IE Interfaces
Vol. 13, No. 2, pp. 217-224, June 2000.

다종제품의 동적 로트크기결정 모형에서의 생산준비비용 절감효과에 관한 연구

이운식[1] · 주철민[2]

[1]부경대학교 산업공학과 / [2]동서대학교 산업공학과

Setup Cost Reduction in a Multi-Product Dynamic Lot-Sizing Model

Woon-Seek Lee[1] · Chul-Min Joo[2]

This paper analyzes the effects of setup cost reduction in a dynamic lot-sizing model for a single-facility multi-product problem. In the model, demands for each product are known, no backlogging is allowed, and a single resource is employed. Also, setup cost is defined as a function of capital expenditure to invest in setup cost reduction. Furthermore, in each production period the facility (or plant) produces many products, each representing a fixed part of the involved production activity (or input resource quantity). In this paper, the structure of the optimal solution is charaterized and an efficient algorithm is proposed for simultaneously determining the optimal lot size with reduced setup cost and the optimal investment in setup cost reduction. Also, the proposed algorithm is illustrated by a numerical example with a linear and an exponential setup reduction functions.

1. 서 론

최근 많은 학자들 사이에 생산준비비용을 절감하기 위한 신기술에의 투자가 경제적 로트크기결정에 미치는 영향에 대한 연구가 활발히 진행되어 왔다. 그들은 생산준비비용(Setup Cost)이 투자비용의 함수라 가정하고 생산준비비용의 절감은 최적 로트크기를 감소시키므로 재고량의 감소와 투자비용 증가사이의 절충(trade-off) 관계를 연구하였다. Hall (1983), Keller와 Noori (1988), Monden (1983), Narasimhan과 Melnyk (1990), Mekler (1993), Hong과 Hayya (1993) 등은 생산준비비용의 절감으로 인한 더 작은 로트크기가 경제적으로 가능하다면, 많은 이익이 창출될 수 있다고 언급하였다. 이러한 이익으로는 생산 조달기간의 감소, 품질 향상, 재공품 감소, 일정계획 및 순서계획의 간소화, 생산능력의 증가, 운영상의 유연성 향상, 저장공간의 감소 등을 들 수 있다. Porteus (1985)와 Billington (1987)은 생산준비비용이 투자비용의 함수라 가정하고 경제적 발주량(EOQ) 모형에서의 최적 로트크기와 최적 투자비용을 결정하는 방안을 제시하였다. Zangwill (1987)은 동적 수요를 갖는 다종설비 생산시스템에서의 생산준비비용의 절감효과를 분석하였다. 그러나, 생산준비비용의 절감을 위한 기술투자비용은 고려하지 않았다. Mekler (1993)는 동적 로트크기결정 모형에서 Golden Section 방법을 이용하여 최적 로트크기와 최적 투자비용을 동시에 결정하는 방안을 제안하였다. Hong과 Hayya (1993)는 동적 로트크기결정 모형에서 최적 로트크기와 최적 투자비용을 동시에 결정하는 방안으로 한계비용법을 근간으로 하는 휴리스틱 알고리즘을 제안하였다. 그러나, 기존의 관련 논문들은 다종제품을 생산하는 생산시스템에서의 생산준비비용의 절감효과는 분석하지 않았다.

본 논문은 단일설비로 다종제품을 생산하는 생산시스템에서의 동적 로트크기결정 모형을 다룬다. 이 모형에서 각 제품에 대한 수요는 유한계획기간에서 동적으로 발생하고 추후조달은 허용되지 않으며 투입자원은 한 종류가 사용된다. 또한, 생산기간마다 생산설비는 다종제품을 동시에 생산하고 이때 각 제품의 생산량은 전체 투입자원량의 일정비율로 생산된다. 이러한 생산환경의 예로는 원유의 정제시 휘발유, 경유, 코크스 등의 제품이 일정비율로 생산되는 정유공장을 들 수 있다. 이러한 단일설비 다종제품의 동적 생산계획문제는 Sung (1985), Sung과 Park (1987) 등에 의해 연구되었으나 생산준비비용의 절감효과는 고려되지 않았다.

본 논문은 단일설비로 다종제품을 생산하는 기존의 동적생산계획문제(Sung, 1985; Sung & Park, 1987)를 생산준비비용의 절감효과를 고려한 의사결정문제로 확장한다. 이 문제에서 발생하는 총비용은 생산준비비용의 절감을 위한 투자비용, 생산준비비용, 각 제품별 재고유지비용으로 구성된다. 본 논문에서는 생산준비비용 절감을 위한 투자비용이 주어진 경우에 대한 최적해의 구조적 특성을 규명하고 이를 근간으로 최적해를 효율적으로 찾을 수 있는 동적계획법 알고리즘을 제시한다. 아울러, 총비용함수의 성질을 규명하여 최적 로트크기와 최적 투자비용을 동시에 결정할 수 있는 효율적인 알고리즘도 제시한다. 또한, 선형 및 지수 감소함수 형태의 생산준비비용 절감함수를 갖는 예제를 대상으로 제시한 알고리즘의 적용방법을 설명한다.

2. 수리모형

T 기간동안 각 생산시점에서의 제품 $i(i=1, 2, \cdots, M)$에 대한 생산량이 총생산량의 α_i를 차지하는 다종제품 생산문제를 고려한다. T 기간 동안의 생산량 $X=(X_1, X_2, \cdots, X_T)$는 다음의 관계를 갖는다.

$$X_t = \sum_{i=1}^{M} x_{ti}$$
$$x_{ti} = (\alpha_i / M_\alpha) \cdot X_t$$

여기서, $M_\alpha = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i$

x_{ti} : 기간 t에서 제품 i의 생산량
$(t=1, 2, \cdots, T;\ i=1, 2, \cdots, M)$

그리고 r_t를 기간 t에서의 수요량 벡터라 할 경우, $r_t=(r_{t1}, r_{t2}, \cdots, r_{tM})$이고 $r_{ti}(\geq 0)$는 기간 t에서 제품 i에 대한 수요량이다.

일반성의 상실없이, 집합 J 내에 있는 제품들에 대한 초기 재고와 계획기간말 재고는 0이라 가정하고 집합 J를 다음과 같이 정의한다.

$$J=\left\{ i \mid \max \frac{M_\alpha}{\alpha_i} \cdot R_{1T}(i),\ \forall i \right\}$$

여기서, $R_{mn}(i) = \sum_{t=m}^{n} r_{ti}$

$(m=1, 2, \cdots, T;\ n=m, m+1, \cdots, T)$

따라서, 생산준비비용, 각 제품별 재고유지비용, 생산준비비용 절감을 위한 투자비용으로 구성된 총비용을 최소화하는 수리모형(P)은 다음과 같다.

$$(P)\quad \text{Min}\quad TC(\cdot) = \sum_{t=1}^{T} S(v)\cdot\delta(X_t) + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{M} h_i \cdot I_{ti} + v \qquad (1)$$

$$\text{s.t.}\quad I_{ti} = X_{1t}(i) - R_{1t}(i), \quad \forall i,\ t \qquad (2)$$

$$v \leq v_{\max} \qquad (3)$$

$$X_t = \sum_{i=1}^{M} x_{ti}, \quad \forall t \qquad (4)$$

$$x_{ti} = (\alpha_i / M_\alpha)\cdot X_t, \quad \forall i,\ t \qquad (5)$$

$$v \geq 0,\ I_{ti} \geq 0, \text{ and } x_{ti} \geq 0, \quad \forall i,\ t \qquad (6)$$

$$I_{0i} = 0,\ \forall i, \text{ and } I_{Tj} = 0, \quad \forall j \in J \qquad (7)$$

여기서, $X_{mn}(i) = \sum_{t=m}^{n} x_{ti}\ (1 \leq m \leq n \leq T)$

v : 계획기간 T 동안의 투자비용
$v_{\max}$: 생산준비비용을 최소로 하기 위한 최대투자비용
$S(v)$: 투자비용 v와 대응되는 생산준비비용
h_i : 제품 i에 대한 단위당 재고유지비용
I_{ti} : 기간 t말의 제품 i에 대한 재고량
$\delta(x)$: $x > 0$이면 1, 아니면 0

상기의 수리모형 P에서, 투자비용 v가 고정값을 가질 때, 제약식들((2)~(7))에 의해 형성되는 해공간은 볼록집합이고 목적함수는 오목함수이므로 정점(extream point)에서 최적해가 발생한다. 다음 절에서는 이러한 정점들의 성질을 규명한다.

3. 최적해의 특성

수리모형 P에 대한 최적해의 성질은 특정한 투자비용 v가 주어질 경우에, Wagner와 Whitin (1958)의 연구결과를 다종제품 생산문제로 확장한 Sung(1985)의 연구결과와 유사한 결과를 얻을 수 있다.

〈정리 1〉 수리모형 P에서, 투자비용 v가 주어질 경우에, 최적 로트크기 $X^*=(X_1^*, X_2^*, \cdots, X_T^*)$는 다음의 성질을 만족한다.

$$X_t^* \cdot \prod_{i=1}^{M} I_{t-1,i} = 0 \quad \text{for } t=1, 2, \cdots, T$$

〈증 명〉 투자비용 v가 고정값 $\hat{v}$을 가질 경우에, 생산준비비용은 $S(\hat{v})$가 된다. 이때, 수리모형 P는 Sung (1985)의 문제로 환원되어, 최적해의 특성을 그대로 따른다(상세한 증명내용은 Sung (1985)의 논문을 참조하기 바란다).

$X_{m+1,n}(0 \leq m < n \leq T)$을 기간 $m+1$에서 n 까지의 누적수요량을 만족시키는 기간 $m+1$에서의 생산량이라 정의하고 모든 i에 대해, $I_{ti} > 0$ $(m < t < n)$, $\prod_{i=1}^{M} I_{mi} = 0$, $\prod_{i=1}^{M} I_{ni} = 0$ 이 성립된다고 하자. 이때, 임의의 m과 n에 대한 최적 로트크기 $X^*_{m+1,n}$는 다음의 성질을 갖는다.

〈정리 2〉 수리모형 P에서, 투자비용 v가 주어질 경우에, 최적 로트크기 $X^* = (X_1^*, X_2^*, \cdots, X_T^*)$는 다음을 만족한다 $(m = 0, 1, \cdots, T-1)$.

$$X^*_{m+1,n} = L(n) - L(m) \text{ for } 0 \leq m < n \leq T$$

여기서, $L(n) = \max_i \left\{ \left(\frac{M_a}{\alpha_i} \right) R_{1n}(i) \right\}$

〈증 명〉 $L(n)$은 기간 1부터 기간 n까지의 누적생산량의 하한이고 $L(m)$은 기간 1부터 기간 m까지의 누적생산량의 하한이다. 따라서, 기간 $m+1$에서 n까지의 누적수요량을 만족시키는 기간 $m+1$에서의 생산량이라 정의된 $X_{m+1,n}$은 $L(n) - L(m)$과 같아야 한다.

<정리 1>과 <정리 2>의 결과에 의하면, 수리모형 P에서 임의의 투자비용 v에 대해, 최적 로트크기는 (m, n) 순서에 대한 최적성을 찾음으로써 얻을 수 있음을 보여준다.

4. 알고리즘

$d_{mn}(\hat{v})$을 특정한 투자비용 $\hat{v}$에 대응되는 생산량 $X_{m+1,n}$과 관련된 비용이라 정의하면 다음과 같이 표현된다.

$$d_{mn}(\hat{v}) = S(\hat{v}) + \sum_{t=m+1}^{n} \sum_{i=1}^{M} h_i \cdot I_{ti} \tag{8}$$

여기서, $I_{ti}(m+1 \leq t \leq n)$는 기간 $m+1$에서의 생산량 $X_{m+1,n}$과 관련된 재고수준을 나타낸다.

<정리 2>의 결과와 식 (8)은 기간 $0, 1, 2, \cdots, T$를 상태변수로 사용하는 동적계획법(dynamic programming) 알고리즘을 개발하는 근거를 제공한다. $F_t(\hat{v})$를 기간 t에서 $\prod_{i=1}^{M} I_{ti} = 0$ 이 성립되고 특정한 투자비용 $\hat{v}$가 주어질 때, 기간 $0, 1, 2, \cdots, t$ 에서의 최적 로트크기와 관련된 비용이라 정의하면 다음과 같은 동적계획법 알고리즘을 얻을 수 있다.

$$F_0(\hat{v}) = \hat{v}$$

$$F_n(\hat{v}) = \min_{0 \leq m \leq n-1} [F_m(\hat{v}) + d_{mn}(\hat{v})] \tag{9}$$

$$(n = 1, 2, \ldots, T)$$

따라서, 수리모형 P는 여러 가지 투자비용 $\hat{v}$에 대해, 열거적으로 동적계획법 (9)를 사용할 경우에 최적해를 찾을 수 있다. 그러나, 이러한 작업은 의사결정변수 $\hat{v}$이 연속형일 수 있고 특정한 투자비용 $\hat{v}$에 대해 동적계획법 (9)를 반복적으로 계산하여야 하기 때문에 많은 계산량을 요구한다. 따라서, 최적 투자비용을 빠르고 쉽게 찾을 수 있다면, 계산량을 현저히 줄일 수 있기에 총비용함수 $TC(\cdot)$의 형태를 분석해 보고자 한다.

$k\left[= \sum_{t=1}^{T} \delta(X_t)\right]$를 계획기간 동안에 이루어진 생산준비(setup)의 횟수라 정의하자. 이때, k가 증가하면 재고수준은 감소하게 된다. 또한, 식 (1)은 생산준비의 횟수 k와 생산준비비용의 절감을 위한 투자비용 v의 함수로서, 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$TC(k, v) = k \cdot S(v) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{M} h_i \cdot I_{ti} + v \tag{10}$$

식 (10)은 투자비용 v에 대해 볼록함수이며, 투자비용 v가 주어질 때, k에 관하여 볼록함수이다(Mekler, 1993). R을 전체 계획기간 동안에 발생하는 다종제품의 수요를 만족시키기 위해 필요한 순소요량이라 정의하고 $\hat{X}$을 생산준비 1회당 평균 생산량이라 정의하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$R = \sum_{t=0}^{T} \delta(X_t) \cdot X_t, \text{ 그리고,} \tag{11}$$

$$\hat{X} = \frac{R}{\sum_{t=1}^{T} \delta(X_t)} \tag{12}$$

식 (11)과 식 (12)를 이용하여 식 (10)은 다음과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$TC(\hat{X}, v) = \frac{R \cdot S(v)}{\hat{X}} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{M} h_i \cdot \left\{ I_{t-1,i} + \frac{\alpha_i}{M_a} \cdot (\hat{X} - \varepsilon_t) - r_{ti} \right\} + v \tag{13}$$

여기서, $\varepsilon_t = \hat{X} - X_t$. 식 (13)을 이용할 때, 총비용함수 $TC(\cdot)$의 형태는 <정리 3>과 같이 분류될 수 있다. $\frac{dS(v)}{dv}$와 $\frac{d^2S(v)}{dv^2}$를 각각 v에 관한 $S(v)$의 1차 및 2차 도함수라 정의하자.

〈정리 3〉 $f(v) = 2S(v)\left[\frac{d^2S(v)}{dv^2}\right] - \left[\frac{dS(v)}{dv}\right]^2$라 할 때, 총비용함수 $TC(\cdot)$는 다음의 성질을 갖는다.

(1) $f(v) > 0$이면 $TC(\cdot, v)$는 순볼록(strictly convex)이다.
(2) $f(v) < 0$이면 $TC(\cdot, v)$는 순오목(strictly concave)이다.
(3) $f(v) = 0$이면 $TC(\cdot, v)$는 볼록-오목(convex-concave)

또는 오목-블록(concave-convex)이다.

〈증 명〉 식 (13)의 Hessian은 다음과 같다.

$$H(\hat{X}, v) = \begin{bmatrix} \frac{2R \cdot S(v)}{\hat{X}^3} & -\frac{R(dS(v)/dv)}{\hat{X}^2} \\ -\frac{R(dS(v)/dv)}{\hat{X}^2} & \frac{R(d^2S(v)/dv^2)}{\hat{X}} \end{bmatrix}$$

$\frac{2R \cdot S(v)}{\hat{X}^3} > 0$이므로 $TC(\cdot, v)$의 형태는 Hessian 행렬의 2차 행렬식에 의해 결정된다. 2차 행렬식은 다음과 같다.

$$\left[\frac{R(d^2S(v)/dv^2)}{\hat{X}}\right]\left[\frac{2R \cdot S(v)}{\hat{X}^3}\right] - \left[-\frac{R(dS(v)/dv)}{\hat{X}^2}\right]^2 = \frac{2R^2 \cdot S(v) \cdot (d^2S(v)/dv^2) - R^2 \cdot (dS(v)/dv)^2}{\hat{X}^4}$$

여기서, $f(v) = 2S(v)\left[\frac{d^2S(v)}{dv^2}\right] - \left[\frac{dS(v)}{dv}\right]^2$로 정의한다. 이때, 모든 v의 값에 대해, $f(v) > 0$이면 $TC(\cdot, v)$의 형태는 순블록이고, $f(v) < 0$이면 $TC(\cdot, v)$의 형태는 순오목이며, $f(v) = 0$이면 $TC(\cdot, v)$의 형태는 블록-오목 또는 오목-블록이 된다.

$TC(\cdot, v)$의 형태에 관한 <정리 3>의 결과로부터, 최적 투자액 v^*를 다음의 <정리 4>와 같이 결정할 수 있다. v_s를 정상점(stationary point)이라 정의하자.

〈정리 4〉 최적 투자액 v^*는 $TC(\cdot, v)$의 형태에 따라 다음과 같이 결정된다.

(1) $TC(\cdot, v)$가 순오목이면, v^*는 0이거나 v_{max} 중 한 값을 갖는다.

(2) $TC(\cdot, v)$가 순블록, 블록-오목 또는 오목-블록이면, v^*는 0, v_{max} 또는 v_s 중 한 값을 갖는다.

〈증 명〉 (1) <그림 1>의 (a)처럼, $TC(\cdot, v)$가 순오목이면, 최적해는 정점에서 발생한다. 따라서, v^*는 0이거나 v_{max} 중 한 값을 갖는다.

(2) $TC(\cdot, v)$가 투자비용 v의 범위 내에서 정상점 v_s를 갖는다고 가정하자. <그림 1>의 (b), (c), (d)처럼, 최적해는 정점에서 발생한다. 따라서, v^*는 0, v_{max} 또는 v_s 중 한 값을 갖는다.

<정리 4>의 결과로부터, 최적 투자액 v^*는 $TC(\cdot, v)$의 형태에 상관없이 0, v_{max} 또는 v_s 중 한 값에서 결정됨을 알 수 있다. 따라서, 앞서 제시한 동적계획법 (9)를 사용할 경우에, 최적 로트크기와 최적 투자액을 동시에 결정할 수 있는 효율적인 알고리즘을 다음과 같이 제시할 수 있다.

단계 1. $TC(\cdot, 0)$와 $TC(\cdot, v_{max})$를 계산하고 각 총비용함수에 대응되는 해를 저장한다. $TC(\cdot, 0) < TC(\cdot, v_{max})$이면 $\bar{v} = 0$으로 놓고, 아니면 $\bar{v} = v_{max}$로 놓는다. 그리고, 단계 2로 간다.

단계 2. $f(v)$를 계산한다. 모든 v에 대해, $f(v) < 0$(즉, $TC(\cdot, v)$가 순오목)이면, $v^* = \bar{v}$로 놓고 단계 5로 간다. 아니면, 단계 3으로 간다.

단계 3. v에 관한 $TC(\cdot, v)$의 1차 도함수를 0으로 놓고 $TC(\cdot, v)$곡선 상에서 블록부분에 대한 v_s $(0 \le v_s \le v_{max})$를 찾는다. v_s에 대해, 닫힌 형식의 해(closed-form solution)가 존재한다면, $TC(\cdot, v_s)$를 계산한다. 아니면, line search 기법들을 이용하여, 수치적으로 v_s와 $TC(\cdot, v_s)$를 찾는다. 그리고, 단계 4로 간다.

단계 4. $TC(\cdot, \bar{v}) < TC(\cdot, v_s)$이면 $v^* = \bar{v}$로 놓고, 아니면 $v^* = v_s$로 놓는다. 그리고 단계 5로 간다.

단계 5. v^*에 대응되는 최적해를 인쇄하고 알고리즘을 종료한다.

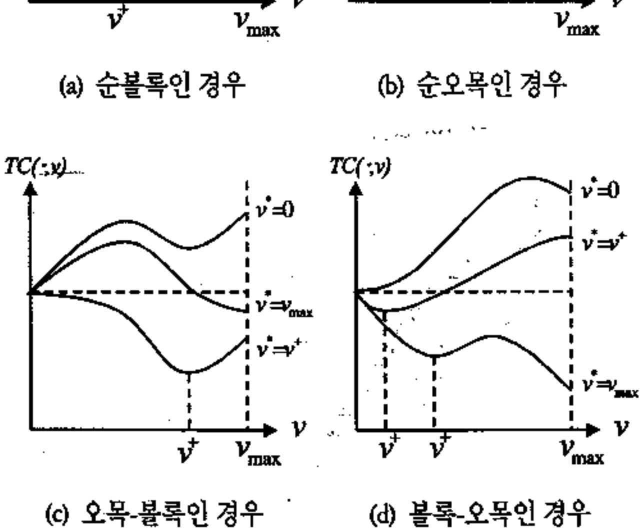

그림 1. TC함수의 형태와 최적 투자비용.

5. 수치예제

계획기간이 10이고 2개의 제품을 각각 $\alpha_1 : \alpha_2 = 2:3$의 비율로 생산하는 제조시스템을 대상으로 알고리즘의 적용방법을 설명하고자 한다. 예제와 관련된 데이터는 다음과 같다.

(1) 투자비용

$$S(0) = 54, \quad S(v_{\max}) = 5$$

(2) 재고유지비용

$$h_1 = \frac{3}{2}, \quad h_2 = \frac{1}{2}$$

(3) 제품별 수요

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_{t1}	3	2	4	7	3	2	4	8	6	3
r_{t2}	6	4	2	6	8	5	4	7	10	11

생산준비비용의 절감을 위한 투자가 없는 경우(즉, $S(0)=54$)에, 동적계획법 (9)를 적용하는 데 있어서의 계산효율을 위해, <정리 2>를 이용하여, 먼저 <표 1>을 계산한다. <표 1>을 이용하여, 생산준비비용의 절감을 위한 투자가 없는 경우($\hat{v}=0$)에 대해 동적계획법 (9)를 적용하여 최적해를 구하는 절차를 간략히 설명하면 다음과 같다.

(1) $F_1(0)$의 계산

$F_0(0) = 0$

$$d_{01}(0) = S(0) + h_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{M_a} \times \{L(1) - L(0)\} - r_{11} \right) + h_2 \cdot \left(\frac{\alpha_2}{M_a} \times \{L(1) - L(0)\} - r_{12} \right)$$

$$= 54 + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5} \times \frac{30}{3} - 3 \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} \times \frac{30}{3} - 6 \right)$$

$$= \frac{111}{2}$$

따라서, $\left(F_1(0) = F_0(0) + d_{01}(0) = 0 + \frac{111}{2} = \frac{111}{2} \right)$

(2) $F_2(0)$의 계산

① $F_0(0) + d_{02}(0)$의 계산

$F_0(0) = 0$

$$d_{02}(0) = 54 + \frac{3}{2} \times \{I_{11} + I_{21}\} + \frac{1}{2} \times \{I_{12} + I_{22}\} = 64$$

여기서, $I_{11} = \frac{2}{5} \times \frac{50}{3} - 3 = \frac{11}{3}$

$$I_{12} = \frac{3}{5} \times \frac{50}{3} - 6 = 4$$

$$I_{21} = \frac{2}{5} \times \frac{50}{3} - (2+3) = \frac{5}{3}$$

$$I_{22} = \frac{3}{5} \times \frac{50}{3} - (6+4) = 0$$

따라서, $F_0(0) + d_{02}(0) = 0 + 30 = 30$

② $F_1(0) + d_{12}(0)$의 계산

$$F_1(0) + d_{12}(0) = \frac{111}{2} + 54 + \frac{3}{2} \times I_{21} + \frac{1}{2} \times I_{22}$$

$$= \frac{111}{2} + 54 + \frac{3}{2} \times \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \times 0$$

$$= 112$$

따라서, $F_2(0) = \mathrm{Min}\{F_0(0) + d_{02}(0)$

$F_1(0) + d_{12}(0)\} = \mathrm{Min}\{64, 112\} = 64$

이와같은 방법으로, $F_{10}(0)$까지 계산하여 정리하면 <표 2>를 얻을 수 있다. 이때, 최적해의 내용은 다음과 같다.

최적 로트크기 $X^* = (45/2, 0, 0, 40, 0, 0, 0, 85/2, 0, 0)$

생산준비횟수 = 3회

$TC(\cdot, 0) = F_{10}(0) = 1063/4$

이제, <정리 3>과 <정리 4>의 결과를 이용하여 최적 로트

표 1. $L(n) - L(m)$의 계산

n	r_{n1}	r_{n2}	$\frac{M_a}{\alpha_1} R_{1n}(1)$	$\frac{M_a}{\alpha_2} R_{1n}(2)$	$L(n)$	$L(n)-L(m)$									
						m									
						0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	6	15/2	10	10	10									
2	2	4	25/2	50/3	50/3	50/3	20/3								
3	4	2	45/2	20	45/2	45/2	25/2	35/6							
4	7	6	40	30	40	40	30	70/3	35/2						
5	3	8	95/2	130/3	95/2	95/2	75/2	185/6	25	15/2					
6	2	5	105/2	155/3	105/2	105/2	85/2	215/6	30	25/2	5				
7	4	4	125/2	175/3	125/2	125/2	105/2	275/6	40	45/2	15	10			
8	8	7	165/2	70	165/2	165/2	145/2	395/6	60	85/2	35	30	20		
9	6	10	195/2	260/3	195/2	195/2	175/2	485/6	75	115/2	50	45	35	15	
10	3	11	115	315/3	115	115	95	265/3	165/2	65	115/2	105/2	85/2	45/2	15/2

표 2. $v=0$에 대한 $F_n(0)$의 계산결과

	n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Min
		$F_m(0)+d_{m,n}(0)$										
	1	55.50										55.50
	2	64.00	112.00									64.00
	3	75.25	118.00	118.75								75.25
	4	125.50	152.50	137.50	132.25							125.50
	5	153.75	174.00	152.25	140.25	180.75						140.25
$F_n(0)$	6	176.50	192.25	166.00	149.50	185.50	194.50					149.50
	7	231.75	238.50	203.25	177.75	204.75	204.75	204.75				177.75
	8	361.50	350.25	297.00	253.50	262.50	244.50	226.50	235.50			226.50
	9	472.75	448.00	381.25	324.25	319.75	288.25	256.75	252.25	283.75		252.25
	10	533.50	502.00	428.50	364.75	353.50	315.25	277.00	265.75	290.50	306.25	265.75

크기와 최적 투자액을 동시에 효율적으로 결정할 수 있는 알고리즘을 설명하고자 한다. 이 논문에서는 Billington(1987)이 제시한 선형과 지수형의 두 가지 생산준비비용 절감함수를 대상으로 알고리즘을 적용한다.

(1) 선형 생산준비비용 절감함수

생산준비비용 절감함수가 다음과 같은 선형함수형태를 갖는다고 하자.

$$S(v)=S(0)-\phi\cdot v,\ \text{for}\ \ v\in[0, v_{\max}],\ \phi>0 \qquad (14)$$

<정리 3>으로부터 TC는 순오목함수임을 알 수 있고 <정리 4>로부터 v^*는 0이나 $v_{\max}$에서 최소가 됨을 알 수 있다. 여기서 최소 생산준비비용을 $S(v_{\max})=5$로 두고 $\phi=0.2$이라 두면 식 (14)로부터 $v_{\max}=245$가 되며 앞의 예제와 동일한 데이터를 사용하여, $v=v_{\max}=245$일 때의 최적해를 동적계획법 (9)를 적용하여 계산한 결과를 정리하면 <표 3>과 같다.

이때, 최적해의 내용은 다음과 같다.

최적 로트크기 $X^*=(30/3,\ 20/3,\ 35/6,\ 35/2,\ 25/2,\ 0,\ 20/2,\ 40/2,\ 30/2,\ 10/2)$

생산 횟수 = 9회

$TC(\cdot,\ 75)=67+245=312$

따라서, $TC(\cdot,0)<TC(\cdot,75)$이므로, $v=0$일 때, 최소비용을 주는 최적해를 제공한다.

(2) 지수 생산준비비용 절감함수

지수 생산준비비용 절감함수를 다음과 같이 정의하자 ($\phi=0.07$로 놓자).

$$S(v)=S(v_{\max})+[S(0)-S(v_{\max})]\exp(-\phi v),\quad \text{for}\ v\in[0,\ v_{\max}],\ \phi>0 \qquad (15)$$

앞선 계산결과로부터, $v=0$이면 $S(0)=54$이고, 이때 최

표 3. $v_{\max}=245$에 대한 $F_n(v_{\max})$의 계산결과

	n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Min
		$F_m(v_{\max})+d_{m,n}(v_{\max})$										
	1	6.50										6.50
	2	15.00	14.00									14.00
	3	26.25	20.00	19.75								19.75
	4	76.50	54.50	38.50	27.75							27.75
	5	104.75	76.00	53.25	35.75	34.00						34.00
$F_n(v_{\max})$	6	127.50	94.25	67.00	45.00	38.75	39.25					38.75
	7	182.75	140.50	104.25	73.25	58.00	49.50	45.00				45.00
	8	312.50	252.25	198.00	149.00	115.75	89.25	66.75	53.75			53.75
	9	423.75	350.00	282.25	219.75	173.00	133.00	97.00	70.50	62.00		62.00
	10	484.50	404.00	329.50	260.25	206.75	160.00	117.25	84.00	68.75	67.00	67.00

表 4. $k=3$과 $v_s=33.30$에 대한 $F_n(v_s)$의 계산결과

		$F_m(v_s)+d_{m,n}(v_s)$										
	n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Min
$F_n(v_s)$	1	11.26										11.26
	2	19.76	23.52									19.76
	3	31.01	29.52	30.27								29.52
	4	81.26	64.02	49.02	42.29							42.29
	5	109.51	85.52	63.77	50.29	53.30						50.29
	6	132.26	103.77	77.52	59.54	58.05	60.30					58.05
	7	187.51	150.02	114.77	87.79	77.30	70.55	69.06				69.06
	8	317.26	261.77	208.52	163.54	135.05	110.30	90.81	82.57			82.57
	9	428.51	359.52	292.77	234.29	192.30	154.05	121.06	99.32	95.58		95.58
	10	489.26	413.52	340.02	274.79	226.05	181.05	141.31	112.82	102.33	105.35	102.33

적해는 $k=3$임을 알고 있다. 따라서, 생산준비 횟수가 1과 2인 경우는 계산에서 제외한다. 식 (15)의 형태와 <정리 3>으로부터 TC는 볼록부분을 갖게 됨을 알 수 있고, <정리 4>로 부터, v^*는 0, v_s, $v_{\max}$ 중에서 최소값을 가지게 됨을 알 수 있다. v_s를 찾기 위해서 식 (15)를 식 (1)에 대입하고 v에 관한 1차 도함수를 구하여 0으로 두고 풀면 식 (16)이 도출된다.

$$v_s=(1/\phi)\log_e[\phi\{S(0)-S(v_{\max})\}k] \tag{16}$$

여기서, 식 (16)은 k에 직접적인 영향을 받는다.

$k=3$으로 놓으면 식 (16)으로부터 $v_s=33.30$이 되고 다시 식 (10)으로부터 $S(v_s)=9.76$이 된다. 동적계획법 (9)를 적용하여 계산한 결과를 정리하면 <표 4>와 같다. 이때, 최적해의 내용은 다음과 같다.

최적 로트크기 $X^*=(10,\ 25/2,\ 0,\ 35/2,\ 25/2,\ 0,\ 10,\ 20,\ 45/2,\ 0)$

생산 횟수 = 7회

$TC(\cdot,\ 33.30)=102.33+33.30=135.63$

여기서, $k=3$과 $v_s=33.30$에 대한 최적 생산준비 횟수는 3회가 아닌 7회가 나왔다. 즉, $k=7$에서 최적해가 존재할 수 있음을 의미한다. 그러므로 $k=7$로 두면, 식 (16)으로부터 $v_s=45.41$을 얻을 수 있고, 다시 식 (10)으로부터 $S(v_s)=7.04$를 얻을 수 있다. 동적계획법 (9)를 적용하여 계산한 결과를 정리하면 <표 5>와 같다. 이때, 최적해의 내용은 다음과 같다.

최적 로트크기 $X^*=(10,\ 25/2,\ 0,\ 35/2,\ 25/2,\ 0,\ 10,\ 20,\ 45/2,\ 0)$

생산 횟수 = 7회

$TC(\cdot,\ 45,\ 41)=83.29+45.41=128.69$

이와 같이 지수 생산준비비용 절감함수의 경우는 k(생산준비 횟수)에 따라 TC의 값이 여러 개가 존재하게 되나, TC가

表 5. $k=7$과 $v_s=45.41$에 대한 $F_n(v_s)$의 계산결과

		$F_m(v_s)+d_{m,n}(v_s)$										
	n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Min
$F_n(v_s)$	1	8.54										8.54
	2	17.04	18.08									17.04
	3	28.29	24.08	24.83								24.08
	4	78.54	58.58	43.58	34.12							34.12
	5	106.79	80.08	58.33	42.12	42.41						42.12
	6	129.54	98.33	72.08	51.37	47.16	49.41					47.16
	7	184.79	144.58	109.33	79.62	66.41	59.66	55.45				55.45
	8	314.54	256.33	203.08	155.37	124.16	99.41	77.20	66.24			66.24
	9	425.79	354.08	287.33	226.12	181.41	143.16	107.45	82.99	76.54		76.54
	10	486.54	408.08	334.58	266.62	215.16	170.16	127.70	96.49	83.29	83.58	83.29

표 6. 생산준비 횟수 k에 따른 해의 비교

k	$S(v)$	v_s	TC	실제생산준비 횟수
3	9.76	33.30	135.63	7
4	8.57	37.41	131.41	7
5	7.86	40.60	129.60	7
6	7.38	43.20	128.87	7
7	7.04	45.41	128.69	7*
8	6.76	47.31	128.81	8
9	6.59	49.00	128.95	8

k에 관해 볼록함수이므로, 가능한 모든 k에 대한 TC를 계산할 필요없이 앞서 얻은 해가 최적임을 알 수 있다. 생산준비 횟수 k를 3회부터 9회까지 변화시켜 대응되는 해를 계산하여 정리하면 <표 6>과 같다.

<표 6>에 의하면 k=7일 경우에 실제생산준비 횟수 7회를 주며 TC가 최소값을 갖는다. 이는 앞서 얻은 최적해와 동일함을 보여준다.

6. 결 론

본 논문은 단일설비로 다종제품을 생산하는 생산시스템에서 생산준비비용의 절감효과를 고려한 동적 로트크기결정 모형을 다루었다. 이 모형에서 각 제품에 대한 수요는 유한계획기간에서 동적으로 발생하고 추후조달은 허용되지 않으며 투입자원은 한 종류가 사용된다. 또한, 생산기간마다 생산설비는 다종제품을 동시에 생산하고, 이때 각 제품의 생산량은 전체 투입자원량의 일정비율로 생산된다. 이 모형에서 총비용은 생산준비비용의 절감을 위한 투자비용, 생산준비비용, 각 제품별 재고유지비용으로 구성된다.

본 논문에서는 생산준비비용 절감을 위한 투자비용이 주어질 경우에 대한 최적해의 성질을 규명하였고 이 성질을 근간으로 최적해를 찾을 수 있는 동적계획법 알고리즘을 제시하였으며, 투자비용에 따른 총비용함수의 성질과 이에 따른 최적해의 성질을 규명하여, 최적 로트크기와 최적 투자액을 동시에 결정할 수 있는 효율적인 알고리즘을 제안하였다. 또한, 선형 및 지수 감소함수 형태의 생산준비비용 절감함수를 갖는 예제를 대상으로 제시한 알고리즘의 적용방법을 설명하였다.

향후 연구분야로는 관련 문제에 대한 최적해를 효율적으로 찾을 수 있는 휴리스틱 알고리즘을 개발하는 것이다.

참고문헌

Billington, P. J. (1987), The Classic Economic Production Quantity Model with Setup Cost as a Function of Capital Expenditure, *Decision Sciences*, 18(8), 25-40.

Hall, R. W. (1983), *Zero Inventories*, Dow Jones-Irwin, Homewood.

Hong, J. D. and Hayya, J. C. (1993), Dynamic Lot Sizing with Setup Reduction, *Computers & Industrial Engineering*, 24(2), 209-218.

Keller, G. and Noori, H. (1988), Justifying New Technology Acquisition through Its Impact on the Cost of Running an Inventory Policy, *IIE Transactions*, 20, 284-291.

Mekler, V. A. (1993), Setup Cost Reduction in the Dynamic Lot-size Model, *Journal of Operations Management*, 11, 35-53.

Monden, Y. (1983), *Toyota Production System*, IIE Press, Atlanta.

Narasimhan, R. and Melnyk, S. A. (1990), Setup Reduction and Capacity Management: a Marginal-Cost Approach, *Prod. Inv. Mgmt.*, 31, 55-59.

Porteus, E. L. (1985), Investing in Reduced Setups in the EOQ Model, *Management Science*, 31, 998-1010.

Sung, C. S. (1985), A Production Planning Model for Multi-Product Facilities, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 28(4), 345-358.

Sung, C. S. and Park, Y. S. (1987), Dynamic Lot Sizing for a Single-Facility Multiproduct Problem in a Rolling-Horizon Environment, *Decision Sciences*, 18(8), 266-278.

Wanger, H. A. and Whitin, T. M. (1958), Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, *Management Science*, 5, 89-96.

Zangwill, W. I. (1987), From EOQ toward ZI, *Management Science*, 33, 1209-1223.

이운식
고려대학교 산업공학과 학사
한국과학기술원 산업공학과 석사
한국과학기술원 산업공학과 박사
현재: 부경대학교 산업공학과 부교수
관심분야: 시스템 최적화, 생산계획 및 통제, ERP/SCM

주철민
고려대학교 산업공학과 학사
한국과학기술원 산업공학과 석사
한국과학기술원 산업공학과 박사
현재: 동서대학교 정보시스템공학부 산업공학전공 조교수
관심분야: Network, Location, System Modeling & Simulation