Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 26, No. 3, pp. 220-226, September 2000.

유효해집합 위에서의 최적화 문제를 위한 선형계획모델에 관한 연구†

송 정 환

한양대학교 수학과

A linear program approach for optimizing a linear function over an efficient set

Junghwan Song

The problem (P) of optimizing a linear function d^Tx over the set of efficient points for a multiple objective linear program (M) is difficult because the efficient set is nonconvex. There are some interesting properties between the objective linear vector d and the matrix of multiple objectives C and those properties lead us to establish criteria to solve (P) with a linear program. In this paper we investigate a system of the linear equations $C^T\alpha = d$ and construct two linearly independent positive vectors u, v such that $\alpha = u - v$. From those vectors u, v, solving an weighted sum linear program for finding an efficient extreme point for the (M) is a way of getting an optimal solution of the problem (P). Therefore the theorems presented in this paper provided us an easy way of solving nonconvex program (P) with a weighted sum linear program.

1. 서 론

다목적선형계획법은 주어진 볼록다면체(convex polyhedron)인 가능해집합(set of feasible solutions) X위에서 두 개 이상의 선형 목적함수들을 최적화시키는 문제이다. 다양한 목적을 추구하는 현실세계에서는 목적함수가 두 개 이상일 경우가 일반적이며 두 개의 목적함수를 동시에 최적화하는 것은 불가능한 경우가 많다. 따라서 모든 목적함수의 최적해(optimal solution)가 아니더라도 그보다 우수한 해를 찾을 수 없는 상태에서의 해를 유효해(efficient solution)라 하고 이러한 개념은 1950년 Kuhn, H. W.과 Tucker, A. W. (1950)에 의해서 제안된 것으로서 벡터들의 각 원소들의 크기를 비교하여 각 원소의 크기가 최적화된 것을 찾는 벡터최적화 문제(vector maximization problem)이다. 그후로 벡터최적화 문제가 수리계획모델인 다목적선형계획법(multiple objective linear programming)으로 발전되어 왔다 [Benson, H.P., and Sayin, S.(1994)].

본 논문에서는 가능해집합 X를 유계(bounded)인 볼록다면체(convex polyhedron)라 가정하고 일반형태(standard form)로서 다음과 같이 $X = \{ x \in R^n \mid (A, I)x = b,\ x \geq 0 \}$로 표현하기로 한다. 여기서 $(A, I) \in R^{m \times n}$이고 $b \in R^n$, $b > 0$이다. 두 개 이상인 다목적 선형함수들 $c_1^T x,\ c_2^T x, \ldots, c_k^T x$을 벡터 Cx로 표현하기 위해 $C = \begin{pmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_k^T \end{pmatrix}$, $c_i \in R^n$, $i = 1, \ldots, k$ 로 정의하면 다목적선형계획법($MOLP$)은 다음과 같이 모델화된다.

$$(MOLP) \qquad \begin{array}{ll} \max & Cx \\ s.t. & x \in X \end{array}$$

벡터들은 실수(real number)처럼 크기를 비교(total ordering)할 수 없지만 벡터의 각 원소(component)간의 크기를 비교함으로써 부분적으로 가능(partial ordering)하다. 따라서 다음과 같이

† 본 연구는 한양대학교 "신진교수정착연구비"에 의해 수행된 연구 결과임.

X 위에서의 유효해가 정의된다.

[정의 1] [Kuhn, H. W., and Tucker, A. W. (1950)] 가능해집합 X의 하나의 가능해 $x^0 \in X$가 유효해(efficient solution)라 함은 $Cx \geqq Cx^0$이고 $Cx \neq Cx^0$ 인 가능해 x가 X에 없을 때를 말한다.

본 논문에서는 벡터의 크기를 표현하는 방법을 두 가지로 정의한다. 위의 정의에서와 같이 $Cx \geqq Cx^0$임과 동시에 $Cx \neq Cx^0$을 하나의 표현식으로 $Cx \geq Cx^0$ 로 표현하고자 한다. 즉, 두 벡터 x, y 사이에 $x \geq y$는 $x \geqq y$ 이고 $x \neq y$임을 나타낸 것이다. 유효해집합은 일반적으로 非블록집합(nonconvex set)이고 연결집합(connected set)이다. Ecker(1975, 1980, 1994)에서도 언급된 바와 같이 이러한 유효해 집합의 모든 해를 찾는다는 것은 선형계획법에서 가능해집합을 구하는 문제의 어려움과 동일하다.

다목적선형계획법($MOLP$)에서 유효해들의 집합을 E라 하고 그 위에서 하나의 선형함수 d^Tx 최적화문제(P)를 다음과 같이 모델화하자.

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \max & d^Tx \\ s.t. & x \in E \end{array}$$

집단 혹은 조직에서 추구하는 여러 가지 목적함수를 최적화하는 과정에서 발생되는 유효해들 중에서 그 집단 및 조직에서의 최종 의사결정자는 위에서와 같이 자신의 목적함수 d^Tx를 가지고 문제(P)의 최적해를 구해야 한다. 이러한 E 위에서 선형함수 최적화문제(P)의 중요성은, Philip (1972), Ecker (1975, 1978, 1980, 1994), Benson (1991, 1994, 1998), Isermann (1987), Steuer (1989) 등 여러 연구자들에 의하여 폭넓게 토의되었다. Philip (1972)은 일반적으로 볼록다면체가 아닌 E 위에서 선형함수를 최적화하는 문제와 해를 찾기 위한 알고리듬을 제안하였다. 제안한 알고리듬은 심플렉스 알고리듬(Simplex algorithm)을 이용하여 임의의 유효꼭지점(efficient extreme point) $x^0 \in E \cap X_{ex}$으로부터 목적함수값 d^Tx가 증가 ($d^Tx' > d^Tx^0$)하는 유효선분(efficient edge) $[x', x^0] \subseteq E$을 따라 최적화하고 현재의 유효꼭지점 x^0으로부터 목적함수값이 증가되는 유효선분이 없는 경우는 가능해 집합 X를 $\overline{X} = \{x \in X | d^Tx \geqq d^Tx^0\}$로 절단・축소하여 새로운 가능해집합으로부터 정의되는 유효해집합 $\overline{E}$ 에서 목적함수값 d^Tx를 증가시키는 알고리듬이다. 최악의 경우 모든 꼭지점을 거쳐야 하는 문제점이 있다. Isermann과 Steuer(1987)는 목적함수 벡터 d가 다목적함수 C 중에 하나로, 즉 $d = c_i$, 특별한 경우의 문제를 모델화하여 Philip (1972)이 제안한 알고리듬과 유사하게 발표하였다. Benson (1991)은 Philip (1972)이 제안한 방법과는 상이하고 유한단계(finite steps)에서 일련의 비선형계획법문제(a sequence of nonlinear programs)들의 최적해를 찾아감으로써 주어진 문제(P)의 최적해를 찾는 알고리듬을 소개하였다.

본 논문에서는 다목적선형계획법($MOLP$)에서의 다목적함수벡터들 $c_1, c_2, \cdots, c_k$들과 문제(P)에서의 목적함수벡터 d와의 관계를 고찰하여 다목적함수들에게 양의 상수 λ_i 를 선택하여 가중치를 $C^T\lambda$와 같이 부여한 하나의 선형계획법문제 (M_λ) $\max\{C^T\lambda | x \in X\}$로 모델화하여 ($M_\lambda$)의 최적해가 ($P$)의 최적해와 동일하게 되는 방법에 대해서 제안한다.

2. 유효해(Efficient solution)

본 절에서는 주어진 다목적선형계획법에서의 유효해에 대한 기본정리들과 선형계획법모델을 이용하여 하나의 유효해를 찾는 방법에 대해 기술하고 가능해집합 X와 유효해집합 E와의 성질들을 고찰하고자 한다. 우선 유효해집합은 목적함수벡터 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 방향에 의하여 결정되며 각각의 벡터의 크기는 유효해집합을 결정하는 데 상관없음을 설명하기로 한다.

주어진 다목적 선형계획법($MOLP$)에서의 하나의 목적함수 벡터 c_i의 크기를 변경한 새로운 다목적함수벡터 행렬을

$$C^\# = \begin{pmatrix} c_1^T \\ \vdots \\ \gamma c_i^T \\ \vdots \\ c_k^T \end{pmatrix}, \gamma > 0$$라 하고 그에 따른 선형계획법 ($MOLP^\#$)을 다음과 같이 정의하자.

$$(MOLP^\#) \qquad \begin{array}{ll} \max & C^\# x \\ s.t. & x \in X \end{array}$$

여기서 E를 ($MOLP$)의 유효해집합 그리고 $E^\#$를 ($MOLP^\#$)의 유효해집합이라고 하면 γc_i와 γc_i의 방향이 동일하기 때문에 $E = E^\#$이다. 이렇듯 유효해집합은 다목적함수벡터의 크기와는 무관하게 오로지 방향에 의해 결정된다는 사실을 주지하자.

다음은 하나의 유효해를 찾는 방법들 중 본 논문에서 사용할 정리를 기술하고자 한다.

주어진 다목적선형계획법 ($MOLP$)에서의 목적함수 벡터들 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 에 각각 1보다 큰 상수를 곱하여 하나의 선형조합인(linear combination) $C^T\lambda$를 정의하고 $C^T\lambda$를 목적함수벡터로 간주하여 다음과 같은 선형계획법 모델 (M_λ)을 정의하자.

$$(M_\lambda) \qquad \begin{array}{ll} \max & \lambda^T Cx \\ s.t. & x \in X \end{array}$$

여기서 $C^T\lambda = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_k c_k$, $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

본 논문에서는 모든 원소가 1인 벡터를 $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 로 표시하기로 한다.

주어진 하나의 가능해 $x^0 \in X$가 유효해인지를 판별하는 방법으로 다음의 정리가 있다.

[정리 2.1] [Steuer, R. E. (1989)] 가능해 $x^0 \in X$가 $(MOLP)$의 유효해이면 $x^0 \in X$가 (M_λ)의 최적해가 되는 벡터 $\lambda > 0$, $e^T\lambda = 1$가 존재한다.

[증명] 증명은 [Steuer, R. E. (1989)]를 참고

[정리 2.2] 임의의 $\lambda > 0$인 벡터로서 선형계획 (M_λ)의 최적해에는 적어도 하나의 $(MOLP)$의 유효해(efficient solution)가 있다.

[증명] 모든 (M_λ)의 최적해들이 유효해가 아니라고 가정하면 임의의 최적해 $x^0 \in X$에서 $Cx \geq Cx^0$ 이고 $\lambda^T Cx \leq \lambda^T Cx^0$를 만족하는 $x \in E$가 존재한다. 그러나 $Cx \geq Cx^0$ 의 관계식으로부터 $\lambda > 0$인 벡터를 각각 내적(inner product)하여 보면 $\lambda^T Cx \geqq \lambda^T Cx^0$ 를 만족하기 때문에 모든 (M_λ)의 최적해들이 유효해가 아닌 가정에 모순된다. 그러므로 적어도 하나의 (M_λ)의 최적해는 유효해이다.

주어진 다목적선형계획법 $(MOLP)$에서의 목적함수 벡터들 $c_1, c_2, \cdots, c_k$이 선형독립(linearly independent)이라고 가정하자. 목적함수 벡터들 $c_1, c_2, \cdots, c_k$이 선형독립이 아니면(linearly dependent) $c_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j c_j$를 만족하는 $i \in \{1, \ldots, k\}$와 상수 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$가 존재하며 새로운 행렬 $C' = \begin{pmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_{i-1}^T \\ c_{i+1}^T \\ \vdots \\ c_k^T \end{pmatrix}$를 정의하자. 이때 함수 상수들의 부호에 따라 다음과 같은 성질들이 존재한다.

[정리 2.3] 다목적선형계획법 $(MOLP)$에서의 목적함수벡터 c_i가 $c_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j c_j$ 를 만족하며 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$가 모두 음이 아닌 상수일 때($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \geqq 0$) 다음의 다목적선형계획법 $(MOLP')$에서의 유효해집합 E'은 E와 같다. 즉, $E = E'$이다.

$$(MOLP') \qquad \begin{array}{ll} \max & C'x \\ s.t. & x \in X \end{array}$$

[증명] $(MOLP)$의 유효해집합 E에 포함되나 $(MOLP')$의 유효해집합에 포함되지 않은 가능해 $x^0 \in X$가 존재한다고 가정하자. $C'x \geq C'x^0$를 만족하는 가능해 $x \in X$가 존재함은 모든 상수 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \geqq 0$에 대해서 $c_i^T x = \sum_{j \neq i} \alpha_j c_j^T x > \sum_{j \neq i} \alpha_j c_j^T x^0 = c_i^T x^0$가 성립하므로 $Cx \geq Cx^0$이다. 그러므로 $x^0 \notin E$이다. 그러므로 $x^0 \in E$ 이고 $x^0 \notin E'$ 인 $x^0 \in X$가 존재하지 않기에 $E' \subseteq E$ 이다.

$x^0 \notin E$ 이고 $x^0 \in E'$ 인 $x^0 \in X$가 존재한다고 가정하자. 마찬가지로 $Cx \geq Cx^0$를 만족하는 $x \in X$가 존재함은 모든 상수 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \geqq 0$에 대해서 $c_i^T x = \sum_{j \neq i} \alpha_j c_j^T x > \sum_{j \neq i} \alpha_j c_j^T x^0 = c_i^T x^0$가 성립하므로 $C'x \geq C'x^0$이다. 그러므로 $x^0 \notin E'$이다. 그러므로 $x^0 \in E'$이고 $x^0 \notin E$인 $x^0 \in X$가 존재하지 않기에 $E \subseteq E'$이다.

위의 두 포함관계에서 $E = E'$가 됨을 알 수 있다.

위의 [정리 2.3]은 어떤 목적함수벡터 c_i가 음이 아닌 상수 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \geqq 0$로서 $c_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j c_j$로 표현된다면 목적함수벡터 c_i는 유효해집합을 결정하는 데 필요하지 않다라는 결론을 얻을 수 있다. 다음의 정리는 목적함수 c_i가 양이 아닌 상수에 의하여 $c_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j c_j$로 표현되는 경우를 고려한 것이다. 다음은 목적함수벡터 c_i가 양이 아닌 상수 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \leqq 0$로서 $c_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j c_j$인 경우의 유효해집합의 성질을 고찰하기로 하자.

[정리 2.4] 다목적선형계획법 $(MOLP)$에서의 어떤 목적함수벡터 c_i가 $c_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j c_j$를 만족하며 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$가 모두 양이 아닌 상수일 때 ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \leqq 0$) 주어진 $(MOLP)$에서의 유효해집합 E는 X와 같다. 즉, $E = X$이다.

[증명] 유효해집합에 포함되지 않는 가능해 $x^0 \in X$가 존재한다고 가정하자. $Cx \geq Cx^0$를 만족하는 $x \in X$가 존재한다라는 부등식으로부터 $C'x \geqq C'x^0$ 부등식을 얻을 수 있다. 모든 양이 아닌 상수 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \leqq 0$에 대해서 $c_i^T x = \sum_{j \neq i} \alpha_j c_j^T x \leqq \sum_{j \neq i} \alpha_j c_j^T x^0 = c_i^T x^0$가 성립하므로 $Cx \geq Cx^0$에 모순된다. 그러므로 $x^0 \notin E$인 $x^0 \in X$가 존재하지 않는다.

3절에서는 $(MOLP)$에서의 다목적함수 벡터 $c_1, c_2, \cdots, c_k$들로 결정된 가능해집합의 부분인 E 위에서 선형함수 최적화문제 (P)를 다목적함수벡터들과 목적함수벡터 d 간의 관계를 우선 고찰하고 4절에서는 하나의 선형계획모델을 설정하는 문제에 대하여 언급하고자 한다.

3. 다목적함수 벡터들과 주어진 선형함수 벡터 간의 관계

주어진 다목적선형계획법 $(MOLP)$에서의 목적함수 벡터 $c_1, c_2, \cdots, c_k$들과 E 위에서 선형함수 최적화문제 (P)에서의 목적함수벡터 d 간의 관계를 다음과 같이 두 가지로 구분하여

[경우 1] $d = C^T\alpha$를 만족하는 α가 존재하는 경우

즉, $d = \sum_{i=1}^{k} \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_k c_k$를 만족하는 상수 $\alpha_1, \alpha_2,$

$\ldots, \alpha_k$ 가 존재

[경우 2] $d=C^T\alpha$를 만족하는 α가 존재하지 않는 경우는 4절에서 설명한다.

우선 [경우 1]부터 고려하여 보자.

$d=\sum_{i=1}^{k} \alpha_1 c_1+\alpha_2 c_2+\ldots+\alpha_k c_k$를 만족하는 상수 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$가 존재하며 행렬로 표시하면 $d=C^T\alpha$를 만족하는 영이 아닌 벡터 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)^T$가 존재한다. 상수 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ 의 부호가 모두 음이 아닐 때 주어진 문제 (P)를 선형계획법 모델로 전환하여 보자.

다음과 같은 선형계획법 (R)을 고려하여 보자.

$$(R) \qquad \begin{array}{ll} \max & d^T x \\ s.t. & x \in X \end{array}$$

문제 (P)에서의 블록집합이 아닌(nonconvex set) 유효해집합 E 대신에 원래의 가능해집합 X인 볼록다면체(convex polyhedron)로 제약조건을 약화시킨 것이다. 어떠한 조건에서 문제 (P)의 최적해와 문제 (R)의 최적해가 동일한지 다음의 정리를 통하여 알아보기로 한다.

[정리 3.1] 문제 (P)의 목적함수벡터 d에서 $d=C^T\alpha$를 만족하는 벡터 $\alpha \geq 0$가 존재하면 (R)의 최적해 중에 유효해는 문제 (P)의 최적해이다.

[증명] (R)의 최적해 중에 유효해가 존재함을 보이고 그것이 문제 (P)의 최적해임을 보이기로 한다. (R)의 최적해들의 집합을 S라 하고 $S\cap E=\varnothing$라고 가정하자. (R)의 최적해들의 집합에서 임의의 원소 $x^* \in S$ 에 대해서 $Cx' \geq Cx^*$를 만족하는 $x' \in X$가 존재한다. 여기서 $\alpha \geq 0$이기에 $d^T x' = \alpha^T Cx' > \alpha^T Cx^* = d^T x^*$이므로 $x^* \notin S$이다. 그러므로 $S\cap E \neq \varnothing$이다. 다음은 (R)의 최적해들 중 유효해는 (P)의 최적해임을 보이기로 한다.

임의의 $x^* \in S\cap E$가 (P)의 최적해가 아니라고 가정하면 $d^T x' > d^T x^*$를 만족하는 $x' \in E$가 존재한다. 그러나 $E \subseteq X$이므로 이 또한 x^*가 (R)의 최적해라는 조건에 모순이 생긴다. 그러므로 유효해 x^*는 (P)의 최적해이다.

이제 $d=C^T\alpha$를 만족하는 벡터 α가 존재하나 $\alpha \geq 0$가 아닌 경우를 고려하여 보자. 우선 $\alpha \leq 0$이고 모든 $1 \leq i \neq j \leq k$에 대하여 $\alpha_i=\alpha_j$ 인 경우를 고려하면, 즉 어떤 상수 $\gamma > 0$에 대해서 $\alpha=-\gamma e$, $d=C^T\alpha$ 관계식에서 $d=-\gamma \sum_{i=1}^{k} c_i$ 이다. 2절에서 설명한 바와 같이 임의의 c_i에 상수 $\delta \neq 1$를 곱하여 δc_i로 변경시켜도 유효해집합 구조에는 영향을 주지 않는다. 따라서 $c_1, \ldots c_k$는 단위벡터들이고 선형독립이고 α의 각 원소가 동일하지 않다라고 가정하자.

상수 $a, b>0$ 로서 벡터 u, v를 다음과 같이 정의하면

$$u_i=\begin{cases} a+\alpha_i & \text{if } \alpha_i \geq 0 \\ b & \text{if } \alpha_i < 0 \end{cases}, \qquad v_i=\begin{cases} b-\alpha_i & \text{if } \alpha_i < 0 \\ a & \text{if } \alpha_i \geq 0 \end{cases}$$

벡터 α를 $\alpha=u-v$로 표현할 수 있다. 여기서 벡터 u, v는 $u, v \geq e$임을 주의하고 위에서 설명한 바와 같이 모든 $1 \leq i \neq j \leq k$에 대하여 $\alpha_i=\alpha_j$이 아니므로 u, v는 서로 선형독립(linearly independent)이다. 본 논문에서는 선형독립인 두 벡터를 가지고서 다음과 같은 두 선형계획법을 고려하자.

$$(M_u) \qquad \begin{array}{ll} \max & u^T Cx \\ s.t. & x \in X \end{array} \qquad\qquad (M_v) \qquad \begin{array}{ll} \max & v^T Cx \\ s.t. & x \in X \end{array}$$

[정리 2.2]로부터 선형계획법 (M_u)와 (M_v)의 최적해에는 유효해가 있음을 알 수 있다. 또한 최적해 집합에서 유효해를 구하는 것은 어려운 것이 아니다. 다음 절에서는 $d=C^T\alpha$를 만족하는 α가 존재하는 경우와 그렇지 않은 경우에 문제 (P)의 최적해를 찾기 위한 (M_u) 혹은 (M_v)와 같은 선형계획법 모델화를 고려하여 보기로 한다.

4. Nonconvex 문제 (P)의 선형계획법으로 모델화

다음의 두 정리는 문제 (P)를 선형계획모델로 전환하여 해결하여 주는 중요한 정리들이다. 우선 $d=C^T\alpha$ 를 만족하는 α가 존재하는 경우부터 생각하여 보자.

[정리 4.1] $d=C^T(u-v)$를 만족하는 선형독립인 두 벡터 $u, v>0$가 존재하고 $x^* \in X$가 (M_u)와 (M_v)의 최적해라면 $x^* \in X$는 (P)의 최적해이다.

[증명] $x^* \in X$가 (P)의 최적해가 아니라고 가정하면 $d^T \hat{x} > d^T x^*$를 만족하는 $\hat{x} \in E$가 존재한다. 다음과 같이 세 개의 인덱스집합(index sets)들을 정의하자.

$$I=\{i \mid c_i^T \hat{x} < c_i^T x^*\},\ J=\{j \mid c_j^T \hat{x} > c_j^T x^*\},\ H=\{h \mid c_h^T \hat{x} = c_h^T x^*\}$$

여기서, 정의된 집합 $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$이고 $u=u_I+u_J+u_H$, $v=v_I+v_J+v_H$ 이다.

집합 I, J, H에 따라 다음과 같이 벡터 u_I, u_J, u_H와 v_I, v_J, v_H들을 정의하자.

$$u_{I_i}=\begin{cases} u_i & \text{if } i \in I \\ 0 & \text{if } i \notin I \end{cases},\quad u_{J_i}=\begin{cases} u_i & \text{if } i \in J \\ 0 & \text{if } i \notin J \end{cases},\quad u_{H_i}=\begin{cases} u_i & \text{if } i \in H \\ 0 & \text{if } i \notin H \end{cases}$$

$$v_{I_i}=\begin{cases} v_i & \text{if } i\in I \\ 0 & \text{if } i\notin I \end{cases},\ v_{J_i}=\begin{cases} v_i & \text{if } i\in J \\ 0 & \text{if } i\notin J \end{cases},\ v_{H_i}=\begin{cases} v_i & \text{if } i\in H \\ 0 & \text{if } i\notin H \end{cases}$$

$x^*\in X$가 (M_u)와 (M_v)의 최적해이기 때문에 다음의 부등식들이 성립한다.

$$u^TC(\hat{x}-x^*)=u_I^TC(\hat{x}-x^*)+u_J^TC(\hat{x}-x^*)\leqq 0$$
$$v^TC(\hat{x}-x^*)=v_I^TC(\hat{x}-x^*)+v_J^TC(\hat{x}-x^*)\leqq 0$$

따라서, $u_I^TC(x^*-\hat{x})=\gamma u_J^TC(\hat{x}-x^*)$와 $v_I^TC(x^*-\hat{x})=\delta u_J^TC(\hat{x}-x^*)$를 만족하는 상수 $\gamma,\delta>1$가 존재하도록 상수 $a,\ b>0$가 선택되었다라고 가정해도 무방하다. 따라서

$$\begin{aligned} 0<d^T(\hat{x}-x^*) &= u_I^TC(\hat{x}-x^*)+u_J^TC(\hat{x}-x^*) \\ &\quad -v_I^TC(\hat{x}-x^*)-v_J^TC(\hat{x}-x^*) \\ &= (1-\gamma)u_J^TC(\hat{x}-x^*)+(\delta-1)v_J^TC(\hat{x}-x^*) \end{aligned}$$

이므로 $u_J^TC(\hat{x}-x^*)<\frac{\delta-1}{\gamma-1}v_J^TC(\hat{x}-x^*)$이 성립한다. $x^*+\varepsilon(\hat{x}-x^*)\in X$가 되도록 상수 $\varepsilon>0$을 선택하면 $d^T(x^*+\varepsilon(\hat{x}-x^*))>d^Tx^*$을 만족하게 된다. 위의 부등식들을 이용하여 다음과 같은 결론을 얻게 된다.

$$\varepsilon d^T(\hat{x}-x^*))<\{\varepsilon(1-\gamma)\frac{\delta-1}{\gamma-1}+\varepsilon(\delta-1)\}v_J^TC^T(\hat{x}-x^*)<0$$

그러나 $\varepsilon d^T(\hat{x}-x^*)<0$과 $d^T(x^*+\varepsilon(\hat{x}-x^*))>d^Tx^*$은 서로 모순이다. 그러므로 $d^T\hat{x}>d^Tx^*$를 만족하는 $\hat{x}\in E$가 존재하지 않는다. 따라서 $x^*\in X$가 (P)의 최적해이다.

다음은 $d=C^T\alpha$를 만족하는 α가 존재하지 않는 [경우 2]를 생각하여 보자.

다음과 같은 목적함수 행렬 $C^*=\begin{pmatrix} C \\ d^T \end{pmatrix}$를 정의하고 그에 따른 다목적 선형계획법 $(MOLP^*)$을 다음과 같이 정의하자.

$$(MOLP^*)\qquad \begin{aligned} &\max\ C^*x \\ &s.t.\ \ x\in X \end{aligned}$$

$(MOLP^*)$의 유효해집합을 E^*라 하자. 여기서 주의할 점은 집합 E^*와 E 간에는 일반적으로 포함관계가 성립하지 않는다. 그러므로 문제 (P^*)를 다음과 같이 정의하면

$$(P^*)\qquad \begin{aligned} &\max\ d^Tx \\ &s.t.\ \ x\in E^* \end{aligned}$$

(P^*)의 최적해가 (P)의 최적해가 아닐 수 있다. 즉, (P^*)의 최적해가 $(MOLP)$의 유효해가 아닌 경우이다. 다음과 같이 벡터 α를 정의하고 목적함수 행렬 C^*을 가지고서 $d={C^*}^T\alpha$을 만족하는 α를 구하여 보면 $\alpha=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$이다. 큰 수 $a>0$와 작은 수 $\varepsilon>0$에 대해서 벡터 $u=\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \\ \varepsilon \end{pmatrix}$라 하고 다음의 (M^*_u)와 (M^*_v)를 정의하자.

$$(M^*_u)\qquad \begin{aligned} &\max\ u^TC^*x \\ &s.t.\ \ x\in X \end{aligned},\qquad (M^*_v)\qquad \begin{aligned} &\max\ v^TC^*x \\ &s.t.\ \ x\in X \end{aligned}$$

[정리 4.2] (M^*_u)와 (M^*_v)의 동일 최적해가 $(MOLP)$의 유효해이면 (P)의 최적해이다.

[증명] $x^*\in E\cap E^*$를 (M^*_u)와 (M^*_v)의 동일 최적해라 하자. $x^*\in E\cap E^*$가 (P)의 최적해가 아니라고 가정한다면 $d^T\hat{x}>d^Tx^*$를 만족하는 $\hat{x}\in E$가 존재한다. 그러나 (P^*)의 최적해가 x^*이기 때문에 $\hat{x}\notin E^*$이며 $C\tilde{x}\geq C\hat{x}$, $d^T\tilde{x}\geq d^T\hat{x}$를 만족하는 $\tilde{x}\in E^*$가 존재한다. 이로부터 $d^T\tilde{x}\geq d^T\hat{x}>d^Tx^*$인 부등식이 성립한다. 즉, $d^T\tilde{x}>d^Tx^*$를 만족하는 $\tilde{x}\in E^*$가 존재하게 되는데 이는 x^*가 (M^*_u)의 최적해라는 조건에 모순된다. 그러므로 $x^*\in E\cap E^*$가 (P)의 최적해이다.

다음 절에서는 [정리 4.1] 및 [정리 4.2]를 이용하여 문제 (P)의 최적해를 구하는 알고리듬을 제시하고 간단한 예를 들어보기로 한다.

5. 알고리듬과 예제

지금까지의 내용은 볼록집합이 아닌 유효해집합 E 위에서 선형함수 d^Tx를 최적화하는 문제 (P)를 다목적선형함수벡터 C와 d의 관계를 고찰하여 하나의 선형계획법 문제로 전환하여 최적해를 찾을 수 있다라는 것에 대한 수학이론적 배경과 증명들을 통하여 제시하였다. 다음은 그러한 이론적 배경을 바탕으로 주어진 다목적선형계획법 $(MOLP)$의 유효해집합 위에서 선형목적함수 최적문제 (P)의 최적화 알고리듬을 다음과 같이 제시한다.

[알고리듬]

단계 1. 선형시스템 $d=C^T\alpha$ 의 해(벡터) α를 구한다.
- 1-1 α가 존재하지 않는 경우
  - 1-1-1 큰 $a>0$ 와 작은 $\varepsilon>0$을 선택하여 $u=(a,a,\ldots,a,1+\varepsilon)^T$, $v=(a,a,\ldots,a,\varepsilon)^T$ 로 정의
  - 1-1-2 $\max\{u^TC^*x\,|\,x\in X\}$와 $\max\{v^TC^*x\,|\,x\in X\}$의 최적해 x^*를 구한다.

1-1-3 x^*가 $(MOLP)$의 유효해이면 (P)의 최적해이다.

1-2 α가 존재하고 $\alpha \geqq 0$인 경우

1-2-1 $\max\{d^Tx \mid x \in X\}$의 최적해 x^*를 구한다.

1-2-2 x^*가 $(MOLP)$의 유효해이면 (P)의 최적해이다.

1-3 α가 존재하고 어떤 상수 $\gamma > 0$에 대해서 $\alpha = -\gamma e$인 경우

1-3-1 임의의 원소 c_i에 상수 $\delta \neq 1$를 곱하여 $c_i \neq \delta c_i$로 변경

1-3-2 단계 2로

1-4 α가 존재하고 1-2, 1-3의 경우가 아니면 단계 2로

단계 2. $d = C^T\alpha$를 만족하는 α로부터 상수 a, b를 선택하여 선형독립벡터 u, v를 결정한다.

$$u_i = \begin{cases} a + \alpha_i & \text{if } \alpha_i \geqq 0 \\ b & \text{if } \alpha_i < 0 \end{cases}, \quad v_i = \begin{cases} b - \alpha_i & \text{if } \alpha_i < 0 \\ a & \text{if } \alpha_i \geqq 0 \end{cases}$$

단계 3. $\max\{u^TCx \mid x \in X\}$과 $\max\{v^TCx \mid x \in X\}$의 공동최적해 x^*가 주어진 문제의 최적해이다.

상기 알고리듬에 대한 간단한 예는 다음과 같다.

예제 주어진 $(MOLP)$의 유효해집합 E 위에서 선형함수 $d^Tx = 3x_1 - 2x_2 + 3x_3$ 를 최적화하는 문제 (P)를 다음과 같이 고려하자. 주어진 $(MOLP)$는 다음과 같다.

$$(MOLP) \quad \begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ s.t. \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & x_1, x_2, x_3 \geqq 0 \end{aligned}$$

문제 (P)는 다음과 같이 정의된다.

$$(P) \quad \begin{aligned} \max \quad & (3 \ \ -2 \ \ 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ s.t. \quad & x \in E \end{aligned}$$

참고로 주어진 $(MOLP)$의 유효꼭지점들(efficient extreme points)은 다음 5개이다.

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad d^T = (3 \ \ -2 \ \ 3)$$

단계 1. 주어진 C, d로서 두 개의 선형독립벡터 u, v를 3절에서 설명한 바와 같이 구하면

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \text{로부터} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

단계 2. a가 b보다 크도록 $a = 10, b = 1$로 설정하여 보자.

이때 $u = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$. 즉,

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$이다.

단계 3. 선형목적함수 u^TCx와 v^TCx를 주어진 가능해집합 위에서 최적화하자.

$$(M_u) \quad \begin{aligned} \max \quad & (35 \ \ 24 \ \ 61) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ s.t. \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & x_1, x_2, x_3 \geqq 0 \end{aligned}$$

$$(M_v) \quad \begin{aligned} \max \quad & (32 \ \ 26 \ \ 58) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ s.t. \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & x_1, x_2, x_3 \geqq 0 \end{aligned}$$

(M_u)와 (M_v)의 최적해는 $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in E$이므로 정리 4.2 에 의해서 x^*는 (P)의 최적해이다.

6. 결 론

지금까지의 내용은 볼록집합이 아닌 유효해집합 E 위에서 선형함수 d^Tx를 최적화하는 문제 (P)를 다목적선형함수벡터 C와 d의 관계를 고찰하여 하나의 선형계획법 문제로 전환하여 최적해를 찾을 수 있다라는 것에 대한 수학이론적 배경과 증명들을 통하여 제시하였다. 다음은 그러한 이론적 배경을 바탕으로 주어진 다목적선형계획법 $(MOLP)$의 유효해집합 위에서 선형목적함수 최적문제 (P)의 최적화 알고리듬을 다음과 같이 제시한다.

본 논문에서는 하나의 선형계획법 (M_u)의 최적해가 글로벌 최적화문제 (P)의 최적해와 동일하다라는 것을 보였고 선형계획법 (M_u) 모델화를 위해서 주어진 다목적함수들 Cx과 문제

(P)의 목적함수 d^Tx로부터 관계식 $C^T(u-v)=d$을 유도하여 두 선형계획법 (M_u)와 (M_v)의 공통인 최적해가 존재하도록 방향제시를 하였다. 볼록집합이 아닌 유효해집합 E 위에서 선형함수 d^Tx를 최적화하는 문제 (P)를 다목적선형함수벡터 C와 d의 관계를 고찰하여 하나의 선형계획법 문제로 전환하여 최적해를 찾을 수 있다라는 것에 대한 수학이론적 배경과 증명들을 통하여 제시하였다. 다음은 그러한 이론적 배경을 바탕으로 주어진 다목적선형계획법 $(MOLP)$의 유효해집합 위에서 선형목적함수 최적문제 (P)의 최적화 알고리듬을 다음과 같이 제시한다. 향후 연구방향으로는 본 논문에서 구체적으로 제시되지 않은 a가 b보다 크게 설정하는 방법에 대해 심층연구가 계속되어야 한다.

참고문헌

Benson, H. P. (1991), An All Linear Programming Relaxation Algorithm for Optimizing over the Efficient Set, *Journal of Global Optimization*, 1, 83-104.

Benson, H. P. (1998), An Outer Approximation Algorithm for Generating All Efficient Extreme Points in the Outcome Set of a multiple Objective Linear Programming Problem, *Journal of Global Optimization*, 13, 1-24.

Benson, H. P., and Sayin, S. (1994), Optimizing over the Efficient Set: Four Special Cases, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 80(1), 3-18.

Dauer, J. P., and Gallagher, R. J. (1996), A combined constraint-space, objective approach for determining high-dimensional maximal efficient faces of multiple objective linear programs, *European Journal of Operational Research*, 88, 368-381.

Ecker, J. G., and Kouada, I. A. (1975), Finding Efficient Points for multiple-Objective Linear Programs, *Mathematical Programming*, 8, 375-377.

Ecker, J. G., and Kouada, I. A. (1978), Finding All Efficient Extreme Points for multiple-Objective Linear Programs, *Mathematical Programming*, 14, 249-261.

Ecker, J. G., and Hegner, N. S. (1978), On computing an Initial Efficient Extreme Point, *Operation Research*, 26, 1005-1007.

Ecker, J. G., Hegner, N. S., and Kouada, I. A. (1980), Generating All Maximal Efficient Faces for Multiple Objective Linear Programs, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 30(3), 353-380.

Ecker, J. G., and Song, J. H. (1994), Optimizing a Linear Function over an Efficient Set, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 83(3), 541-563.

Evan, J. P., and Steuer, R. E. (1973), A revised simplex method for linear multiple-objective programs, *Mathematical Programming*, 15, 54-72.

Isermann, H. (1974), Proper efficiency and the linear vector maximization problem, *Operation Research*, 22, 189-191.

Isermann, H., and Steuer, R. E. (1987), Computational experience concerning payoff tables and minimum criteria values over the efficient set, *European Journal of Operational Research*, 33, 91-97.

Kuhn, H. W., and Tucker, A. W. (1950), Nonlinear Programming, Proceedings of the 2nd Berkely Symposium on Mathematical Statistics and probability, University of California Press, Berkely, California, 481-492.

Philip, J. (1972), Algorithms for the vector maximization problem, *Mathematical programming*, 2, 207-229.

Steuer, R. E. (1989), Multiple-criteria optimization: Theory, Computation, and Application, Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 147-159.

Weistroffer, H. R. (1985), Careful usage of pessimistic values is needed in mutiple-objective optimization, *Operation Research Letters*, 4, 23-25.

Yu, P. L., and Zeleny, M. (1975), The Set of All Nondominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria simplex Method, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 49, 430-468.