

論文2000-37SP-4-8

SDFT 고정소수점 연산에 대한 유한 비트 오차영향 해석

(Analytic derivation of the finite wordlength errors in fixed-point implementation of SDFT)

張 泰 奎 * · 金 載 和 *

(Tae-Gyu Chang and Jae-Hwa Kim)

요 약

본 논문에서는 SDFT(sliding discrete-Fourier transform)를 순환식(recursive)으로 구현할 때 유한 비트 고정소수점 계산하여 발생하는 오차의 영향을 해석적으로 구하는 방법을 제시하고 이의 유도 과정을 기술하였다. 유한 비트 오차는 계수의 양자화 때문에 발생하는 계수오차와, 곱셈연산 후 반올림되는 유효자리 때문에 발생하는 반올림오차로 구성된다. 각각의 오차는 주파수 스펙트럼 추정오차를 야기 시키며, 이 스펙트럼 오차의 전력과 실제 스펙트럼의 전력 비(noise-to-signal power ratio : NSR)를 진동계수를 표현하는 비트 수, DFT 값을 표현하는 비트 수, 그리고 DFT 구간길이에 대한 식으로 유도하였다. 유도과정은 SDFT 순환식(recursive equation)을 통해 유도한 오차방정식(error-dynamic equation)과 계수오차 및 반올림오차의 확률분포특성에 근거하였다. 해석적으로 유도한 NSR 결과를 시뮬레이션 실험을 통해 얻은 결과와 비교하여 타당성을 확인하였다.

Abstract

Finite wordlength effect of the recursive implementation of SDFT(sliding-DFT) is analytically derived in this paper. Representation errors of the twiddle coefficients and the data registers are the two major causes of the spectral errors in the recursive implementation. The noise-to-signal ratio is analytically derived in terms of the coefficient's wordlength, the data register's wordlength, and the DFT's block-length used in the computation. Error dynamic equation is obtained from the recursive DFT and the probabilistic models for the coefficients error and the round-off error are introduced for the NSR derivation. The result of the NSR derivation is verified with the simulation data.

I. 서 론

SDFT(sliding discrete-Fourier transform)는 연속으로 겹치는 신호블록에 대하여 매 입력 신호마다 DFT

* 正會員, 中央大學校 電子電氣工學部

(School of Electrical Engineering, Chung-Ang University Seoul Korea)

※ 본 논문은 중앙대학교 1999년도 학술연구 지원에 의해 수행한 연구내용임

接受日字:1999年9月30日, 수정완료일:2000年5月27日

요구하는 스펙트럼해석에의 응용뿐만 아니라 영상처리, 를 계산하는 것을 일컫는 것으로, 높은 시간 정밀도를 적응필터링, 그리고 데이터 압축 등에서 응용된다^{[1],[2],[3]}. SDFT를 구현하는 직접적인 방법으로는 매 입력 샘플마다 블록별 단위로 주파수 값을 계산하는 block-DFT(BDFT) 또는 block-FFT(BFFT) 등을 들 수 있으나, 이들 기법들은 순환 구현기법을 적용하는 것에 비하여 계산량이 많고 구현 구조가 복잡하다. 이에 반하여 순환 구현 기법은 이전 블록의 DFT 값을 이용하여 새로운 블록의 DFT 값을 계산하는 방식으로 계산량을 대폭적으로 줄일 수 있어, 실시간 응용에서의

같이 고속연산이 필요한 경우에 매우 유용하다^{[5],[6]}.

SDFT 알고리즘을 마이크로 컨트롤러 상에서 소프트웨어로 구현한다거나 ASIC 또는 FPGA 등의 하드웨어로 구현할 경우에는 근본적으로 비트 길이의 제한에 오차를 포함한다. 특히 순환 구현할 경우는 오차의 영향이 누적되므로 이에 따른 성능변화가 심하고 시스템의 안정성을 보장하지 못할 경우도 발생하기 때문에 실질적인 응용을 위해서는 이의 영향을 충분히 고려하여 구현구조를 설계하여야 한다^{[6],[7],[8]}. 신호처리 시스템에서의 유한 비트 구현에 따른 오차는 크게 계수의 양자화에 따른 계수오차와 수치 연산 후 버려지는 유효자리 수 때문에 발생하는 반올림(또는 버림)오차로 나눌 수 있다. 계수오차의 영향을 해석하는 기법으로는 시스템 전달함수의 변형을 측정하거나, 시스템의 극점이나 영점의 위치 변화를 해석하는 기법들이 있으며, 반올림 오차는 오차 신호를 출력신호와 독립적인 부가신호로 생각하여 확률분포 특징으로 규정하여 해석하는 기법들이 있다^{[9],[10]}.

본 논문에서는 SDFT를 고정소수점 연산으로 순환 구현할 때 발생하는 오차의 영향을 해석하고자 한다. 해석대상이 되는 오차의 요인들은 계수오차와 반올림 오차이며, 이들 오차요인에 따른 성능 열화를 오차 전력과 신호전력 비율(noise-to-signal power ratio : NSR)로 나타내어 해석적으로 유도하였다. 오차영향 해석의 결과로써 NSR을 제시한다는 것은 SDFT를 응용하는데 있어서 성능을 알아보는 궁극적인 지표로서 의미가 있다. 또한 제시한 NSR은 계수 표현 비트 수, 데이터 표현 비트 수, 그리고 DFT 블록 길이 등과 같이 실제 시스템을 구현하는데 있어서의 중요한 설계 변수들에 관한 해석식으로 주어지기 때문에, 실제 시스템을 구성하는데 있어서의 설계 지침으로써 매우 유용하리라 기대한다.

다음 2장에서는 SDFT의 순환식과 이를 고정소수점 연산하여 발생하는 오차의 파급을 기술하는 오차 방정식을 유도하고, 3장에서는 2장의 오차 방정식을 바탕으로 하여 NSR을 해석적으로 유도하는 과정을 기술하였다. 4장에서는 유도한 NSR 식의 타당성을 확인하기 위해 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 추정된 NSR과 비교한 결과를 제시하였으며, 5장에서 본 논문의 결론을 맺었다.

II. SDFT 순환식과 오차 방정식

신호열 $x(l), x(l+1), \dots, x(l+N-1)$ 의 N-point DFT는 (1)과 같이 표현된다.

$$X_k(l) = \sum_{m=0}^{N-1} x(l+m) W_N^{km} \quad (1)$$

여기서, W_N 은 진동계수(twiddle coefficient)로 $\exp[j*2*\pi/M]$ 과 같다. 식 (1)에 $X_k(l)$ 은 l -번째 데이터블록의 k -번째 주파수 성분을 나타내며, 다음 블록의 DFT 값 $X_k(l+1)$ 은 식 (1)의 l 에 $l+1$ 을 대입하고 정리하여 식 (2)와 같이 $X_k(l)$ 에 관한 순환식으로 표현할 수 있다.

$$X_k(l+1) = W_N^k (X_k(l) - x(l) + x(l+N)), \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2)$$

식 (2)는 다음 블록의 주파수 값 $X_k(l+1)$ 를 현재 블록의 주파수 값 $X_k(l)$ 에 새로 블록에 들어오는 신호 $x(l+N-1)$ 을 더하고 블록에서 나가는 신호 $x(l)$ 을 뺀 후에 진동계수 W_N^k 를 곱해서 얻을 수 있음을 나타낸다.

DFT를 계산하는데 식 (2)는 각 주파수 성분마다 두 번의 덧셈과 한 번의 복소수 곱셈으로 이루어지는 병렬연산 구조이며 sliding-FFT 등에 비하여 상대적으로 단순한 구조라 할 수 있다^[11]. 이와 같은 병렬연산 구조는 단지 몇 개의 주파수 성분만 계산이 필요한 응용에 적용할 때 매우 효과적이다.

식 (2)의 유한 비트 구현은 다음의 식 (3)과 같이 유한 비트 구현된 DFT 값 $\hat{X}_k(l)$ 에 대하여, 양자화된 진동계수 \hat{W}_N^k 과 반올림오차 $\xi_k(l)$ 을 이용하여 기술할 수 있다.

$$\hat{X}_k(l+1) = \hat{W}_N^k (X_k(l) - x(l) + x(l+N)) + \xi_k(l) \quad (3)$$

이 때 스펙트럼 오차 $E_k(l+1)$ 을 식 (4)와 같이 근사 DFT 값과 실제 DFT 값의 차이로 정의하여,

$$E_k(l+1) = \hat{X}_k(l+1) - X_k(l+1) \quad (4)$$

근사 SDFT 식 (3)을 대입하고 $E_k(l+1)$ 과 $E_k(l)$ 의 관계로 정리하면 (5)와 같은 오차방정식을 얻는다.

$$E_k(l+1) = \widehat{W}_N^* E_k(l) + (\widehat{W}_N^* - W_N^*) \{X_k(l) - x(l) + x(l+M)\} + \xi_k(l) \quad (5)$$

이 오차방정식은 SDFT 순환식과 마찬가지로 주파수 성분별 병렬연산 구조이며, 진동계수오차 $\widehat{W}_N^* - W_N^*$ 및 반올림오차 $\xi_k(l)$ 에 따라 특성이 결정된다. NSR 유도에서 필요한 기하학적 해석을 위해 새로운 변수 α_k 와 δ_k 그리고 입력 항 $U_k(l)$ 을 도입하여 (5)를 (6)과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$E_k(l+1) = \alpha_k W_N^* E_k(l) + \delta_k W_N^* U_k(l) + \xi_k(l) \quad (6)$$

여기서, $\delta_k \triangleq \frac{\widehat{W}_N^* - W_N^*}{W_N^*}$, $\alpha_k \triangleq \frac{\widehat{W}_N^*}{W_N^*}$, 그리고 $U_k(l) \triangleq X_k(l) - x(l) + x(l+M)$.

이 오차방정식은 극점이 $\alpha_k W_N^*$ 에 있고 입력이 $U_k(l)$ 과 $\xi_k(l)$ 인 1차 시스템 방정식 형태이다. 오차방정식의 특성을 결정하는 α_k 와 δ_k 는 계수 양자화 비트 수에 따라 결정되며, $\xi_k(l)$ 은 DFT 값을 표현하는 비트 수에 따라 결정된다.

III. NSR 유도

본 절에서는 유한 비트 DFT $\widehat{X}_k(l)$ 의 신호성분 전력과 오차성분 전력비율(NSR)을 (6)의 오차방정식을 통해 구한다. NSR을 오차과급의 주요 영향 요소인 근사 비트 수와 DFT 구간 길이에 관한 해석식으로 유도할 것이다. 유도과정은 확률 해석적 기법에 기반하여 α_k , δ_k , 그리고 ξ_k 를 공간상에 분포하는 확률 변수로 취급한다. 대상신호는 응용측면서 일반성을 고려하여 평균이 '0'이고 stationary한 비상관 신호로 설정하였다. NSR은 (7)과 같이, 각 블록에 대한 오차 $E_k(l)$ 의 평균 전력밀도와 $X_k(l)$ 의 평균전력밀도의 기대값 비율로 정의한다.

$$\sigma_E^2 \triangleq E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |E_k(l)|^2 \right\}, \quad \sigma_X^2 \triangleq E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k(l)|^2 \right\} \quad (7)$$

$$\text{NSR} \triangleq \frac{\sigma_E^2}{\sigma_X^2}$$

여기서, $E\{\cdot\}$ 는 앙상블 기대값 연산을 나타낸다. 오차전력 σ_E^2 의 유도는 (6)의 양변에 절대값 제곱을

취하고 주파수평균과 앙상블 평균을 취하여 (8)과 같이 나타낼 수 있는데, 이는 입력신호의 stationarity 가정에 따라서 오차가 과급된 정상상태에서 $E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |E_k(l)|^2 \right\}$ 과 $E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |E_k(l+1)|^2 \right\}$ 이 σ_E^2 으로 같다는 사실에 바탕을 두었다.

$$\sigma_E^2 \frac{2 \cdot E + \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Re} \{ \alpha_k^* U_k(l) E_k^*(l) \} \right]}{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\delta_k|^2 E \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |U_k(l)|^2 \right] E \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\xi_k(l)|^2 \right]} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\alpha_k|^2}{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\alpha_k|^2} \quad (8)$$

NSR 해석식의 유도는 식 (8)의 각 항들을 계수 표현 비트 수, 데이터 표현 비트 수, 그리고 DFT 블록 길이 등의 설계 변수들에 관한 식으로 표현함으로써 완성한다. 각 항들의 유도과정은 다음 3.1, 3.2, 3.3, 그리고 3.4 절에 제시하였다.

1. 계수오차 항들의 기대값

복소수 진동계수 W_N^* 를 p-비트 이진수로 표현하면, 계수오차 $\delta_k W_N^* = \widehat{W}_N^* - W_N^*$ 는 실수 축 허수 축이 각각 -2-p에서 2-p의 길이를 갖는 정사각형 영역 R에 균등하게 분포하는 확률 변수라 가정할 수 있다. 그러면, $|\delta_k|^2$ 는 $|\delta_k W_N^*|^2$ 와 같기 때문에 (9)와 같은 확률평균 적분식으로 $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\delta_k|^2$ 을 구할 수 있다.

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\delta_k|^2 = \int \int_R \delta^2 \cdot p_\delta \, dR = \frac{2}{3} \Delta_b^2 \quad (9)$$

여기서, $\Delta_b = 2^{-p}$, $p_\delta = \frac{1}{4\Delta_b^2}$.

계수 오차율 α_k 는 (6)의 정의에 따라 δ_k 와 (10)과 같은 관계가 있다.

$$|\delta_k|^2 = (\alpha_k - 1)(\alpha_k^* - 1) = |\alpha_k|^2 - 2 \text{Re} \alpha_k + 1 \quad (10)$$

$|\alpha_k|^2$ 의 기대치는 (10)의 관계에 따라 $|\delta_k|^2$ 기대치에 (9)의 결과를 대입하고 $\text{Re} \alpha_k$ 의 값을 대입해서 (11)과 같이 얻는다. 여기서 $\text{Re} \alpha_k$ 의 기대치는 α_k 의 기하학적 분포를 관찰하여 α_k 의 실수부 분포범위의 중간 값인 $1 - \frac{\Delta_b}{\sqrt{2}}$ 로 대입하였다.

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\alpha_k|^2 = \frac{2}{3} \Delta_b^2 - \sqrt{2} \Delta_b + 1 \quad (11)$$

2. 입력 항 $U_k(l)$ 의 평균전력밀도

$$\text{오차 방정식에 입력 항의 전력 } E\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|U_k(l)|^2\right\}$$

는 (6)의 정의에 따라 $U_k(l)U_k^*(l)$ 를 대수적으로 전개하고 전개한 식에서 입력 신호들의 교차 항들 중 uncorrelation된 항들을 제거해서 얻는다. 이보다 일반적인 경우를 구하기 위해 $U_k(l)U_k^*(l-m)$ 를 (2)의 관계를 이용하여 전개하고 신호 샘플들 간에 중복되지 않은 샘플들의 교차 항들은 신호의 비상관 가정에 따라 '0'이 된다는 사실을 적용하여 $E\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}U_k(l)U_k^*(l-m)\right\}$ 을 구하면 (13)과 같이 간단하게 얻는다.

$$E\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}U_k(l)U_k^*(l-m)\right\} = (N-m)\sigma_x^2 W_N^{mk} \quad (12)$$

여기서, $\sigma_x^2 = E\{|x(n)|^2\}$.

오차 방정식에 입력항의 전력 $E\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|U_k(l)|^2\right\}$ 는 (12)의 특수한 경우로 $m=0$ 을 대입하여 (13)과 같이 얻는다.

$$E\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|U_k(l)|^2\right\} = N\sigma_x^2 = \sigma_x^2 \quad (13)$$

3. 교차항의 기대값

교차항의 기대값 $E\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\text{Re}\{a_k^*\delta_k U_k(l)E_k^*(l)\}\right]$ 를 구

하기 위해서 $U_k(l)E_k^*(l)$ 을 a_k 와 δ_k 의 항으로 전개한다. 오차 방정식 $U_k(l)E_k^*(l)$ 의 $E_k(l)$ 을 오차 방정식 (6)에 따라 $E_k(l-1)$ 에 관하여 다시 쓰고 이를 계속해서 반복 적용하면 $U_k(l)E_k^*(l)$ 는 (14)과 같이 무한 합식으로 쓸 수 있고

$$U_k(l)E_k^*(l) = \delta_k^* W_N^{k*} \sum_{m=1}^{\infty} U_k(l)U_k^*(l-m) \widehat{W}_N^{(m-1)k*} \quad (14)$$

양변에 $a_k^*\delta_k$ 를 곱하고 기대값 연산을 취하여 (12)의 결과를 대입하면, (15)와 같이 a_k 의 멱급수 합으로 쓸 수 있다.

$$E\{a_k^*\delta_k U_k(l)E_k^*(l)\} = E\left\{a_k^*\delta_k^* W_N^{k*} \sum_{m=1}^{\infty} U_k(l)U_k^*(l-m) \widehat{W}_N^{(m-1)k*}\right\}$$

$$\begin{aligned} &= E\left\{|\delta_k|^2 \sum_{m=1}^{\infty} U_k(l)U_k^*(l-m) \widehat{W}_N^{m k*}\right\} \\ &= \sigma_x^2 |\delta_k|^2 \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) a_k^{m*} \end{aligned} \quad (15)$$

멱급수 합 형태로 되어있는 (15)를 closed-form으로 공식화하면, (18)과 같이 a_k 에 관한 다항식 형태로 근사화할 수 있다.

$$\sigma_x^2 |\delta_k|^2 \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) a_k^{m*} = \frac{\sigma_x^2}{N} |\delta_k|^2 \left\{ \frac{a_k^*(a_k^{N*}-1)}{(a_k^*-1)^2} - \frac{N a_k^*}{a_k^*-1} \right\} \quad (16)$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{N} \left\{ \frac{(a_k-1)}{(a_k^*-1)} a^*(a_k^{N*}-1) - N(a_k-1)a_k^* \right\} \quad (17)$$

$$\approx \frac{\sigma_x^2}{N} (a_k^{(N+1)*} + (N-1)a_k^* - N a_k l^2) \quad (18)$$

여기서 (18)으로 단순화할 수 있는 것은 (17)에 $\frac{a_k-1}{a_k^*-1}$ 이 단위원 상의 점으로 위상각이 a_k^*-1 의 위상각에 반대 방향으로 두 배라고 근사할 수 있기 때문이다. 이렇게 했을 때 적은 비트 수에서 발생하는 근사 오차의 양은 $N(a_k-1)a_k^*$ 가 상대적으로 매우 크기 때문에 무시할 수 있다.

기하학적 특성을 보면 a_k 의 위상각이 충분히 작다고 할 수 있기 때문에 a_k 는 실수부만으로 대체할 수 있어서 (18)에 $a_k^{(N+1)*}$ 의 기대값은 (19)와 같이 확률 평균 적분식으로 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k^{(N+1)*} &\approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Re}\{a_k\}^{(N+1)*} \\ &= \int_{1-\sqrt{2}\Delta_b}^1 \frac{1}{\sqrt{2}\Delta_b} x^{N+1} dx = \frac{1}{(N+2)\sqrt{2}\Delta_b} \{1 - (1-\sqrt{2}\Delta_b)^{N+2}\} \end{aligned} \quad (19)$$

교차항의 기대값은 (11)과 (19) 등의 결과를 (18)에 대입하여 (20)와 같이 얻는다.

$$\begin{aligned} E\{\text{Re } a^* \delta U E^*\} &\approx \frac{\sigma_x^2}{N} \left[\frac{1}{(N+2)\sqrt{2}\Delta_b} \right. \\ &\left. \{1 - (1-\sqrt{2}\Delta_b)^{N+2}\} - \frac{2}{3} N \Delta_b^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} (N+1)\Delta_b - 1 \right] \end{aligned} \quad (20)$$

4. 반올림오차 전력

반올림오차의 최대 값은 양자화 스텝크기의 1/2이며 평등확률분포로 가정할 수 있다. 즉 DFT 값을 q-비트로 표현할 때 반올림오차 양의 범위는 다음의 식 (21) 구간에서 평등하게 분포한다.

$$-\frac{\Delta_q X_{\max}}{2} \leq \operatorname{Re} \xi_k(l), \operatorname{Im} \xi_k(l) \leq \frac{\Delta_q X_{\max}}{2} \quad (21)$$

여기서, $\Delta_q = 2^{-q}$ 이고 X_{\max} 는 q -비트로 표현 가능한 DFT 최대 값이다.

반올림오차의 전력을 σ_x^2 로 정의하고, 확률적분을 통해 구하면 (22)와 같다

$$E\left\{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\xi_k(l)|^2\right\} = \sigma_x^2 = \frac{X_{\max}^2}{6} \Delta_q^2 \quad (22)$$

DFT 계수의 실수부 및 허수부의 최대 값은 시간영역 입력신호 최대 값의 N 배이므로, 이를 고려하여 입력신호 대부분의 에너지가 $\pm X_{\max}/N$ 범위에 존재하도록 스케일링한다고 가정하자. 그러면 DFT 값은 오버플로우가 없으며 DFT 값의 백색 특성에 따라 DFT 값이 확률적으로 평등분포라 가정할 수 있다. 따라서 주파수 전력은 확률적분을 통해 (23)과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma_x^2 = N\sigma_x^2 = N * \frac{1}{3} \frac{X_{\max}^2}{N^2} = \frac{X_{\max}^2}{3N} \quad (23)$$

여기서 σ_x^2 과 X_{\max} 의 관계를 (22)에 대입하면 (24)와 같이 반올림오차의 전력을 얻는다.

$$\sigma_x^2 = \frac{N}{2} \sigma_x^2 \Delta_q^2 \quad (24)$$

5. NSR 완성식

NSR 최종 식은 오차의 평균전력밀도 식 (8)에 (9), (11), (13), (20), 그리고 (24)를 대입하여 신호의 평균전력밀도 σ_x^2 으로 나누어 (25)와 같이 얻는다.

$$\begin{aligned} \text{NSR} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}\Delta_p - 2/3\Delta_p^2} \\ &\left[\frac{\sqrt{2}}{N(N+2)\Delta_p} \{1 - (1 - \sqrt{2}\Delta_p)^{N+2}\} \right. \\ &\left. - \frac{2}{3}\Delta_p^2 + \frac{\sqrt{2}}{N}(N+1)\Delta_p - \frac{2}{N} + \frac{N}{2}\Delta_q^2 \right] \quad (25) \end{aligned}$$

NSR 식 (25)은 계수근사 비트 수 p , DFT 표현 비트 수 q , 그리고 DFT 구간길이 N 에 대한 closed-form 방정식이다.

DFT 값의 표현이 정확하고 진동계수만을 양자화할

경우, 즉 q 를 무한대로 하고 p 가 큰 경우 ($p \gg 1$)의 점근특성을 보기위해 NSR 식 (25)의 대괄호 안에 첫 번째 항을 (26)과 같이 이항전개하고 다시 쓰면 (27)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{N(N+2)\Delta_p} \{1 - (1 - \sqrt{2}\Delta_p)^{N+2}\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{N(N+2)\Delta_p} \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{N+2} \binom{N+2}{n} (-\sqrt{2}\Delta_p)^n \right\} \quad (26) \\ &= \frac{2}{N} - \frac{(N+1)}{N} \sqrt{2}\Delta_p + \frac{2}{3}(N+1)\Delta_p^2 - O(\Delta_p^3) \quad (27) \end{aligned}$$

여기서, $O(\Delta_p^3)$ 은 Δ_p 의 3차 이상 항을 나타낸다. (27)를 (25)에 대입하면 NSR을 (28)과 같이 나타낼 수 있으며,

$$\text{NSR} = \frac{2/3N\Delta_p^2 - O(\Delta_p^3) + N/2\Delta_q^2}{\sqrt{2}\Delta_p - 2/3\Delta_p^2} \quad (28)$$

q 가 무한대이면 $\Delta_q^2 = 0$ 이고 p 가 커지면 $O(\Delta_p^3)$ 는 상대적으로 작아 무시할 수 있기 때문에 (29)와 같은 점근 특성식을 얻을 수 있다.

$$\text{NSR}_{\text{asympt}} = \frac{\sqrt{2}}{3} N\Delta_p \quad (29)$$

IV. 시뮬레이션 결과 및 토의

본 논문에서 수행한 해석 기법을 검증하기 위해, 유도한 NSR 식 (25)와 가우스 백색신호에 대한 시뮬레이션 결과를 비교하였다. 세 가지 다른 구간길이, 즉 $N=32, 128$, 그리고 265인 경우에 대하여, 블록 내의 오차 스펙트럼을 제곱평균하고 이를 다시 100 블록동안 평균하여 NSR을 추정하였다. 첫째로 DFT 표현 비트 수가 충분히 커서 반올림오차의 영향이 미비할 경우에 대하여 진동계수 표현 비트 수를 바꾸어가며 표시한 결과를 그림 2에 해석적으로 유도한 (25)와 함께 나타내었다. 그림 1에서 보듯이 해석적으로 유도한 결과와 시뮬레이션 실험 결과가 실험오차 한계 내에서 정확히 일치한다.

DFT 표현 비트 수를 12, 14, 16, 18 및 20 비트로 하여 반올림오차의 영향이 있을 경우 진동계수 표현 비트 수에 따른 시뮬레이션 결과를 해석식과 함께 그림 2에 나타내었다. 그림 2에서 보듯이 반올림오차의 영향을 고려할 경우에, 진동계수의 표현 비트 수를 일

정 비트 수까지 증가 시켰을 때는 NSR 개선이 있으나 그 이상의 비트 수로 증가 시켰을 때는 오히려 NSR이 악화됨을 알 수 있다. 이 때 NSR이 반전되는 진동계수 표현의 임계 비트 수는 DFT 표현 비트 수와 같다. 즉 진동계수 표현 비트 수와 DFT 표현 비트 수를 같게 할 때 최대의 SNR을 얻을 수 있다. NSR이 반전되는 이유는 높은 진동계수 표현 비트 영역에서의 오차방정식 시정수가 길어져 누적된 오차의 양이 계수를 정확히 표현하여 개선되는 오차의 양보다 커지기 때문이다. 그림 1과 그림 2의 결과를 통해 해석적으로 구한 NSR 식 (25)가 매우 정확하고, SDFT를 순환식으로 구현하는 응용에 설계 지침으로 이 식들이 매우 유용하다고 결론지을 수 있다.

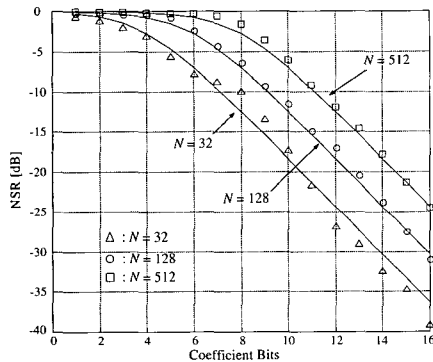


그림 1. DFT 표현 비트 수가 충분히 큰 경우 시뮬레이션 실험과 해석식을 통해 구한 NSR 비교. 가로축: 진동계수 표현 비트 수. 실선: 해석식. 실험 결과: Δ , \circ , \square .

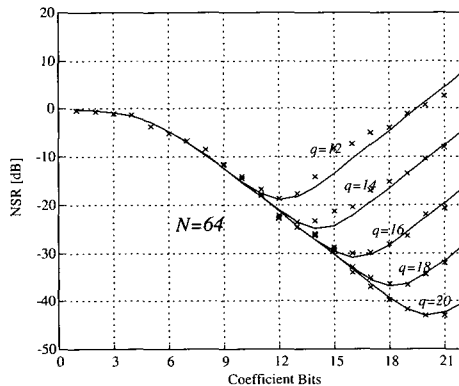


그림 2. 반올림오차를 고려한 시뮬레이션 실험과 해석식을 통해 구한 NSR 비교. 가로축: 진동계수 표현 비트 수. 실선: 해석식. q: DFT 값 표현 비트 수

V. 결 론

본 논문에서는 SDFT의 복소수 진동계수와 DFT 표현 값을 유한 비트로 표현하여 고정소수점 연산으로 순환구조로 구현할 때, NSR로 표현되는 오차의 영향을 해석적으로 유도하는 과정을 기술하였다. 유도과정은 오차의 파급을 기술하는 오차 방정식에 바탕을 두었으며, 계수오차와 반올림오차를 확률변수로 취급하였다. NSR 해석식은 진동계수를 표현한 비트 수 p , DFT 값을 표현하는 비트 수 q , 그리고 DFT 구간길이 N 에 대한 해석식으로 구하였으며, 여러 비트 수와 구간길이에 대한 시뮬레이션 데이터와 비교하였다. 비교 결과 실험 값과 해석 값이 매우 잘 일치하여, 유도한 NSR 결과 식과 해석과정이 타당하였음을 확인하였다. NSR 공식 (25)가 변수 p , q , 그리고 N 과 뚜렷이 관계로 주어진다 것은 실제적인 응용을 위한 설계할 변수 결정의 지침으로써 매우 유용한 특성이라 할 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Dulal C. Kar, "A CORDIC-based unified systolic architecture for sliding window applications of discrete transforms," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, no. 2, pp. 441-444, Feb. 1996.
- [2] K. J. R. Liu, C.T. Chiu, K.K. Kolagotla, and J.F. Ja' Ja', "Optimal unified architectures for the real-time computation of time-recursive discrete sinusoidal transforms," *IEEE Trans. on Circuits Syst. Video Technol.*, vol. 4, pp. 168-180, Apr. 1994.
- [3] P. Yip and K. R. Rao, "On the shift property of DCT's and DST's," *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-35, pp. 404-406, Mar. 1987.
- [4] Gene H. Hostetter, "Recursive Discrete Fourier Transform," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, No. 28, pp. 184-190, April 1980.
- [5] B. Widrow, Ph. Baudrenghin, M. Vetterli, and

- P/ F. Titchener, "Fundamental relations between the LMS algorithm and the DFT," IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-34, No. 7, pp. 814-819, July 1987.
- [6] Frabcoise Beaufays, Bernard Widrow, "On the Advantages of the LMS Spectrum Analyzer Over Nonadaptive Implementation of the Sliding-DFT," IEEE Tran. on Circuits and Systems-part I : Fundamental Theory and Applications, Vol. 42, No. 4, pp. 218-220, April 1995.
- [7] Gabor Peceli, "A Common Structure for recursive Discrete Transforms," IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-33, No. 10, pp. 1035-1036, Oct. 1986.
- [8] David C. Munson, Jr., and Bede Liu, "ROM/ACC Realization of Digital Filters for Poles Near the Unit Circle," IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-27, No. 2, pp. 147-151, Feb. 1980.
- [9] Bede Liu, "Effect of Finite Word Length on the Accuracy of Digital Filters-A review," IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-18, No. 6, pp. 670-677, Nov. 1971.
- [10] L. R. Rabiner and B. Gold, Theory and Application of Digital Signal Processing, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [11] B. F. Boroujeny, "A comment on the computational complexity of sliding FFT," IEEE Trans. on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, vol. 39, no. 12, pp. 875-876, Dec. 1992.

 저 자 소 개



張泰奎(正會員)

1955년 11월 13일생. 1979년 서울대학교 전기공학과 졸업(공학사). 1981년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학석사). 1981년~1982년 현대엔지니어링(주). 1982년~1984년 현대전자산업(주). 1987년

University of Florida 전기공학과 졸업(공학박사). 1987년~1990년 Tennessee State University, Assistant Professor, 1990년~현재 중앙대학교 전자전기공학부 교수. 주관심분야는 신호처리, 이동 통신, 디지털 오디오 등임



金載和(正會員)

1974년 2월 18일생. 1996년 중앙대학교 제어계측공학과 졸업(공학사). 1998년 동 대학원 제어계측학과 졸업(공학석사). 현재 동 대학원 박사과정. 주 관심분야는 디지털 신호처리, 통신 시스템, 오디오/비디오 코

딩 등임.