구조 함수 $f(r, t)$ 는 기준이자율(reference interest rate) r 과 채권의 만기(maturity) t 를 독립변수로 가지며 중도상환이 없는 만기 t 인 채권(zero-coupon bond)의 이자율을 의미한다. 독립변수 중 기준이자율은 미리 정해진 특정한 만기를 가진 채권 상품의 이자율로 정의한다. 기하학적으로 이 함수는 기준금리와, 만기의 두 축을 기준으로 하고 두 독립변수에 따른 이자율을 나머지 한 축으로 하는 3차 공간의 곡면으로 나타나게 된다. 이 함수를 결정하기 위해선 실제 시장에서의 이자율 데이터를 이용한다. 본 연구에서는 미국 연방준비위원회(FRB)에서 제공하는 국채의 금리를 이용하며, 기간구조 함수를 통계적 방법으로 구하는 대신, 신경망(neural networks)을 이용한 함수 근사(function approximation)를 이용하게 된다. 신경망은 여기서 다루고자 하는 비선형의 특성을 가지는 데이터들의 일반적 형태를 나타내는 데 뛰어난 성능을 가지고 있으며, 만기에 대한 이산적(discrete) 이자율 대신 연속적 형태의 이자율을 제시할 수 있는 장점이 있다. 원래의 이자율 데이터와 신경망을 이용하여 추정된 이자율 구조는 <그림 3>, <그림 4>와 같다. 만기가 3개월인 채권의 이자율을 기준이자율로 사용하였으며, <그림 3>이 실제 이자율의 그래프이며, <그림 4>가 신경망을 이용하여 추정된 이자율 그래프이다.

그림 3. 실제 이자율 구조.

그림 4. 신경망으로 만들어진 이자율 구조.

4. 부분 듀레이션(Partial Duration)

앞서 정의한 이자율 함수는 만기와 기준이자율에 대해 이자율의 움직임을 알 수 있도록 해준다. 이런 특성을 면역 전략에 적용하기 위해 만기에 따라 서로 다른 움직임을 가지는 이자율을 사용하는 새로운 면역 모델을 구현해야 한다.

듀레이션은 앞에서 살펴본 것과 같이 그 정의에 의해서 가법성(additive)을 가지게 된다. 즉, 채권을 구성하는 각 현금흐름에 대해 각각의 듀레이션을 계산할 수 있고 이를 가중 평균한 것이 전체 듀레이션 값이 된다. 이는 채권들의 집합인 포트폴리오에서도 마찬가지로 단일 포트폴리오의 듀레이션은 각 현금흐름에 따른 부분 듀레이션으로 나누어 질 수 있다. m 개의 현금흐름으로 이루어진 포트폴리오의 듀레이션은 각 현금흐름에 대한 듀레이션의 합으로 나타낼 수 있다.

$$D = D_1 + D_2 + \dots + D_m \quad (12)$$

예를 들어, 5년의 만기에 8%의 이자율을 가진 채권과, 10년 만기에 10% 이자율을 가진 두 채권에 각각 10과 20의 금액이 투자된 포트폴리오의 가격(P)과 듀레이션(D)은

$$P = 10(1.08)^{-5} + 20(1.10)^{-10} = 14.517 \quad (13)$$

$$D = [5 \times 10(1.08)^{-6} + 10 \times 20(1.10)^{-11}] / P = 6.999 \quad (14)$$

으로 계산된다. 전체 듀레이션은 두 개의 현금흐름 시점에 따라

$$D_1 = 5 \times 10(1.08)^{-6} / P = 2.170 \quad (15)$$

$$D_2 = 10 \times 20(1.10)^{-11} / P = 4.829 \quad (16)$$

의 부분 듀레이션으로 나누어질 수 있으며, 이는 각각의 만기와 이자율에 대해 현금흐름의 가격민감도가 두 개로 분리됨을 보여주고 있다. 듀레이션은 채권 가격의 변화량을 의미하므로 이자율이 변화할 경우 채권가격의 전체 변화량(ΔP)은

$$\Delta P = 2.170 \Delta r_1 + 4.829 \Delta r_2 \quad (17)$$

으로 나타낼 수 있게 된다. 이를 일반화하면 m 개의 시점에서 현금흐름을 발생시키는 포트폴리오의 가격 변화량은

$$\Delta P = D \Delta r = D_1 \Delta r_1 + D_2 \Delta r_2 + \dots + D_m \Delta r_m \quad (18)$$

로 나타낼 수 있으며, $D = (D_1, D_2, \dots, D_m)$, $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)^t$ 은 현금흐름의 인덱스 $I = \{1, 2, \dots, m\}$ 에 대한 듀레이션과 이자율의 벡터이다.

이자율의 변화량은 정의된 기간구조 함수를 이용하여 결정한다. 현금흐름의 만기시점 집합 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ 에 대해 이자율의 변화는

$$\Delta r_i = \Delta f(r, t_i), \quad i \in I \quad (19)$$

로 표현되며, 각 현금흐름 i 에 대한 듀레이션 D_i 는 처음 포트폴리오를 구성할 때 이미 계산된 상수 값이므로 각 시점 i 에 대한 이자율 변화량 Δr_i 을 기간구조 함수의 편미분 값으로 바꾸면 포트폴리오의 가치 변화량은

$$\frac{\partial P}{\partial r} \approx D_1 \frac{\partial f(r, t_1)}{\partial r} + D_2 \frac{\partial f(r, t_2)}{\partial r} + \dots + D_k \frac{\partial f(r, t_m)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \quad (20)$$

으로 나타낼 수 있다.

이것은 포트폴리오 구성시점의 기준이자율 r_0 에 대한 포트폴리오 가격변화량의 가중 평균으로 전체 포트폴리오의 가격민감도를 나타내게 되며, 듀레이션보다 현실에 맞는 가격민감도가 된다.

5. 신경망(Neural Networks) 응용

신경망은 망의 구조, 뉴런의 종류, 학습 방법에 따라 분류된다. 본 연구에서 사용되는 신경망은 다계층 퍼셉트론(multilayer perceptrons : MLP)으로 다계층 구조의 순방향 신경망(multilayer feed-forward network) 중 연속적 입력(continuous input)을 처리하는 활성화 함수(activation function)를 사용하며, 지도 학습(supervised learning)을 한다. MLP에서의 뉴런은 비선형 활성화 함수(nonlinear activation function)를 사용한다. 활성화 함수는 (0,1) 사이의 값을 가지는 단축 연속 함수(unipolar continuous function)를 주로 사용한다. 이 함수는

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

로 정의되며 s형 특성(sigmoidal characteristic)을 가지고 있다. MLP는 기간구조와 같은 비선형의 연속함수를 구성할 수 있음이 증명되어 있으며 뛰어난 성능을 가지는 것으로 알려져 있다(Stinchcombe, 1999; Zurada, 1995).

신경망의 훈련은 delta learning rule을 사용한 역전파 훈련(error back-propagation training)을 이용한다. 기간구조 함수를 표현하기 위해 사용된 신경망을 나타낸 것이 <그림 5>로 기준 이자율과 만기 두 가지의 입력은 그림에서 보는 것과 같이 출력층 방향으로 전파되면서 변형되어 하나의 결과값을 도출한다. 신경망의 훈련이란 결과값과 기대값(desired output)의 차이를 최소화하도록 뉴런을 연결하는 연결강도(weights)를 조정하는 것으로서, 연결강도들은 입력신호의 반대 순서로 조정된다. 주어진 학습자료에 대해 앞서 설명한 훈련 과정을 반복하여 연결강도의 변화를 수렴시키는 것이 신경망 훈련의 기본 원리로서, 입력에 대한 기대값을 알고 있는 경우를 지도학습(supervised learning), 출력층에서 입력층 방향으로 거슬러 올라가며 연결강도를 조정하는 것을 역전파(back-propagation)라 한

다. 연결강도를 조정하는 방법으로 사용되는 delta learning rule은 비선형 최적화의 steepest descent method와 동일한 방법으로 연결강도에 대한 제곱 오차의 그래디언트(gradient)를 연결강도의 수정 방향으로 선택하고 기대값과 결과값의 차이를 이동거리로 정하는 것이다. 훈련의 종료를 결정하는 기준은 보통 결과값과 기대값 사이의 오차나 뉴런을 연결하는 연결강도의 움직임이 어느 수준 이하일 때로 정한다. 훈련의 완성을 결정하는 것은 매우 힘든 문제로서 MLP는 수렴에 실패하거나 지역 최소값(local minimum)으로 수렴하는 경우가 발생할 수 있으므로 초기 연결강도(initial weight), 은닉층의 뉴런 수, 매개변수 등을 바꾸어 가며 테스트하는 과정을 거쳐야 한다.

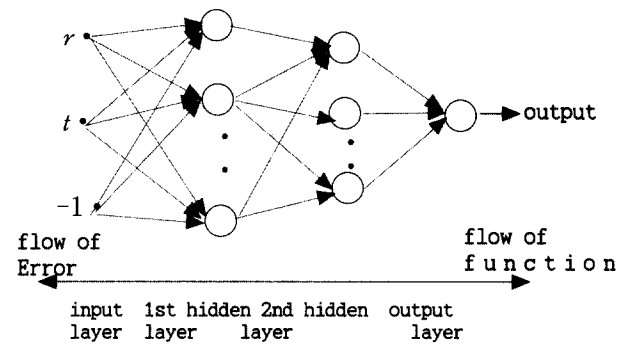


그림 5. 신경망의 구조.

6. 부분면역 모델(Partial Immunization Model)

이번 장에서는 기간구조 함수와 부분 듀레이션을 이용하여 면역 모델을 확장하는 방법을 제시한다. 부분면역 전략의 수리 모델은 자산과 부채 포트폴리오의 이자율에 대한 가치변화를 일치시키는 것으로, 부채와 동일한 크기의 자산 포트폴리오를 구성하는 최적화 문제가 된다. 이것은 앞에서 설명한 전통적인 듀레이션 모델과 동일하나 면역 전략이 개별 부채에 대해 수행된다는 점과 듀레이션 외에도 이자율의 변화량이 고려된다는 점에서 차이를 가지게 된다. 부분면역 모델에서 사용하는 상수와 변수는

- $I = \{1, 2, \dots, m\}$: 자산의 인덱스
- $J = \{1, 2, \dots, n\}$: 부채의 현금흐름 인덱스
- x_{ij} : 부채 현금흐름 $j \in J$ 를 면역하기 위해 $i \in I$ 자산에 투자된 금액 비율
- L_j : 부채 현금흐름 $j \in J$ 의 현재가치 환산비율
- $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$: 자산의 만기 집합
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$: 부채 현금흐름의 만기 집합
- D_i, D_j : 자산과 부채의 듀레이션, $i \in I, j \in J$
- r_0 : 기준 이자율

으로 정의되며, 부분면역 모델은 다음과 같이 정의된다.

[부분면역 모델]

$$\text{Maximize } \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} D_i x_{ij} r_i \quad (21)$$

subject to

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = L_j, \quad \text{for all } j \in J \quad (22)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} D_i \frac{\partial f(r, t_i)}{\partial r} = L_j D_j \frac{\partial f(r, t_j)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \text{ for all } j \in J \quad (23)$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ for all } i \in I, j \in J$$

부분면역 모델의 목적식은 면역 모델에서와 동일한 의미를 가진다. 첫 번째 제약식(22)은 전통적인 면역 모델과는 조금 형태가 다르지만 우변이 가치(value)가 아닌 비율(weight)을 나타내고 있으므로 각각의 부채 현금흐름에 대해 같은 금액이 면역을 위해 투자됨을 나타내고 있으며, 두 번째 제약식(23)은 각 부채 현금흐름에 대해 자산의 가치 변화량을 일치시키는 것이다.

7. 모델의 적용 및 결과

과거 이자율 기록을 이용하여 전통적인 면역 모델과 부분면역 모델을 수행하고 그 결과를 비교하여 새롭게 제시된 부분면역 모델이 이자율 위험을 더욱 많이 줄일 수 있음을 보여주기 위해 테스트를 수행하였다. 테스트에 사용된 데이터와 테스트 방법은 다음과 같다.

7.1 데이터

면역 모델과 부분면역 모델의 테스트에 사용된 데이터는 미국 연방준비제도이사회(FRB)에서 제공하는 미 재무부채권(Treasury Constant Maturity Rate)의 이자율을 사용하였다. 이 데이터는 3개월에서 30년 사이의 서로 다른 만기를 가지는 중도 상환이 없는 채권의 이자율이며, 82년 1월에서 99년 9월까지의 월간 데이터로 각각 3개월, 6개월, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 20, 30년의 만기를 가진다. 본 논문에서는 보다 많은 만기를 가진 자산과 부채를 가지고 테스트하기 위해 기존 10가지 만기의 데이터 이외에 1.5, 2.5, 4, 6, 8, 9, 15, 25년의 8가지 만기를 가지는 중도 상환이 없는 채권의 이자율을 기존 데이터의 선형조합을 이용하여 만든다. 새로 만들어진 데이터는 실제의 데이터와 일치하지 않지만 새롭게 생성된 이자율이 그 전후의 만기와 비교하여 큰 차이를 보이는 경우는 발생할 가능성이 거의 없으며, 생성된 데이터가 실제 데이터와 동일하다는 가정하에서 테스트하므로 자료변형은 테스트의 결과에 영향을 주지는 않는다.

7.2 테스트의 구성 및 과정

테스트는 하나의 부채 포트폴리오에 대해 전통적 면역 모델

과 부분 듀레이션 모델 두 가지를 수행하여 그 결과를 비교하는 것이다. 신경망의 구성과 훈련은 MATLAB을 사용하였으며 면역 모델과 부분면역 모델의 최적해를 구하는 것은 CPLEX를 이용하여 수행하였다.

기간구조를 나타내기 위한 신경망은 두 개의 은닉층(hidden layer)을 가진 MLP이다. 모든 뉴런은 (0, 1) 사이의 값을 출력하는 단측 연속 활성화 함수(unipolar continuous activation function)를 사용하고 있으며, 수십회의 훈련과정을 반복하여 두 은닉층의 뉴런수를 각각 10개, 8개로 결정하였다. 신경망 훈련의 결과는 신경망의 출력과 실제 데이터의 차이에 대한 제곱오차(squared error)와 계층 사이의 연결강도의 움직임을 이용하여 검증하며, 훈련의 반복 때마다 결과값과 기대값의 제곱 오차 값과 연결강도의 움직임을 기록하여 이 값이 일정한 값보다 작은 경우나, 작지 않더라도 수렴한다고 판단되는 경우를 훈련의 완성으로 보았으며, 지역 최적화에 빠지는 경우를 막기 위해 초기 연결강도를 바꾸어 가며 3~4회 훈련하여 가장 적은 오차를 가진 경우를 선택하였다.

다양한 부채 형태를 대상으로 테스트하기 위해, 면역의 대상이 되는 부채 포트폴리오는 현금흐름이 <표 1>과 같이 4년에서 25년 사이의 만기를 가지며, 현금흐름의 크기가 일정(Flat), 점차 증가(Increase), 점차 감소(Decrease)하는 세 가지이다. 주어진 세 가지 부채를 면역하는 자산은 앞서 설명한 3개월에서 30년에 이르는 18가지 만기를 가지는 중도상환이 없는 채권(no coupon bond)이다.

테스트는 하나의 자산이 전체의 20%를 넘지 못하도록 분산 투자하는 전략을 함께 수행하였다. 분산 투자를 하는 이유는 앞서 설명한 두 모델에서 고려되지 않는 비 구조적 위험(Non-systematic risk)을 최소화하기 위한 것이다. 이 조건이 없을 경우 모델은 단지 두 개의 자산에만 투자하는 결과를 발생시키고, 혹시 있을지도 모르는 정상적이지 않은 원인에 의한 이자율 구조의 왜곡이 테스트의 일반성을 해치는 결과를 가져올 수 있기 때문에, 테스트의 일반성을 해치지 않도록 하기 위해 이와 같은 투자 전략을 추가하였다. 분산 투자 전략은 전통적 면역 모델과, 부분 듀레이션 모델에 각각 제약식 (24), (25)를 추가함으로써 이루어진다.

표 1. 부채 현금흐름의 비율

만기	Flat	Increase	Decrease
4	0.1000	0.0182	0.1818
5	0.1000	0.0364	0.1636
6	0.1000	0.0545	0.1455
7	0.1000	0.0727	0.1273
8	0.1000	0.0909	0.1091
9	0.1000	0.1091	0.0909
10	0.1000	0.1273	0.0727
15	0.1000	0.1455	0.0545
20	0.1000	0.1636	0.0364
25	0.1000	0.1818	0.0182

$$x_i \leq 0.2, \quad \text{for all } i \in U \quad (24)$$

$$\sum_{j \in T} x_{ij} \leq 0.2, \quad \text{for all } i \in S \quad (25)$$

7.3 테스트 결과

테스트는 신경망을 훈련하는 기간을 4가지로 나누고, 각 기간에 대해 3가지 부채의 종류를 대상으로 하였다. 신경망의 훈련 대상 기간은 3~5년 사이가 가장 효율적이며 그 이상의 기간을 적용할 경우 데이터의 분산이 커 신경망의 수렴이 잘 이루어지지 않거나 부분 최적(local optimal)에 빠지는 경우가 발생한다. <표 2>는 실제 테스트에서 사용된 신경망의 훈련결과를 나타낸 것으로 4가지의 훈련기간에 대해 모수들을 조정하며 관찰한 여러 번의 훈련 중 가장 오차(SSE)가 작은 것들의 결과를 보여주고 있다. <표 3>은 신경망의 훈련이 끝난 뒤 두 가지 수리 모델에 의해 구해진 최적해에 따라 1년, 5년, 10년의 세 가지 기간 동안 투자한 결과를 나타낸 것으로 총 36개의 수익률 비교를 나타내고 있으며, <그림 6>, <그림 7>은 각각 투자기간 A와 B의 수익률을 차트로 나타낸 것이다.

수익률은 부채의 가치와 자산가치의 차이를 퍼센트로 나타낸 것으로 그 값이 클수록 많은 투자이익을 얻음을 나타낸다. 그러나 테스트 결과의 분석에 있어 중요한 것은 두 가지 모델의 목표가 모두 “수익률이 얼마나 높은가?”에 대한 문제가 아니라 “얼마나 손해를 줄일 수 있는가?”의 문제라는 것이다. 일반적으로 자산·부채 관리에서 수익률은 위험과 반비례의 관계를 가지게 되며, 위험을 최대한 피할 경우 수익률은 낮게 나타나게 된다. 따라서, 하나의 모델이 보다 높은 수익률을 제시

표 2. 신경망의 훈련 결과

훈련기간의 종류	훈련기간	훈련 데이터 수	SSE	훈련 횟수
A	82.1~84.12	288	0.0382	100
B	82.1~86.12	480	0.0630	100
C	84.1~88.12	480	0.0525	150
D	86.1~90.12	480	0.0371	150

표 3. 테스트 결과

투자기간의 종류	부채의 종류	부채의 듀레이션	투자기간(년)	부채의 가치	수익률(%)	
					전통적 듀레이션	부분 듀레이션
A	Flat	7.7092	1	1.1113	-1.2868	-0.2340
			5	1.6914	-7.8278	-2.2999
			10	2.6207	-11.3786	-5.5672
	Increasing	9.9471	1	1.1129	-1.1142	-0.2426
			5	1.7059	-6.3779	-1.8700
			10	2.7374	-8.7601	-5.7500
	Decreasing	6.4010	1	1.1105	-1.3597	-0.2251
			5	1.6829	-8.3903	-2.5016
			10	2.5526	-12.5166	-5.1438
B	Flat	8.5103	1	1.0688	-0.5520	-0.0374
			5	1.3968	1.2958	0.4510
			10	1.9423	-5.1640	-1.4056
	Increasing	11.0988	1	1.0701	-0.5420	-0.2243
			5	1.4038	0.8121	0.1710
			10	1.9580	-4.8570	-0.3933
	Decreasing	6.7431	1	1.0679	-0.5619	-0.0749
			5	1.3920	1.6307	0.6968
			10	1.9316	-5.3790	-2.4850
C	Flat	8.1917	1	1.0912	0.0000	0.0000
			5	1.5387	0.1105	0.0000
			10	2.2007	1.3587	-1.8540
	Increasing	10.654	1	1.0910	0.0092	0.0000
			5	1.5434	0.1555	-0.0130
			10	2.2812	-2.0209	-3.3316
	Decreasing	6.6077	1	1.0914	0.0092	0.0000
			5	1.5357	-0.6837	-0.0326
			10	2.1490	0.8981	-0.6515
D	Flat	8.3142	1	1.0790	-0.9546	0.0000
			5	1.1428	-9.6459	0.0000
			10	2.0459	-12.2049	0.0000
	Increasing	10.8294	1	1.0801	-0.9351	0.0000
			5	1.4704	-8.5895	0.0000
			10	2.1018	-11.9517	0.0000
	Decreasing	6.6588	1	1.0782	-0.9738	-0.0185
			5	1.4578	-10.3512	-0.2607
			10	2.0091	-12.3837	-1.4633

그림 6. 투자기간 A에 대한 결과 차트.

그림 7. 투자기간 B에 대한 결과 차트.

한다 하더라도, 다른 모델의 결과치가 영에 가까울수록, 차트에서는 막대의 길이가 짧을수록 대상 부채가 더욱 잘 면역한다는 것을 나타내고 있다.

네 가지 훈련기간과 세 가지 부채종류에 대한 테스트에서, 총 36개의 결과비교 중 투자기간 C에서의 세 개를 제외한 나머지 부분에서, 투자기간을 5년 이내로 제한할 경우 24개 중 하나를 제외한 나머지에서 부분면역 모델이 전통적 면역 모델보다 더 나은 결과를 보여주고 있다. 이 결과는 부분 듀레이션 모델이 전통적 듀레이션 모델보다 부채를 더욱 잘 면역한다는 것을 나타내고 있다.

테스트에 있어 두 모델의 결과가 부채보다 낮은 가치를 가지는 경향을 보여 주었는데, 이는 부채 포트폴리오의 분산이 자산보다 더욱 잘 이루어져 있기 때문으로 보여진다. 그러나 부분 듀레이션 모델의 경우 대부분의 결과가 전체금액과 비교하여 1% 이하의 손실을 보이며, 금융기관에서는 차입금리와 대출금리 사이에 차이(spread)가 존재하므로, 이를 감안할 경우 손실이 거의 발생하지 않는다고 볼 수 있다.

8. 결론 및 추후연구

본 연구에서 제안된 부분면역 모델은 다음과 같은 장점을 가짐으로써 이전의 연구와 차별된다. 자산·부채 관리에서 유용하게 사용되는 듀레이션 모델의 단점으로 지적되는 평행이동 가정을 없앨 수 있는 방법으로 기간구조 함수를 제안하였으며, 기간구조 함수는 이전까지 이자율 모델들과 비교하여 보다 잘 현실의 움직임을 반영하도록 정의되었다.

다음으로 모델을 수행하는 과정에서 함수를 정의하고 매개 변수를 구하는 복잡한 과정을 거치는 대신 신경망을 이용하여 이를 손쉽게 구현할 수 있도록 하였으며, 다양한 시장과 시간에 대해 일반성을 유지할 수 있게 하였다. 마지막으로, 기존의 연구들이 이자율 구조의 개선이나 면역 모델을 분해하는 단편적인 연구로 나뉘어 수행되어지는 반면, 본 연구는 이자율 구조의 개선에서 실제 데이터를 이용한 적용에 이르는 완전한 수행 모델을 다루고 있다.

보다 정확한 면역효과와 모델의 안정적인 수행을 위한 추후 연구방향은 다음과 같다.

첫째로 채권의 볼록성을 고려할 수 있도록 고차 미분을 이용하는 방법을 고려할 수 있다. 이와 같은 접근 방법은 채권의

가치를 선형으로 일치시키는 것에 대한 오차를 줄일 수 있을 것으로 생각된다. 다음으로 신경망의 개선에 대한 연구이다. 이는 보다 정확한 이자율 구조를 설명할 수 있게 하여 전체 모델의 수행 능력을 향상시키는 것 이외에, 신경망이 부분 최적화에 빠지거나 진동하는 가능성을 최소화하여 전체 모델의 안정성을 높일 수 있으나, 비선형 구조의 신경망에서 전역최적화를 구현하는 것은 수학적으로 매우 어려운 문제이므로 이론적인 해결은 매우 어렵다. 하지만 매개변수의 선택에 대한 선택적 방법이나, 비선형 최적화의 다양한 기법을 도입하는 것이 문제 해결에 도움을 줄 것이다.

참고문헌

- Barber, J. R. (1999), Bond immunization for affine term structures, *The Financial Review*, 34, 127-140.
- Barber, J. R., and Copper, M. L. (1996), Immunization using principal component analysis, *The Journal of Portfolio Management*, Fall, 99-105.
- Bierwag, G., Kaufman, G., and Toevs, A. (1983), Immunization strategies for funding multiple liability, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18(1), 113-123.
- Bierwag, G. O., Kaufman, G. G., and Latta, C. M. (1988), Duration models : A taxonomy, *The Journal of Portfolio Management*, Spring, 50-54.
- Cooper, I. A. (1977), Asset Values, Interest Rate Changes, and Duration, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12, 701-723.
- Dahl, H., Meeraus, A., and Zenios, S. A. (1993), Some financial optimization model 1 : Risk Management, *Financial Optimization*, Zenios (Ed), Cambridge Univ. Press, 3-36.
- Hiller, R. S., and Schaack, C. (1990), A classification of structured bond portfolio modeling techniques, *Journal of Portfolio Management*, Fall, 37-48.
- Macaulay, F. R. (1938), Some theoretical problem suggested by the movements of interest rates, Bond yield and stock prices in the United States since 1856, *New York : National Bureau of Economic Research*, 44-53.
- McEnally, R. W. (1977), Duration as a practical tool for bond management, *The Journal of Portfolio Management*, Summer, 53-57.
- Reitano, R. R. (1990), Non-Parallel Yield Curve shifts and Durational leverage, *The Journal of Portfolio Management*, Summer, 62-67.
- Reitano, R. R. (1992), Non-Parallel Yield Curve shifts and Immunization, *The Journal of Portfolio Management*, Spring, 36-43.
- Stinchcombe, M. B. (1999), Neural network approximation of continuous functionals and continuous functions on compactifications, *Neural Networks*, 12, 467-477.
- Zurada, J. M. (1995), Introduction to Artificial Neural Systems, PWS Publishing Company.