

論文2000-37SP-5-10

가중 정규화에 기반한 반복적 바이스펙트럼 추정과 신호복원

(Iterative Bispectrum Estimation and Signal Recovery Based On Weighted Regularization)

林元培*, 許峯壽*, 李學戊*, 姜文基*

(Won Bae Lim, Bong Soo Hur, Hak Moo Lee, and Moon Gi Kang)

요 약

바이스펙트럼은 신호 처리 및 영상 복원을 위한 적합한 특성을 갖고 있고 여러 응용분야에 적용될 수 있음에도 불구하고 실제로 적용된 결과가 문헌상으로 거의 나와 있지 않다. 이는 표본이 부족하여 바이스펙트럼의 평균 연산이 어렵기 때문이다. 본 논문에서는, 참 바이스펙트럼을 표본 바이스펙트럼의 평균으로 정의한다. 그리고 표본 바이스펙트럼의 평균은 표본의 3중 상관함수의 푸리에 변환으로 나타난다. 표본 바이스펙트럼의 특성을 분석하고, 일반화된 가중 정규화 이론을 적용하여 확률적으로 평균을 구하지 않고 참 바이스펙트럼을 추정하는 방법을 제안한다. 번지고 잡음이 낀 조건에서 제안한 알고리즘으로 바이스펙트럼을 추정하고 이 결과가 신호의 복원에 유용함을 실험을 통해 증명한다.

Abstract

While the bispectrum has desirable properties in itself and therefore has a lot of potential to be applied to signal and image restoration, few real-world application results have appeared in literature. The major problem with this is the difficulty in realizing the expectation operator of the true bispectrum, due to the lack of realizations. In this paper, the true bispectrum is defined as the expectation of the sample bispectrum, which is the Fourier representation of the triple correlation given one realization. The characteristics of the sample bispectrum are analyzed and a way to obtain an estimate of the true bispectrum without stochastic expectation, using the generalized theory of weighted regularization is shown. The bispectrum estimated by the proposed algorithm is experimentally demonstrated to be useful for signal recovery under blurred noisy condition.

I. 서 론

바이스펙트럼(bispectrum)은 가우시안 잡음에 민감하지 않고 원 영상의 위상 정보를 가지는 특성을 갖고 있으므로 영상 복원, 움직임 추정 및 보상, 그리고 변침

정도 추정 등의 문제들을 해결하는 데 매우 유용하다. 고차 스펙트럼을 추정하는 방법에 대한 많은 문헌들이 있어 왔으나^[1-11] 실제 고차 스펙트럼을 적용한 많은 예들에서는 주요한 문제점이 있다. 즉, 실제 경우에 있어 매우 제한된 수의 표본들만이 이용가능하기 때문에 신호 영역에서 이상적인 통계적 평균을 구하기 어렵다는 것이다. 더구나, 신호의 국부적 혹은 유사-에르고디시티(quasi-ergodicity)를 가정하여 평균을 대략적으로 구한다 하더라도, 신호를 바이스펙트럼 영역이나 3차 누적 영역으로 변환하였을 경우, 차원이 2배가 되기 때문에 실제적인 적용을 하기에는 계산량이 너무 많아진

* 正會員, 延世大學校 電氣 컴퓨터工學科
(Dept. of Electrical & Computer Engineering, Yonsei University)
接受日字: 1999年9月7日, 수정완료일: 2000年4月3日

다.

본 논문에서는 주어진 앙상블에서 한 표본의 3중 상관관계의 푸리에 영역 표현을 표본 바이스펙트럼으로 정의한다. 이 때, 참 바이스펙트럼은 표본 바이스펙트럼의 통계적 평균(expectation)으로 정의한다. 표본 바이스펙트럼의 특성을 분석한 후에, 일반화된 가중 정규화 이론^[12]을 적용하여 매우 제한된 수의 표본으로부터 참 바이스펙트럼을 추정하는 효율적인 방법을 제안하는 것이 본 논문의 취지이다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 표본 바이스펙트럼과 표본 3중 상관관계를 정의한다. 이들의 특성을 분석하여 표본 3중 상관관계 영역에서 잡음에 중속된 왜곡 신호를 분석하며, 3장에서는 원 신호의 정확한 3중 상관관계의 추정을 위한 가중 평탄화 함수를 제안하고 정규화 매개변수와 가중 행렬을 얻는 방법을 논의해 본다. 4장에서는 참 3중 상관관계와 원 신호를 동시에 복원하는 반복 알고리즘을 확립해 본다. 5장에서는 실험적 결과를 바탕으로 결론을 도출한다.

II. 잡음이 섞이고 열화된 신호의 표본 바이스펙트럼의 분석

이산 시간(혹은 공간)신호 $f(m)$ 의 이산 바이스펙트럼은 $f(m)$ 의 3중 상관관계의 이산 푸리에 변환(DFT)으로 정의된다. 즉,

$$B_f(k_1, k_2) = DFT[c(m_1, m_2)] \quad (1)$$

이다. 여기서 B_f 는 $f(m)$ 의 이산 바이스펙트럼을 나타내고, k_i 는 이산 주파수 축을, $DFT[\cdot]$ 는 이산 푸리에 변환을 나타낸다. $c(m_1, m_2)$ 는 $f(m)$ 의 3중 상관관계이며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E[f(m)f(m+m_1)f(m+m_2)] \quad (2)$$

여기서 E 는 통계적 평균 연산자이다. 이산 바이스펙트럼의 정의에 따라 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} B_f(k_1, k_2) &= F(k_1)F(k_2)F^*(k_1+k_2), \\ & f(m)\text{이 해석적인 신호일 때} \\ B_f(k_1, k_2) &= E[F(k_1)F(k_2)F^*(k_1+k_2)], \\ & f(m)\text{이 확률적인 신호일 때} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $F(k)$ 는 $f(m)$ 의 DFT이고, F^* 은 F 의 켈레복소수이다. 저하된 신호 표본 모델은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(m) = d(m) * x(m) + n(m) \quad (4)$$

여기서 $*$ 는 컨벌루션을, m 은 이산신호 또는 임의의 차원의 공간 좌표를 나타낸다. $y(m), x(m)$ 그리고 $n(m)$ 은 각각 관찰된 신호, 원 신호, 부가 잡음을 나타내며 $d(m)$ 은 저하 시스템의 충격 응답 함수이다. 여기서, $x(m)$ 과 $d(m)$ 은 해석적인 함수나 신호들이지만, $n(m)$ 은 확률적 신호이다. 따라서 $y(m)$ 은 확률적인 신호이다.

우리는 식의 $y(m)$ 에서, $d(m)$ 의 $B_d(k_1, k_2)$ 에 대한 선지식과 $y(m)$ 의 이산 바이스펙트럼 $B_y(k_1, k_2)$ 에 기반하여, $x(m)$ 의 참 바이스펙트럼의 추정을 하고자 한다. $d(m)$ 은 해석적인 신호이므로, $d(m)$ 의 바이스펙트럼은 $d(m)$ 의 DFT로부터 직접 구할 수 있다. 확률신호 $y(m)$ 의 참 바이스펙트럼은

$$B_y(k_1, k_2) = E[B_{ys}(k_1, k_2)] \quad (5)$$

이다. 여기서 B_{ys} 는 $y(m)$ 앙상블에서 이용할 수 있는 표본의 바이스펙트럼이다. 즉, 이것은 $Y(k_1)Y(k_2)Y^*(k_1, k_2)$ 로 정의된다. $y(m)$ 의 표본 바이스펙트럼은 식 (4)에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} B_{ys}(k_1, k_2) &= Z(k_1)Z(k_2)Z^*(k_1+k_2) \\ &+ Z(k_1)Z(k_2)N^*(k_1+k_2) \\ &+ Z(k_1)Z(k_2)Z^*(k_1+k_2) \\ &+ N(k_1)Z(k_2)Z^*(k_1+k_2) \\ &+ Z(k_1)N(k_2)Z^*(k_1+k_2) \\ &+ N(k_1)Z(k_2)N^*(k_1+k_2) \\ &+ N(k_1)N(k_2)Z^*(k_1+k_2) \\ &+ N(k_1)N(k_2)N^*(k_1+k_2) \end{aligned} \quad (6)$$

그러므로, 참 바이스펙트럼은 표본바이스펙트럼으로부터 다음과 같이 유도 된다.

$$\begin{aligned}
 B_y(k_1, k_2) &= E[B_{ys}(k_1, k_2)] \\
 &= Z(k_1)Z(k_2)Z^*(k_1+k_2)NX(0) \\
 &\quad [S_{nn}(k_1), \delta(k_1, k_2) + S_{nn}(k_2), \delta(k_1) \\
 &\quad + S_{nn}(k_1), \delta(k_2)]
 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $Z(k) = D(k)X(k)$ 이고 $D(k), X(k)$ 와 $N(k)$ 는 각각 $d(m), x(m), n(m)$ 의 DFT이다. S_{nm} 은 잡음의 전력을 의미한다. 식 (7)에서 B_{ys} 의 평균이 $y(m)$ 의 평균값이 0이 아니면 바이스펙트럼 축을 제외한 참 바이스펙트럼이 되고, $y(m)$ 의 평균값이 0이면 전체 영역의 참 바이스펙트럼이 된다는 것을 알 수 있다. 그러나 실제 경우에 있어서 $y(m)$ 의 매우 제한된 수의 표본들을 이용할 수 있기 때문에 표본 바이스펙트럼의 통계적 평균을 구할 수 없다. 그러나, 표본 바이스펙트럼 자체는 유용하다. 식 (6)에 보였듯이 표본 바이스펙트럼은 잡음없이 저하된 신호의 이상적인 바이스펙트럼과 함께 일곱 개의 백색이 아닌 잡음으로 구성되어 있다. 또한, 바이스펙트럼의 위상은 많은 잉여 부분을 갖게 된다. 즉, N 차원의 신호는 $N \times N$ 의 바이스펙트럼 차원을 산출하며, 실제 처리에 있어서 계산량이 많아진다. 실험 관찰로부터, 신호로부터 평균값을 빼고, 여러 개의 표본들의 평균을 구한다 하더라도, 잡음과 연관된 부분들에 의해 직선 $k_1=0, k_2=0$ 그리고 $k_1=-k_2$ 과 이 세 직선들에 인접한 부분들이 상당히 훼손되게 된다. 만약, 무한 개의 표본이 있다면, 신호로부터 정확한 평균값을 뺀 후 이상적인 평균 연산을 수행할 수 있고, 따라서 어떤 영역도 훼손되지 않을 것이다. 그러나 표본의 수가 제한되어 있기 때문에, 훼손된 직선들에 위치한 델타 함수가 이용할 수 있는 표본 수에 반비례하는 주엽폭을 갖는 싱크(sinc) 함수가 된다. 따라서 이 세 축의 이웃한 부분 역시 훼손되게 된다. 잡음에 의한 영향을 가장 적게 받는 영역은 $(k_1 = k_2)$ 인 대각선이다. 위상과 크기만을 복원하기 위해 이 대각선을 사용하는 알고리즘은 문헌 [4]와 [5]에 제시되어 있다. 대각선 $(k_1 = k_2)$ 이 바이스펙트럼 영역에서 잡음 전력에 의해 가장 영향을 덜 받는 부분을 나타낸다 하더라도, 매우 제한된 수의 표본들만 이용할 수 있기 때문에 여전히 잡음을 많이 포함하고 있다(식 (6)의 일곱 개의 잡음 항들). 또한 잉여 부분 때문에 발생하는 불필요한 많은 계산량을 효과적으로 줄이기 위해서도

바이스펙트럼 영역의 차원은 줄여야만 한다.

1. 대각축 ($k_1 = k_2$)의 고찰

$(k_1 = k_2 = k)$ 대각축만을 고려하면, 표본 바이스펙트럼 (6)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 B_{ys}(k) &= Z(k)Z(k)Z^*(2k) + Z(k)Z(k)N^*(2k) \\
 &\quad + Z(k)N(k)Z^*(2k) + N(k)Z(k)Z^*(2k) \\
 &\quad + Z(k)N(k)N^*(2k) + N(k)Z(k)N^*(2k) \\
 &\quad + N(k)N(k)Z^*(2k) + N(k)N(k)N^*(2k)
 \end{aligned} \quad (8)$$

이 대각축을 사용하면 신호와 같은 차원을 갖는 바이스펙트럼이나 삼중 상관관계를 얻을 수 있다는 장점이 있다. 즉, 대각축 위에서는, k_1 과 k_2 , 두개의 변수 대신에 하나의 독립변수 k 만 존재한다. 여기서 2차 또는 더 높은 차수의 잡음 스펙트럼이 일차 잡음 스펙트럼보다 훨씬 작으며, 따라서 이러한 항들은 무시할 수 있다고 가정한다. 이러한 가정은 삼중 상관관계 영역에서 ($B_{ys}(k)$ 의 역 푸리에 변환), 2차 또는 3차의 잡음 항들이 둘 혹은 세 개의 통계적 특성이 같은 컨벌브된 잡음 항들로 나타나기 때문에 가능하다. 컨벌브된 잡음 항들은 매우 작을 것이라고 예상할 수 있다. 고차 항들의 삼중 상관관계의 크기가 일차 항들의 크기보다 매우 작다는 것은 실험으로 증명할 수 있다. 또한, 잡음 신호 $n(m)$ 의 특성은 백색 가우시안이고, 잡음 스펙트럼의 감소 형태(version)인 $N(2k)$ 역시 $N(k)$ 와 같은 특성을 갖는다. 그리고, $n(m)$ 이 $n(-m)$ 과 같은 특성을 갖고, 실수이기 때문에, $N^*(k) = N(k)$ 이다. 따라서, 표본 바이스펙트럼은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 B_{ys}(k) &= Z(k)Z(k)Z^*(2k) \\
 &\quad + N(k)Z(k)[Z(k) + 2Z^*(2k)] \\
 &= B_{dd}(k)B_{xd}(k) + N(k)H(k)
 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $B_{dd}(k) = D(k)D(k)D^*(2k)$, $B_{xd}(k) = X(k)X(k)X^*(2k)$ 이고, x 의 참 바이스펙트럼을 추정할 수 있다. $H(k)$ 는 $Z(k)[Z(k) + 2Z^*(2k)]$ 이고, 바이스펙트럼 영역에서 백색 잡음 $n(m)$ 을 왜곡시키는 스펙트럼 형태 함수이다. 식 (9)에서 $B_{ys}(k)$ 에 역 DFT를 취하면 삼중 상관관계 영역에서 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$t_{ys}(m) = t_{dd}(m) ** t_{xd}(m) + n(m) ** h(m) \quad (10)$$

여기서 $t_{ys}(m) = t_{dd}(m)$, $t_{xd}(m)$ 그리고 $h(m)$ 은 각각 $B_{ys}(k)$, $B_{xd}(k)$ 그리고 $H(k)$ 의 역 DFT를 나타낸다. 식 (10)의 항들이 식 (4)의 신호들과 같은 차원을 갖는다는 점은 매우 중요한 특성이다. 식 (10)은 행렬-벡터 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$t_{ys} = T_{dd}t_{xd} + H(x)n \quad (11)$$

여기서 벡터 t_{ys} , t_{xd} 그리고 n 은 각각 사전 배열식으로 나열된 벡터들이다. 그리고 T_{dd} 와 $H(x)$ 는 $t_{dd}(m)$ 과 $h(m)$ 을 구성하는 블록 순환 행렬들이다. 바이스펙트럼 영역의 1차 사분면이 ($k_2 = -k_1 + N/2$) 선에 대해 대칭이기 때문에 이 축에서는 바이스펙트럼 주파수 성분들 수의 반만을 구할 수 있다. 다시 말해서, 이 대각축으로부터 바이스펙트럼의 짝수 주파수 성분들만을 복원할 수 있는 것이다. 따라서 참 바이스펙트럼의 완전한 복원을 위해서는 대각축 ($k_1 = k_2 - 1$)에 가장 근접한 축이 반드시 고려되어야 한다.

2. 대각선에 가장 근접한 축에 대한 고찰

대각선에 가장 가까운 축 ($k_1 = k_2 - 1 \equiv k$) 역시 ($k_1 = 0, k_2 = 0$ 그리고 $k_1 = -k_2$)인 세 축에 집중되어 있는 잡음 전력에 의한 영향을 거의 받지 않는다. 이 축에서 표본 바이스펙트럼은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B_{ys}(k) &= Z(k)Z(k+1)Z^*(2k+1) \\ &+ Z(k)Z(k+1)N^*(2k+1) \\ &+ Z(k+1)N(k)Z^*(2k+1) \\ &+ Z(k)Z^*(2k+1)N(k+1) + R_n(0^2) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 차수가 2 이상인 왜곡된 잡음 항들인 $R_n(0^2)$ 은 무시할 수 있다. 잡음의 특성이 백색 가우시안이고 $N^*(k)$ 와 축소된 잡음 항 $Z^*(2k+1)$ 이 $N(k)$ 와 통계적으로 같은 특성을 가지므로 식 (12)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} B_{ys}(k) &= B_{do}(k)B_{xo}(k) + [Z(k)Z(k+1) \\ &+ Z(k+1)Z^*(2k+1) \\ &+ Z(k)Z^*(2k+1)]N(k) \end{aligned} \quad (13)$$

$$B_{ys}(k) = B_{do}(k)B_{xo}(k) + H(k)N(k) \quad (14)$$

여기서 $B_{do}(k) = D(k)D(k+1) \cdot D^*(2k+1)$ 그리고 $B_{xo}(k) = X(k)X(k+1)X^*(2k+1)$ 이며

$$\begin{aligned} H(k) &= Z(k)Z(k+1) + Z(k+1)Z^*(2k+1) \\ &+ Z(k)Z^*(2k+1) \end{aligned} \quad (15)$$

이다. 식 (14)에서 $B_{ys}(k)$ 에 역 DFT를 취하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$t_{ys}(m) = t_{do}(m) ** t_{xo}(m) + n(m) ** h(m) \quad (16)$$

여기서 $t_{ys}(m) = t_{do}(m)$, $t_{xo}(m)$ 과 $h(m)$ 은 각각 $B_{ys}(k)$, $B_{do}(k)$, $B_{xo}(k)$ 그리고 $H(k)$ 의 역 DFT를 나타낸다. 식 (16)은 (10)과 같은 형태이며, 두 식은 모두 같은 차원을 갖고 있다. 식(16)의 행렬-벡터 형태는

$$t_{ys} = T_{do}t_{xo} + H(x)n \quad (17)$$

이다. 여기서 벡터 t_{ys} , t_{xo} 는 각각 $t_{ys}(m)$ 과 $t_{xo}(m)$ 을 사전 배열식으로 나열한 벡터들이고, $T_{do}(m)$ 와 $H(x)$ 는 각각 $t_{do}(m)$ 과 $h(m)$ 을 구성하는 블록 순환 행렬들이다. 이 축으로부터 바이스펙트럼의 홀수 성분들을 구할 수 있다.

3. 참 바이스펙트럼의 복원

위에서 언급한 두 축에서의 표본 바이스펙트럼 방정식이나 표본 삼중 상관관계 방정식(식 (11), 식 (17))은 참 바이스펙트럼의 완전한 복원을 위해 필요한 모든 성분들을 갖고 있다. 이러한 방식의 분석은 다음과 같은 장점이 있다. : 바이스펙트럼이나 이에 상응하는 삼중 상관관계가, 종래의 바이스펙트럼 (혹은 삼중상관관계)의 차원이 2배가 되는 것과 달리, 원 신호와 같은 차원을 갖는다. 그러나 T_{xd} 와 T_{xo} 행렬들이 특이행렬(singular)이고, 참 바이스펙트럼의 복원이 불량위치(ill-posed)문제를 갖게 된다. 또한, 바이스펙트럼 형태 함수행렬 $H(x)$ 가 신호에 종속적이며, 이는 역 변환 문제를 더 비선형적으로 만든다. 따라서 이러한 역변환 문제에 일반화된 기중 정규화 접근을 적용하도록 한다.

III. 참 바이스펙트럼의 복원을 위한 일반화된 가중 정규화

편의를 위해 t_x 와 T_d 가 t_{xd} 와 T_{dd} 혹은 t_{xo} 와 T_{do} 를 나타내는 기호라 하고, 식 (4)의 모델에서 부가잡음 n 을 백색 가우시안이라고 하면, 방정식 (11)과 (17)에서, t_x 로부터 t_x 의 복원은 불량위치(ill-posed)이다. 이는 행렬 T_d 가 대부분의 경우에 있어서 특이행렬이기 때문이다. 뿐만 아니라, 삼중상관관계 영역에서 잡음의 스펙트럼 형태함수($H(x)$)는 원 신호 x 의 함수이기 때문에 이용할 수 없다. 식 (11)과 식 (17)에서 부가 잡음 항들이 신호에 종속적인 백색 가우시안일 때, 평활화 함수에 기반한 l_2 놈(norm)의 최소화를 이용하여 해(t_x)를 구할 수 있다. 이것은 확률적 최대 후부(MAP) 접근과 해석적인 l_2 놈에 근거한 접근 사이의 관계의 고찰을 통해 증명할 수 있다. 그러나 표본 삼중상관관계 영역에서 부가 잡음 항이 신호에 독립이 아니므로, 아래 식 (18)에 의해 주어진 가중 평활화 함수를 최소화함으로써 x 의 참 바이스펙트럼의 추정과 정확한 삼중상관관계 (t_x)를 얻는 방법을 제안한다.

$$M_h(\alpha_h(t_x), t_x) = \|t_{ys} - T_d t_x\|^2 A(t_x) + \alpha_h(t_x) \|C t_x\|^2 \quad (18)$$

여기서 $A(t_x)$ 는 잡음 특성을 표본 삼중상관관계 영역에 넣을 때 쓰이는 가중 행렬이고 $\alpha_h(t_x)$ 는 결과값에 대한 충실도와 해의 평탄성(smoothness)사이의 반비례관계(trade-off)를 조절한다. 그리고 C 는 2차원 라플라시안 커널(kernel) 고주파 필터를 나타낸다. 정규화 변수 $\alpha_h(t_x)$ 는 t_x 의 함수로 정의되며, 식 (18)의 가중 평활화 함수가 유일 해를 갖고(convex) 유일한 전체적 최소화해를 갖게 하는 역할을 한다.^[6-8] 잠재적으로 $M_h(\alpha_h(t_x), t_x)$ 의 최소화 연산에 의해 함수 $\alpha_h(t_x)$ 를 다양하게 선택할 수 있다. 우리는 문헌^[14-15]에서 $\alpha_h(t_x)$ 와 $M_h(\alpha_h(t_x), t_x)$ 의 세가지 특성이 위와 같은 목적을 위해 반드시 고려되어야 한다는 것을 보였다. 알맞은 정규화 함수의 바람직한 특성을 조사해 본 후, 아래의 형태는 최적의 해를 제공해왔다.

$$\alpha_h(t_x) = \frac{\|t_{ys} - T_d t_x\|^2 A(t_x)}{1/\gamma - \|C t_x\|^2} \quad (19)$$

여기서 γ 는 수렴성(convexity)과 해의 존재(다음 절에 반복계산(iteration)의 수렴이 기술되어 있다)를 조절하는 변수이다. 평활화 함수의 확률적 베이시안(Baysian) 해석에 의해, 가중 행렬 $A(t_x)$ 는 신호에 종속적이고^[13-14], 백색이 아닌 잡음의 특성을 포함할 수 있다. 그러므로 주요한 과제는 원 신호와 $H(x)$ 에 대한 어떠한 사전 지식 없이 어떻게 하면 신호에 종속적인 스펙트럼 형태 함수를 우리가 해를 구하는 과정 속으로 포함시키냐는 것이다. $h(x)$ 가 부분적으로 에르고딕(ergodic)이라 가정하면 $h(x)$ 의 상호분산(covariance)행렬을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Theta_{h(x)} &= E[(h(x) - m_{h(x)})(h(x) - m_{h(x)})^T] \\ &= Q[(h(x) - Qh(x))(h(x) - Qh(x))^T] \quad (20) \\ &= R_{h(x)} + QR_{h(x)}Q^T - R_{h(x)}Q^T - QR_{h(x)} \end{aligned}$$

여기서 $m_{h(x)}$ 는 $h(x)$ 의 평균이고 $R_{h(x)} = Qh(x)h(x)^T$ 는 $h(x)$ 의 자기상관행렬을 나타낸다. 가중 평활화 행렬의 베이시안 해석으로 유도한 $A(t_x)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A(t_x) = I - \frac{\Theta_{h(x)}}{\gamma} \quad (21)$$

여기서 γ 는 $\gamma \geq \max_i \Theta_{h(x)}$ 의 조건으로 정해지고, $\Theta_{h(x)}$ 는 행렬 $\Theta_{h(x)}$ 의 i 번째 성분을 나타낸다. 방정식 (21)에서 유도된 $A(t_x)$ 는 $\Theta_{h(x)}$ 의 특성을 가져야만 한다. 그러나 가중 행렬을 선택할 때 생기는 부가적인 불량위치문제(ill-posed)를 피하기 위해 $\Theta_{h(x)}$ 의 특성을 가지면서 $\Theta_{h(x)}$ 를 대신할 수 있는 $\Theta_{h(x)}$ 의 상대역(reciprocal)을 사용한다.

가중 행렬 및 정규화 함수를 선택하고 식 (18)에서 $M_h(\alpha_h(t_x), t_x)$ 의 그라디언트(Gradient)를 0이라고 하면 해를 구하기 위한 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$(T_d^T A(t_x) T_d + \alpha_h(t_x) C^T C) t_x = T_d^T A(t_x) t_{ys} \quad (22)$$

$\nabla_{t_x} \alpha_h(t_x) = 0$ 이므로, [17]과 유사한 결과가 된다. 방정식 (22)가 비선형적이고 정규화 함수에 대한 정보가 없지만, 가중 행렬을 이용할 수 있으므로, 반복계산 기술(iteration)을 이용하여 x 에 대한 해를 구하고 각 단계마다 부분적으로 추정된 t_x 에 기반하여 $a(t_x)$ 와

$A(t_x)$ 를 추정할 수 있다.

IV. 반복적 계산을 통한 참 바이스펙트럼의 추정 및 신호의복원

식 (22)가 비선형이고 정규화 함수와 가중 행렬에 대한 어떠한 사전 지식도 없으므로 반복적 계산을 통해서 해를 구해야 한다. 해를 구하기 위한 반복계산은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$t_{x_{n+1}} = t_{x_n} + [T_d^T A(t_{x_n})t_{ys} - (T_d^T)A(t_{x_n})t_d + \alpha_k(t_{x_n})C^T C] t_{x_n} \quad (23)$$

반복 계산의 수렴 분석으로 해가 존재함을 보일 수 있다. 가중 평활화 함수 (18) 수렴성(convexity)과 반복 계산 (23)이 수렴하기 위한 충분 조건은

$$\frac{1}{\gamma} = 2\|t_{ys}\|^2 \quad (24)$$

이다. 조건 (24)가 만족되면, 반복계산 알고리즘 (23)은 비선형임에도 불구하고 초기조건과 상관없이 두 축 ($k_1 = k_2$ 그리고 $k_1 = k_2 - 1$)을 따라서 원 신호 x 를 유일하게 복원하는 참 바이스펙트럼으로 수렴한다.

식 (23)의 반복계산 단계마다, ($k_1 = k_2$)와 ($k_1 = k_2 - 1$)을 따라서 주파수 영역에서 선 바이스펙트럼으로 나타나는 직선 삼중상관관계 t_{x_k} 를 얻을 수 있다. 동시에 같은 단계의 복원된 직선 바이스펙트럼으로부터 부분적으로 복원된 x 의 바이스펙트럼(혹은 삼중상관관계)과 k 번째 단계에서의 x_k 를 반복적 계산(recursion)으로 구할 수 있다. 바이스펙트럼의 위상과 크기 각각으로부터 신호의 위상과 크기 성분을 구하여 참 바이스펙트럼을 추정하고 이를 통해 신호를 복원할 수 있다^[4,5]. 바이스펙트럼과 신호 사이의 위상과 크기(로그비율(log scale))의 관계는 아래와 같다.

$$\Psi(k_1, k_2) = \psi(k_1) + \psi(k_2) - \psi(k_1, k_2) \quad (25)$$

그리고,

$$T(k_1, k_2) = S(k_1) + S(k_2) - S(k_1, k_2) \quad (26)$$

여기서 $\Psi(k_1, k_2)$ 와 $\psi(k)$ 는 각각 $B_x(k_1, k_2)$ (추정

한 x 의 참 바이스펙트럼)와 $X(k)$ 의 위상을 나타내며 $T(k_1, k_2)$ 와 $S(k)$ 는 각각 $B_x(k_1, k_2)$ 와 $X(k)$ 의 크기(로그비율)를 나타낸다. 복원 문제는 $\Psi(k_1, k_2)$ 와 $\Psi(k_1, k_2)$ 각각으로부터 $\psi(k)$ 와 $S(k)$ 를 추정하는 것이다. $S(k)$ 를 추정하는 것은 매우 직접적이지만, $\psi(k)$ 를 추정하는 것은 $\Psi(k_1, k_2)$ 의 주요 값인 $\Psi_p(k_1, k_2)$ ($-\pi \leq \Psi_p(k_1, k_2) \leq \pi$)만 이용할 수 있기 때문에 복잡하다. 바이스펙트럼 위상으로부터 원 신호의 위상 성분을 복원해 내기 위한 위상 반복계산(recursion)은 대각축을 따라서 아래와 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} \phi_p(k) &= PV \left[2\phi_p(k/2) - \Psi_p \left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2} \right) \right] \\ &\text{for } k \text{ even } (k \geq 2) \end{aligned} \quad (27)$$

그리고, 대각선 밖의 축을 따라서

$$\begin{aligned} \phi_p(k) &= PV \left[2\phi_p \left(\frac{k+1}{2} \right) + \phi_p \left(\frac{k-1}{2} \right) - \Psi_p \left(\frac{k+1}{2}, \frac{k-1}{2} \right) \right] \\ &\text{for } k \text{ odd } (k \geq 3) \end{aligned} \quad (28)$$

이 되며, 크기(로그비율)의 복원은 대각축을 따라서

$$\begin{aligned} S(k) &= -2S \left(\frac{k}{2} \right) + T \left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2} \right) \\ &\text{for } k \text{ even } (k \geq 2) \end{aligned} \quad (29)$$

이며, 대각선 밖의 축을 따라서

$$\begin{aligned} S(k) &= -S - S \left(\frac{k+1}{2} \right) - S \left(\frac{k-1}{2} \right) + T \left(\frac{k+1}{2}, \frac{k-1}{2} \right) \\ &\text{for } k \text{ odd } (k \geq 3) \end{aligned} \quad (30)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 PV 는 주요 값 연산자이다. 복원된 참 바이스펙트럼으로부터 원 신호의 위상 및 크기(로그비율)의 복원과 함께 복원 신호의 $DFT(X(k))$ 도 각 단계마다 아래와 같이 구해진다.

$$\ln X(K) = S(k) + j\phi_p(k) \quad (31)$$

$$X(K) = \exp[S(k) + j\phi_p(k)] \quad (32)$$

각 단계마다 복원된 신호는 다음과 같다.

$$x(m) = DFT^{-1}(\exp[S(k) + j\phi_p(k)]) \quad (33)$$

위상 반복계산(recursion)(28)을 하기 위해서 초기조건으로 일차 위상 성분의 정확한 값이 필요하다. 위상의 초기값 오류는 복원된 신호에서 단순한 공간적 이동으로 나타나게 된다. 이러한 공간적 이동은 시각적 추정에 의해 원래 위치로 되돌릴 수 있다. 반복계산이 유일해로 수렴한다는 것에 기반하여, 원 신호 (x)의 참 바이스펙트럼과 원 신호 그 자체는 각 반복계산 단계마다 동시에 복원된다. 각 단계마다 부분적으로 복원된 바이스펙트럼과 원 신호는 다음 단계를 위한 최적의 정규화 변수와 알맞은 가중 행렬을 결정하는 데 이용된다.

일반화된 가중 평활화 함수 및 반복 계산 수렴에 대한 분석에 기반하여, 이러한 자기 적응적 반복계산 복원 과정을 통해 최적의 유일해를 구할 수 있다.

V. 실험 결과 및 토의

고차 스펙트럼은 이미 언급한 바와 같이 여러 가지 바람직한 특성을 갖고 있다. 그러나 고차 스펙트럼을 실제로 적용하는 데는 많은 어려움이 있고 그 이유들은 다음과 같다.

첫째, 고차 스펙트럼을 결정하는 데는 평균 연산과 다수의 표본이 필요하다. 그러나 대부분의 경우에 있어서 매우 제한된 수의 표본만을 이용할 수 있다. 둘째, N 개의 표본 신호의 바이스펙트럼은 $N \times N$ 개의 표본을 갖기 때문에 계산과정이 매우 복잡하다.

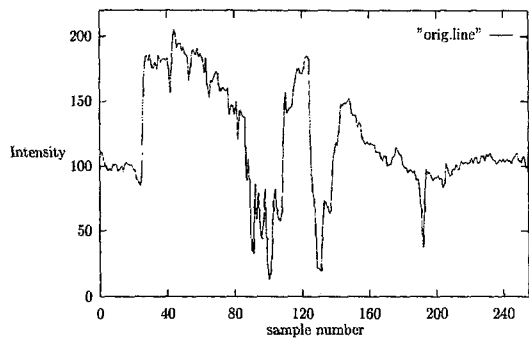


그림 1. 원 신호(256개)
Fig. 1. Original signal (256pts).

이러한 문제점에 대해서 단 두개의 바이스펙트럼 대각선을 써서 신호와 같은 차원의 바이스펙트럼을 구할 수 있고, 선택된 두 직선이 잡음에 의해 영향을 가장

적게 받는다는 사실을 보인다. 원 신호의 참 바이스펙트럼을 복원하기 위해 앞에서 제안한 일반화된 가중 정규화 접근을 대각 표본 삼중 상관관계에 적용했다. 일반화된 가중 정규화 접근을 적용함으로써 삼중 상관관계영역에서 왜곡된 신호에 종속적인 잡음을 제거할 수 있고 단 하나의 표본으로부터 정확하게 참 바이스펙트럼을 추정할 수 있음을 보였다.

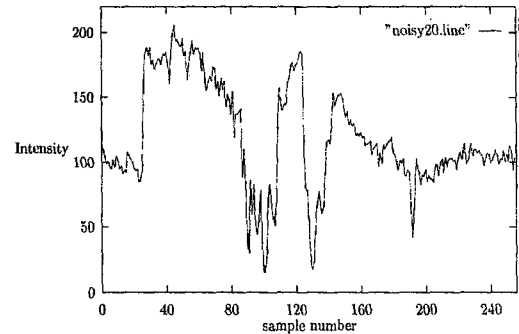


그림 2. 잡음 낀 신호(20dB SNR)
Fig. 2. Noisy signal(20dB SNR).

제안된 일반화된 가중 정규화 알고리즘의 우수성을 보이기 위해 참 바이스펙트럼의 평균 연산자를 유한개의 표본들의 평균으로 대체한다. 신호에서 임의로 추출한 직선을 나타내는 256개의 표본 신호(그림 1)는 잡음에 의해 저하되어 SNR이 20dB이다(그림 2).

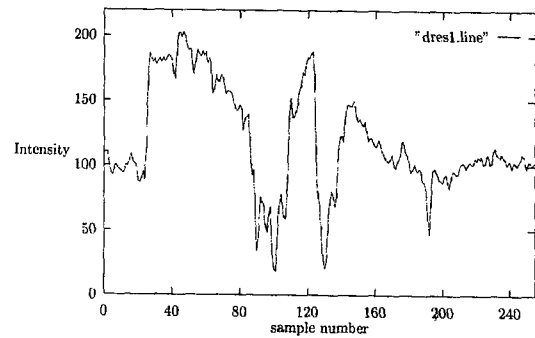


그림 3. 제안된 바이스펙트럼 필터에 의해 복원된 잡음 낀 신호 : 1개의 표본(반복횟수=100)
Fig. 3. Restored noisy signal by the proposed bispectral filter : with 1 realization(iteration number=100).

1개의 잡음에 의해 저하된 표본을 제안된 알고리즘과 표본 바이스펙트럼으로 복원한 결과가 그림 3과 그

림 4에 나타나 있다. 표본 바이스펙트럼으로 복원된 신호선은 잡음이 전혀 제거되어 있지 않음을 알 수 있다. 바이스펙트럼으로 부터 신호 선을 복원하기 위해서는 다수의 잡음 낀 표본을 이용하여 평균을 계산해야 한다는 사실을 보여주는 결과이다. 그러나 하나의 표본만이 주어졌기 때문에 신호 선으로부터 복원된 신호는 좋은 결과라고 할 수 없다(그림 4). 그러나 비록 하나의 표본만 이용했음지라도 제안된 알고리즘에 의해 복원된 신호 선은 매우 좋은 결과를 보여 주고 있다. 앞에서 이미 설명 했듯이 해석적인 가중 정규화를 적용하면 식 (6)에서 표본 바이스펙트럼의 왜곡된 잡음을 성공적으로 제거할 수 있다. 그림 5와 6은 각각 100개의 잡음 낀 신호 선이 이용 가능할 경우에 일반화된 가중 정규화 알고리즘에 의한 복원신호와 평균 연산자를 적용한 복원신호를 각각 보여주고 있다. 이들 둘에 의한 복원은 매우 좋은 결과를 보여준다. 그림 7은 제안된 알고리즘과 일반적인 평균 연산을 적용하여 복원된 신호와 이용 가능한 표본의 수 사이의 개선 관계이다. 제안된 알고리즘에 의해 복원된 신호가 50개의 잡음 신호 표본에 대한 평균 연산을 통한 복원 신호보다 우수하다는 것을 보여주고 있다. 또한, 1개의 표본만을 이용할 수 있을 경우에 제안된 알고리즘에 의해 얻어진 결과가 개선도 면에 있어서 20개의 표본이 이용 가능할 경우의 종래의 알고리즘과 일치한다는 사실도 알 수 있다. 그림 7로부터 많은 실제 상황에서 유한 개의 표본만을 이용할 수 있기 때문에(예를 들어 1개에서 10개) 일반화된 가중 정규화 알고리즘이 참 바이스펙트럼을 추정하는 데 있어 평균 연산자를 대신 할 수 있음을 알 수 있다.

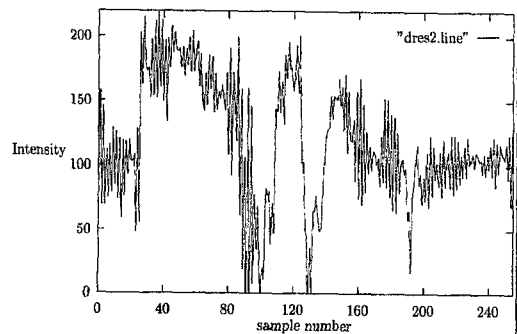


그림 4. 종래의 바이스펙트럼 필터에 의해 복원된 잡음 낀 신호 : 1개의 표본
Fig. 4. Restored noisy signal by the conventional bispectral filter : with 1 realization.

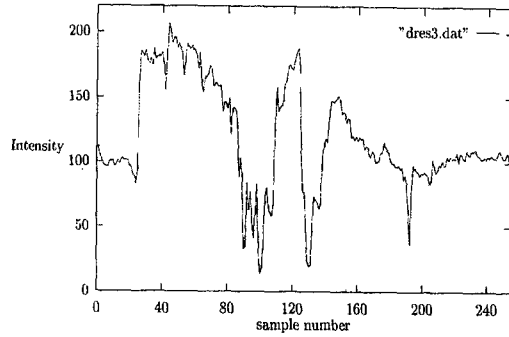


그림 5. 제안된 바이스펙트럼 필터에 의해 복원된 잡음 낀 신호 : 100개의 표본(반복횟수 = 100)
Fig. 5. Restored noisy signal by the proposed bispectral filter : with 100 realization. (iteration number = 100)

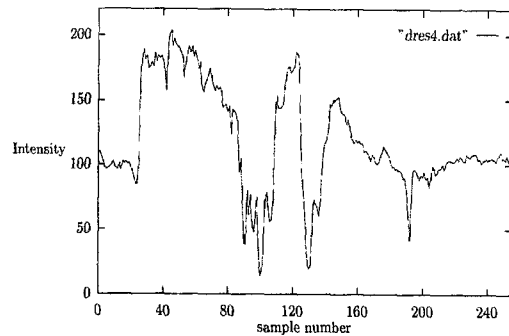


그림 6. 종래의 바이스펙트럼 필터에 의해 복원된 잡음 낀 신호 : 100개의 표본
Fig. 6. Restored noisy signal by the conventional bispectral filter : with 100 realizations.

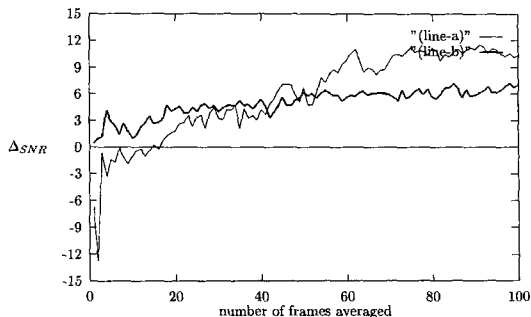


그림 7. ΔSNR 대 평균화된 프레임수(20dB 잡음신호) : (a선) 가중 정규화 없이, (b선) 가중 정규화에 의해
Fig. 7. ΔSNR vs. # of frames averaged (20dB noisy case): (line-a) without weighted regularization, (line-b) with weighted regularization.

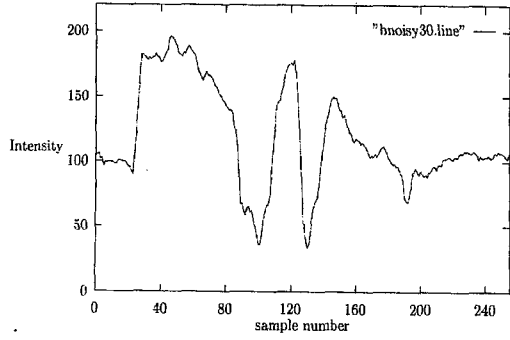


그림 8. 잡음이 끼고 변진 신호(30dB SNR과 5화소 변짐)

Fig. 8. Noisy blurred signal (30dB SNR and 5pts blur).

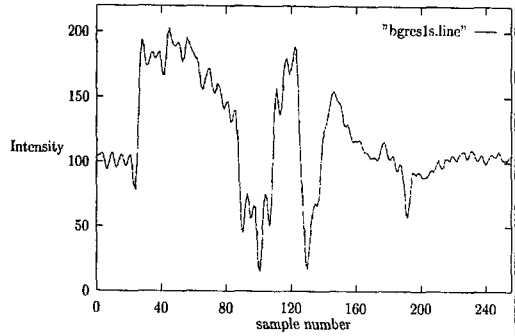


그림 9. 제안된 필터에 의해 복원된 신호 : 1개의 표본 (반복횟수=100)

Fig. 9. Restored signal by the proposed filter : with 1 realization (iteration number = 100).

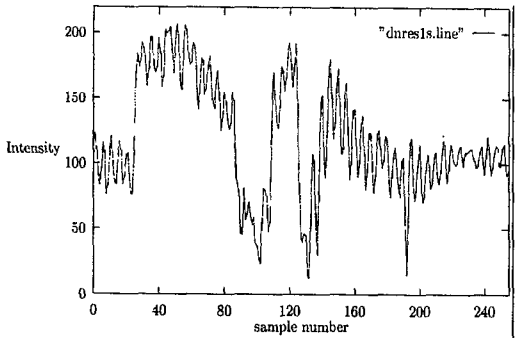


그림 10. 종래의 LS 역필터에 의해 복원된 신호 : 1개의 표본

Fig. 10. Restored signal by conventional LS inverse filter : with 1 realization.

다음 실험은 잡음이 섞이고 움직임 변짐이 일어난 영상의 복원에 대한 것이다. 그림 1에서와 같은 신호에 $SNR=30dB$ 의 잡음과 5화소 이상의 움직임 변짐을 만

들었다. 이전 절에서 기술했듯이, 삼중상관관계 영역에서 복원이 이루어지고, 복원된 삼중상관관계로부터 영상 선을 복원한다. 잡음이 끼고 움직임 변짐이 있는 영상 선의 표본에서, 가중 정규화 알고리즘에 의해 복원된 영상 선은 그림 9에 나타나 있다. 아래에 정의된 삼중상관관계 영역(혹은 바이스펙트럼 영역)에서 일반화된 제곱 역 필터에 의해 복원된 영상 선은 그림 10에서 보여진다.

$$B_x(k_1, k_2) = \frac{D^*(k_1)D^*(k_2)D(k_1, k_2)B_y(k_1, k_2)}{|D(k_1)D(k_2)D^*(k_1, k_2)|^2}$$

for $D(k_1)D(k_2)D^*(k_1+k_2) \neq 0$,

$$B_x(k_1, k_2) = 0$$

for $D(k_1)D(k_2)D^*(k_1+k_2) = 0$ (34)

이용할 수 있는 하나의 표본에서 잡음만 낀 경우보다 움직임 변짐 까지 있는 경우 제안된 일반화된 가중 정규화 알고리즘이 종래의 접근 방법보다 우수하다는 점이 더 명확하게 나타난다. 이용 가능한 표본이 3개일 경우, 두 가지 방법으로 복원된 영상 선들은 그림 11과 12에 각각 나타나 있다.

예상대로 평균 연산을 하기 위해 충분히 많은 수의 잡음과 움직임 변짐이 있는 영상 100개의 표본으로부터 두 가지 방법에 의해 복원된 영상들은 매우 좋은 결과를 보여주고 있다(그림 13, 그림 14). 그림 15는 위에서 언급된 두 가지 방법에 의해 복원된 영상 선들의 SNR 개선도와 이용 가능한 신호의 수 사이의 관계를 보여 준다. 또한, 이 그림은 일반화된 가중 정규화가 평균 연산을 위해 필요한 대략 50개 정도까지의 움직임

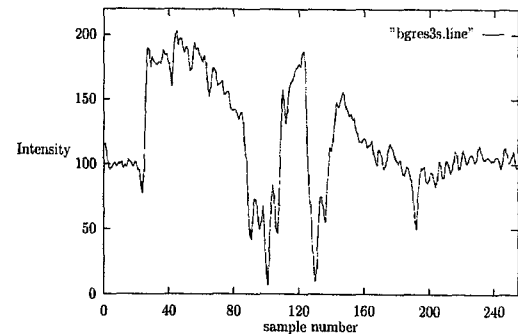


그림 11. 제안된 필터에 의해 복원된 신호 : 3

Fig. 11. Restored signal by conventional LS inverse filter : with 1 realization.

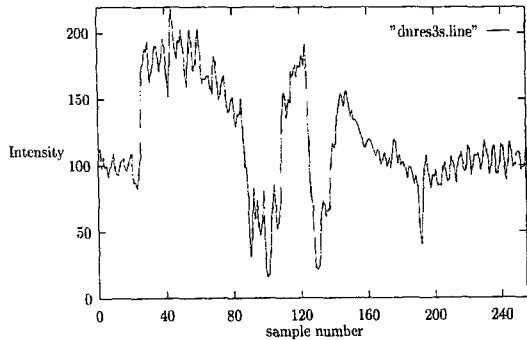


그림 12. 종래의 LS 역필터에 의해 복원된 신호 : 3개의 표본
Fig. 12. Restored signal by conventional LS inverse

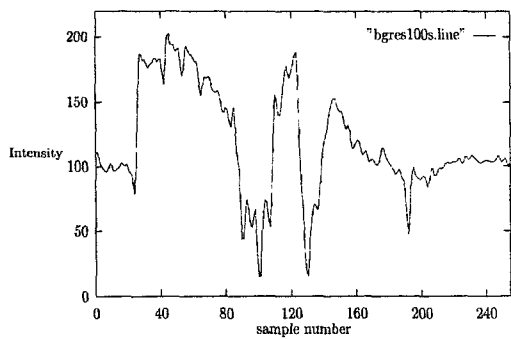


그림 13. 제안된 필터에 의해 복원된 신호 : 100개의 표본(반복횟수 = 100)
Fig. 13. Restored signal by the proposed filter : with 100 realizations(iteration number =100).

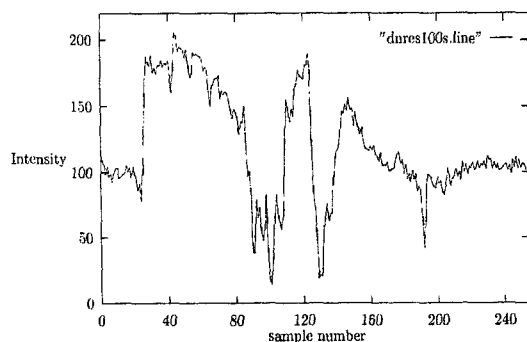


그림 14. 종래의 LS 역필터에 의해 복원된 신호 : 100개의 표본
Fig. 14. Restored signal by conventional LS inverse filter : with 100 realizations.

번짐과 잡음이 낀 표본들을 대신하여 사용될 수 있음을 보여주고 있다.

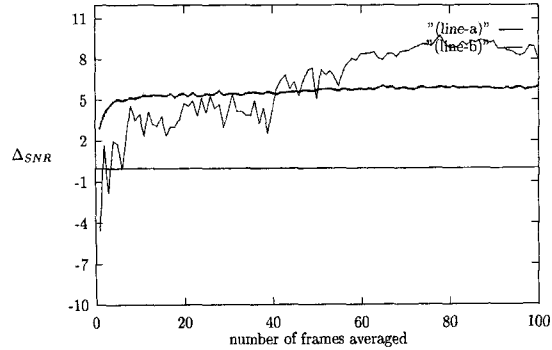


그림 15. ΔSMR 대 평균화된 프레임 수(30dB 번짐의 경우) : (a선) 가중 정규화에 의해, (b선) 가중 정규화 없이
Fig. 15. ΔSMR vs. # of frames averaged(blurred 30dB case) : (line-a) with weighted regularization, (line-b) without weighted regularization.

VI. 결론

바이스펙트럼(bispectrum)은 가우시안 잡음에 민감하지 않고 원 영상의 위상 정보를 가지는 특성을 갖고 있으므로 영상 복원, 움직임 추정 및 보상, 그리고 번짐 정도 추정 등의 문제들을 해결하는 데 매우 유용하다. 바이스펙트럼을 신호 처리 및 영상 복원에 적용하는데 있어서 가장 문제가 되는 것은 평균 연산이다. 평균 연산을 바이스펙트럼의 특성을 분석, 일반화된 가중 정규화 이론을 적용하여 확실적인 방법으로 평균을 구하지 않고, 참 바이스펙트럼을 구할 수 있었다. 또한, 번짐과 잡음이 낀 조건에서 바이스펙트럼을 추정하여 이 결과가 신호의 복원에 유용하다는 것을 알 수 있었다. 제안된 일반화된 가중 정규화 알고리즘을 기존의 접근법과 비교하여 제안된 방법이 우수함을 실험을 통해 확인할 수 있었다.

참고 문헌

- [1] H. O. Bartelt, A. W. Lohmann and B. Wirmitzer, "Phase and amplitude recovery from bispectra," Applied Optics, vol. 23, pp. 3121-3129, Sept. 1984.
- [2] G. B. Giannakis and J. M. Mendel, "Identification of nonminimum phase systems using higher order statistics," IEEE Trans.

- Acoust. Speech, Signal Processing, vol. 37, No. 3, pp. 360-377, March 1989.
- [3] G. B. Giannakis and A. Swami, "On estimating noncausal nonminimum phase ARMA models of non-Gaussian process," IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing vol. 38, No. 3, pp. 478-495, March 1990.
- [4] M. G. Kang, K. T. Lay and A. K. Katsaggelos, "Phase estimation using the bispectrum and its application to image restoration," Optical Engineering, Vol. 30, No. 7, pp. 976-985, July, 1991.
- [5] M. G. Kang, K. T. Lay and A. K. Katsaggelos, "Image restoration algorithms based on the bispectrum", Proc. Visual Communication and Image Processing Conference, pp. 408-418, Boston, MA, Nov. 1991.
- [6] K. S. Lii and M. Rosenblatt, "Deconvolution and estimation of transfer function phase and coefficients for non-Gaussian linear processes," Ann. Statistics, vol. 10, pp. 1195-1208, 1982.
- [7] A. W. Lohmann and B. Wirtzner, "Triple correlations," Proc. IEEE, vol. 72, No. 7, pp. 889-901, July 1984.
- [8] C. L. Nikias, "ARMA bispectrum approach to nonminimum phase system identification," IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, vol. 36, No. 4, pp. 513-524, April 1988.
- [9] R. Pan and C. L. Nikias, "The complex cepstrum of higher order cumulants and nonminimum phase system identification," IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, vol. 36, No. 2, pp. 186-205, Feb. 1988.
- [10] G. Sundaramoorthy, M. R. Raghuvver and S. A. Dianat, "Bispectral reconstruction of signals in noise: amplitude reconstruction issues," IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, vol. 38, No. 7, pp. 1297-1306, July 1990.
- [11] A. Swami, G. B. Giannakis and J. M. Mendel, "Linear modeling of multidimensional non-Gaussian processes using cumulants," Multidimensional Systems and Signal Processing, vol. 1, pp. 11-37, 1990.
- [12] M. G. Kang and A. K. Katsaggelos, "General choice of the regularization functional in regularized image restoration", IEEE Trans. Image Processing, vol. 4, No. 5, pp. 594-602, May 1995.
- [13] J. A. Goyette, Moon Gi Kang and A. K. Katsaggelos, "A spatially adaptive image restoration for autoradiography," SPIE Optical Engineering Midwest Conference, Chicago, IL, July, 1995.
- [14] M. G. Kang, Adaptive Iterative Image Restoration algorithms, Ph.D. Thesis, Northwestern University, Feb. 1994.
- [15] M. G. Kang and A. K. Katsaggelos, "Regularized iterative image restoration based on an iteratively updated convex smoothing functional," Proc. 1993 SPIE Conf. on Visual Communications and Image Processing, pp. 1364-1375, Boston, MA, Nov. 1993.
- [16] M. G. Kang, "Generalized multichannel deconvolution approach and its applications", SPIE Optical Engineering, vol. 37, no. 11, pp. 2953-2964, Nov. 1998.
- [17] A. K. Katsaggelos and Moon Gi Kang, "A spatially adaptive iterative algorithm for the restoration of astronomical images", The International Journal of Imaging Systems & Technology, vol. 6, No. 4, pp. 305-313, Dec. 1995

저자 소개



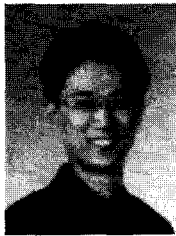
林元培(正會員)

1973년 4월 4일생. 1999년 2월 연세대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1999년 3월~현재 연세대학교 대학원 전기·컴퓨터공학과 석사과정
주관심분야는 영상처리(영상복원, 초고해상도 영상복원), 신호처리



許峯壽(正會員)

1974년 3월 15일생. 1999년 2월 연세대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1999년 3월~현재 연세대학교 대학원 전기·컴퓨터공학과 석사과정
주관심분야는 영상처리, 신호처리



李學成(正會員)

1972년 5월 31일생. 1998년 8월 연세대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1998년 9월~현재 연세대학교 대학원 전기·컴퓨터 공학과 석사과정
주관심분야는 영상처리, 신호처리



姜文基(正會員)

1963년 9월 6일생. 1986년 2월 서울대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1988년 2월 서울대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학 석사). 1994년 2월 Northwestern University 졸업(공학 박사). 1994년 3월~1994년 10월 Northwestern University Research Fellow. 1994년 11월~1997년 2월 University of Minnesota, Duluth 조교수. 1997년 3월~1999년 2월 연세대학교 전자공학과 조교수. 1999년 3월~현재 연세대학교 전기·컴퓨터 공학과 부교수
주관심분야는 영상복원, 초고해상도 영상복원, 디지털 비디오 처리