

볼록 이차 광원으로부터 완전음영부를 생성하는 알고리즘

(An Algorithm for Generating the Umbra from a Convex Quadric Light Source)

유 관 희 [†] 신 성 용 ^{**}
(Kwan-Hee Yoo) (Sung Yong Shin)

요 약 3차원 공간상에서 볼록 영역 광원이 주어진 물체를 비추면 각 객체에 대해 두 가지 유형의 그림자 볼륨, 즉 주어진 객체에 의해 부분적으로 가려지는 그림자볼륨과 완전히 가려지는 그림자 볼륨이 생성된다. 이를 각각 반음영부(penumbra)와 완전음영부(umbra)라 한다. 본 논문에서는 원, 타원, 구, 타원체, 실린더 등과 같은 볼록 이차 광원으로부터 볼록 다각형의 완전음영부를 구하는 문제를 고려한다. 먼저 완전음영부의 경계 표면을 특성화하고, 이를 이용하여 완전음영부를 구하는 알고리즘을 제시한다.

Abstract An area light source in the three dimensional space shines past a scene polygon, to generate two types of shadow volumes for each scene polygon, i.e., one with partial occlusion and the other with the complete occlusion. These are called, penumbra and umbra, respectively. In this paper, consider the problem for computing the umbra of a convex polygon from convex quadric light sources such as circles, ellipses, spheres, ellipsoids and cylinders. First, we give characteristics of the boundary surfaces of the umbra and then propose an algorithm for generating the umbra using them.

1. 서 론

주어진 3차원 공간상에 기하 객체에 광원이 빛을 비추면, 기하 객체가 광원으로부터 오는 빛을 막아 그림자가 생긴다. 만약 광원이 점 광원이면 한 유형의 그림자 볼륨(shadow volume)이 생성되지만 광원이 점이 아니라 영역을 가지는 광원이라면, 각 객체에 대해 두 가지 유형의 그림자 볼륨이 생긴다(그림 1 참조)[1-4]. 이들 그림자 볼륨은 객체에 의해 가려 광원의 어느 부분도 볼 수 없는 그림자 볼륨(이를 완전음영부(umbra)라 함)과 광원의 일부를 볼 수 있는 그림자 볼륨(이를 반음영부(penumbra)라 함)으로 나타난다(그림 1).

컴퓨터 그래픽스에서 이들 그림자 볼륨은 주어진 시점으로부터 보이는 객체에 도달하는 빛의 양을 계산하

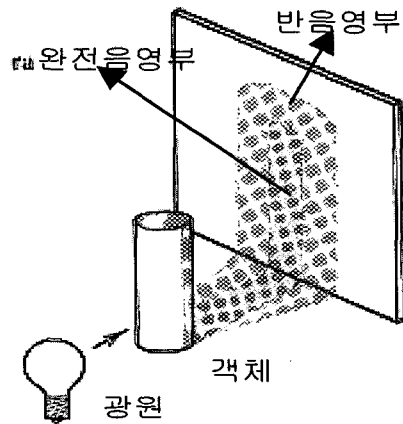


그림 1 광원으로부터 객체에 대한 반음영부와 완전음영부

여 그림을 그리는 렌더링(rendering) 분야에서 아주 기본적인 역할을 한다[1-4]. 영역을 가지는 광원이 주어

[†] 종신회원 : 충북대학교 컴퓨터교육과 교수
khyoo@cgs.chungbuk.ac.kr

^{**} 정 회 원 : 한국과학기술원 전산학과 교수
syshin@jupiter.kaist.ac.kr

논문접수 : 1999년 9월 14일

심사완료 : 2000년 4월 6일

져 있을 때, 주어진 시점으로부터 보이는 점에 도달하는 직접적인 빛의 양(intensity)을 계산하기 위해 그 점으로부터 보이는 광원의 부분을 계산해야 한다. 이러한 계산은 컴퓨터 그래픽스에서 영상을 생성하기 위해 아주 많은 시간이 요구된다. 따라서 미리 생성된 그림자 볼륨을 이용할 경우, 완전음영부에 있는 점은 광원으로부터 보이지 않으므로 미리 이 점이 완전음영부에 포함되는지를 알고 있다면, 이 점에서의 빛의 양을 불필요하게 매번 계산할 필요가 없다. 또한, 라디오시티(radiosity) 분야에서 질 좋은 영상을 생성하기 위해 객체를 일정한 크기의 영역(이를 patch라 함)으로 나누어, 이들 모든 patch간에 교환되는 빛의 양을 계산한다. 이때 생성될 영상의 질을 향상 시키기 위해 가장 중요한 것 중의 하나가 어떤 형태로 patch를 나누어야 할 것인가인데, discontinuity meshing 기법에서는 빛의 양의 변화가 일어나는 그림자 볼륨의 경계를 이용하여 patch를 만들었다. 따라서 효율적으로 완전음영부를 구하면 이 경계를 직접적으로 discontinuity meshing에 이용할 수 있다 [1,3,4].

일반적으로 3차원 공간상에 광원인 형광등과 전구를 생각해 보자. 이들 광원은 곡선(curve) 유형의 형상으로 되어 있다. 만약 이들 광원을 곡선 유형의 광원 그 자체로 모형화할 수만 있다면 생성된 영상의 질이 매우 높을 뿐만 아니라 근사 광원으로부터 발생하는 aliasing 문제를 최대한 줄일 수 있다. 더욱이 곡선 유형의 광원이 근사 광원보다 더 적은 기억 장소로 표현될 수 있으므로 곡선 유형의 광원으로부터 그림자 볼륨이 좀더 효율적으로 생성될 수 있을 것이다. 이러한 사실로부터 곡선 유형의 광원으로부터 그림자를 생성할 수만 있다면 렌더링 분야에 효율성을 증대시킬 수 있음을 알 수 있다.

지금까지 그림자 볼륨을 효율적으로 구하기 위한 많은 연구가 있어 왔다[1,4,5,6,7]. 그러나 이전 대부분의 연구에서는 광원을 다각형/다면체로 근사 시키거나 혹은 영역 추출을 통하여 그림자 볼륨을 구하였다. 특히, Nishita와 Nakamae[5]는 평행 실린더 광원을 사면체로 처리하여 그림자 볼륨을 구하였고, Bao 등[6]은 곡선 광원을 B-spline 곡선의 조각으로 근사시켜 그림자 볼륨을 구하였다. Heflin과 Elber[7]는 Free Form Surface로부터 주어진 객체에 대한 그림자 볼륨의 특성을 분석하고 이들 볼륨을 생성하는 방법을 제시하였다.

본 논문에서는 3차원 공간상의 광원을 원, 타원, 구, 타원체, 실린더 등과 같은 볼록 이차 표면(convex quadric surface)으로 모형화한다. 지금부터 볼록 이차

표면으로 모형화된 광원을 볼록 이차 광원(convex quadric light source)이라 부르겠다. 주어진 광원이 다른 형상을 가지고 있을 경우, 이전 연구와 유사하게 광원을 볼록 이차 광원으로 근사시켜 처리할 수 있다. 볼록 이차 광원으로부터 그림자 볼륨, 즉 반음영부와 완전음영부는 Yoo[4]에 의해 제시되었다(그림 2참조). 본 논문에서는 볼록 이차 광원으로부터 생성될 이들 두 유형의 그림자 볼륨 중 완전음영부를 구하는 알고리즘을 제시한다. 완전음영부를 효율적으로 구하기 위해 먼저 완전음영부의 경계를 포함하는 평면의 특성을 파악한 후, 이들 평면의 특성을 이용하여 완전음영부를 구하는 알고리즘을 개발할 것이다.

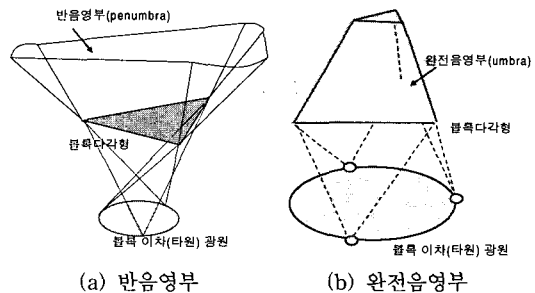


그림 2 볼록 이차 광원(타원)으로부터 그림자 볼륨

본 논문의 제 2장에서는 볼록 이차 광원으로부터 객체에 대한 완전음영부의 특성을 분석한 후, 완전음영부를 구하는 알고리즘을 제 3장에서 소개한다. 마지막으로 결론에서는 본 논문의 결과를 요약하고 구해진 완전음영부가 렌더링 분야에 어떻게 적용될 것인지를 논의한다.

2. 완전음영부의 경계 평면 특성

볼록 이차 광원 S 가 주어진 볼록 다각형 객체 P 를 비출 때, P 에 가려 광원이 전혀 보이지 않는 그림자 볼륨을 생성할 수도 있다. 이러한 그림자 볼륨을 S 로부터 P 의 완전음영부(umbra)라 하고, 이를 $UM(S,P)$ 로 표기한다. 본 논문에서는 일반성을 잃지 않는 범위에서 다음과 같은 두 가지 조건을 만족한다고 가정한다.

- (1) S 가 원 혹은 타원일 경우, S 와 P 가 같은 평면상에 존재하지 않는다.
- (2) P 를 포함하는 평면이 S 를 교차하지 않는다고 가정한다.

만약 S 와 P 가 같은 평면상에 놓여 있다면 S 를 함유

하는 평면이 P를 포함하고, 또한 P를 함유하는 평면이 S를 포함한다. 이러한 경우 $UM(S,P)$ 를 구하는 문제는 2차원 상에서 $UM(S,P)$ 를 구하는 문제이다. 이것은 P와 S를 접하는 두 직선을 구하는 문제로 P의 각 정점을 이용하면 선형 시간에 처리할 수 있다(그림 3의 (a)). 다음으로 P를 포함하는 평면이 S를 교차하는 경우로 이 경우는 3차원 공간상의 임의의 점에서 블록 이차 광원 S의 일부분을 볼 수가 있어 $UM(S,P)$ 가 존재하지 않는다(그림 3의 (b)).

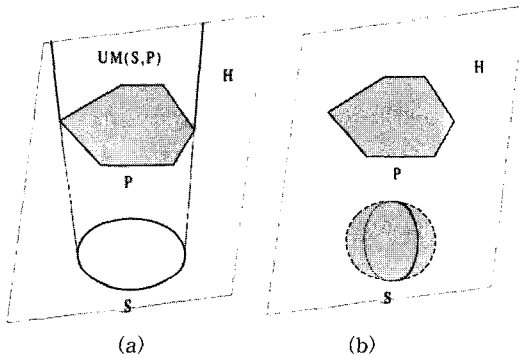


그림 3 특정한 경우의 $UM(S,P)$

블록 다각형 광원으로부터 P의 완전음영부를 구하기 위해 Campbell[1]은 먼저 완전음영부의 경계 평면을 특성화하였다. 더욱이 그는 완전음영부가 이들 평면 각각에 대해 다각형 P를 포함하는 반공간의 교차영역임을 보였다. Campbell은 경계 평면이 두 가지 유형, 즉 P를 포함하는 평면과 P의 변과 S의 정점을 포함하는 평면으로 구성되어 있음을 보였다. 특히, 그는 P의 변 e를 함유하는 완전음영부의 경계 평면은 e와 S의 각 정점을 통과하는 평면들 중 S를 포함하는 평면과의 사이각이 가장 크다는 것을 증명하였다.

블록 이차 광원 S에 대해서도 유사하게, 먼저 S로부터 다각형 P의 완전음영부 $UM(S,P)$ 의 경계 평면의 특성을 분석한 후, 이들 경계 평면을 이용하여 $UM(S,P)$ 를 구한다. 우리는 블록 다각형 광원에 대한 완전음영부의 경계 평면의 특성처럼 블록 이차 광원에 대해서도 $UM(S,P)$ 의 경계 평면은 P를 포함하는 평면(이를 유형 A 평면이라 함)과, P의 변을 포함하고 S에 접하는 평면(이를 유형 B 평면이라 함)으로 구성됨을 증명할 수 있었고, 특히 유형 B 평면에 의해 정의되는 두 반공간 중 하나의 반공간에 P와 S가 모두 속함을 증명할 수 있었다. 마지막으로 완전음영부 $UM(S,P)$ 가 이들 경계 평면

에 대해 P를 포함하는 모든 반공간(half-space)의 교차 영역과 같음을 알 수 있었다.

지금부터 위의 사실을 증명해 보자. 먼저 우리는 유형 A 평면을 분석한다.

소정리 1: P를 포함하는 평면 H가 블록 이차 광원 S를 교차하지 않으면, H는 $UM(S,P)$ 의 경계 평면이다.

(증명) P를 포함하는 평면을 H라 하자. 그러면 S가 H와 교차하지 않기 때문에 S는 H에 의해 정의된 두 반공간중 하나에 속함은 분명한 사실이다. 그 반공간을 H^+ 라 하자. H를 포함하지 않은 H^+ 내의 한 점 p에 대해, p와 S의 볼록껍(convex hull) $CH(p,S)$ 는 P와 교차하지 않는다. P에 속하는 한 점 q를 취한다. P에 속하는 q에서 아주 가까운 인접 영역, 즉 q를 중심으로 하고 반지름이 e인 구를 $Ne(q)$ 라 하자. 여기서 e는 아주 작은 양의 실수이다. 우리는 항상 $Ne(q)$ 안의 어떤 점이 P에 의해 S가 보이지 않도록 완전히 가려지는 e를 항상 선택할 수 있다. 그러므로 H는 $UM(S,P)$ 의 경계 평면이다. <증명 끝>

다음으로 $UM(S,P)$ 의 유형 B 평면을 특성화해 보자. P의 변(edge) $e(v_i, v_{i+1})$ 를 고려하자. 변 $e(v_i, v_{i+1})$ 를 함유하는 선이 S와 교차하지 않는다고 가정하면 S가 블록 이차 광원이므로 분명히 $e(v_i, v_{i+1})$ 를 포함하면서 S에 접하는 평면은 두 개 존재한다[1,4]. 이 두 평면중 한 평면은 S와 P를 같은 반 공간상에 놓이게 하고, 다른 한 평면은 S와 P를 서로 다른 반공간 상에 놓이게 한다. 이제 S와 P를 같은 반공간 상에 놓이게 하는 평면을 H라 하자. 그러면 다음과 같은 소정리가 성립함을 알 수 있다.

소정리 2: P의 한 변을 포함하고 S에 접하는 두 평면 각각에 의해 결정된 반공간에 대해 P와 S를 같은 하나의 반공간에 포함하도록 하는 평면을 H라 하자. 그러면 H는 $UM(S,P)$ 의 유형 B 경계 평면이다.

(증명) 일반성을 잃지 않고, H가 P의 변 e를 함유하고 S를 u에서 접한다라고 가정하자. H에 의해 정의된 반공간을 H^+ 와 H^- 라 할 때, H^+ 에 S와 P가 모두 포함된다고 가정하자. 먼저 H를 포함하지 않은 H^- 에 속하는 한 점 p를 고려하자. p와 u를 연결하는 선분이 H^- 에 포함되므로, p에서 출발하여 u를 통과하는 광선 $r(p, up)$ 은 P와 교차하지 않는다. 즉 p와 S의 가시성은 P에 의해 가려지지 않는다(그림 4 참조).

다음으로 H를 포함하지 않은 H^- 에 속하는 한 점을 고려한다. P를 함유하는 평면을 H_p 라 하자. 분명 가정

에 의해 H_p 는 H 와 같지 않다. H_p^* 를 H_p 에 의해 정의된 S 를 함유하지 않는 반공간이라 하면, H^* 와 H_p^* 의 교차영역 I 는 항상 존재한다. 변 e 상에 존재하는 한 점 q 에 대해, $Nes(q)$ 를 q 에서 아주 가까운 인접 영역, 즉 q 를 중심으로 하고 반지름이 es 인 구라 하자. 여기서 es 는 아주 작은 양의 실수이다. 그러면 우리는 항상 $Nes(q)$ 안의 어떤 점이 P 에 의해서 S 가 보이지 않도록 완전히 가려지는 es 를 항상 선택할 수 있다(그림 4 참조). 따라서 H 는 $UM(S,P)$ 의 경계 평면이다.<증명 끝>

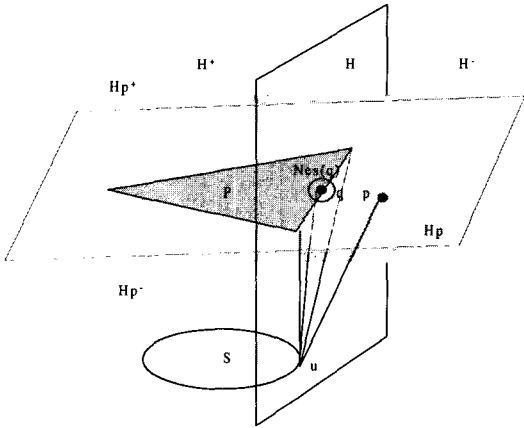


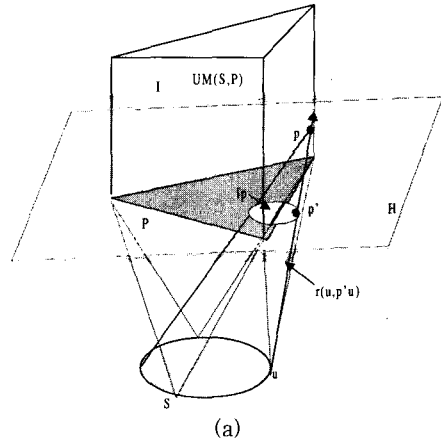
그림 4 소정리 2의 설명

이들 유형 A와 B 평면을 사용하여, $UM(S,P)$ 를 다음과 같이 직접적으로 얻을 수 있다.

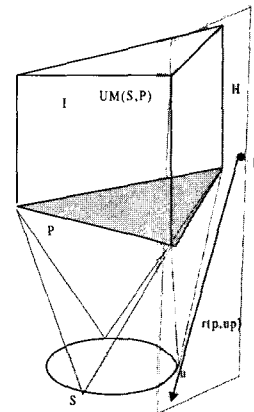
정리 1: 볼록 다각형 P 에 대해 볼록 이차 광원 S 로부터 완전음영부 $UM(S,P)$ 는 소정리 1에 의해 정의된 유형 A 경계평면과 소정리 2에 의해 결정된 유형 B의 경계 평면들에 의해 결정된 P 를 포함하는 반공간들의 교차 영역이다.

(증명) 유형 A와 유형 B 평면에 의해 결정된 P 를 포함하는 모든 반공간의 교차 영역을 I 라 하자. 먼저 I 에 속하는 임의의 점 p 가 $UM(S,P)$ 에 속함을 증명한다. 모순에 의해 이를 증명해 보자. 즉, p 가 완전음영부 $UM(S,P)$ 에 속하지 않는다고 가정하자. 정의에 의해 p 로부터 보이는 S 가 분명 존재한다. 다시 말해 p 와 S 의 볼록 쉘(convex hull) $CH(p,S)$ 와 유형 A 평면의 교차영역 I_p 는 분명 볼록 다각형 P 에 완전히 포함되지 않는다. 이 때, I_p 와 P 가 모두 볼록하므로 P 에 포함되지 않은 I_p 상의 경계점 p' 이 존재함을 알 수 있다. 그러므로 p' 과 S 를 서로 다른 반공간 상에 놓이게 하는 P 의 경계인 변(edge) e 가 존재한다. 완전음영부가 존재하므로 소

정리 2에 의해 P 의 변 e 를 포함하고 S 상의 점 u 를 포함하는 유형 B 평면이 존재한다. u 에서 p' 를 향하는 반직선을 $r(u, p'u)$ 라 하면, 소정리 2에 의해 유형 B 평면에 의해 정의된 서로 다른 반공간에 각각 P 와 $r(u, p'u)$ 이 속함을 알 수 있다(그림 5(a)참조). 그러므로 $r(u, p'u)$ 가 I 에 속하지 않는다. p 가 $r(u, p'u)$ 상에 존재하므로 p 도 역시 I 에 속하지 않는다. 이것은 위의 가정에 모순이다. 따라서 I 에 속하는 임의의 점은 $UM(S,P)$ 에 속한다.



(a)



(b)

그림 5 정리 1의 설명

역으로 $UM(S,P)$ 안에 모든 점이 I 에 속함을 보이기 위해, I 에 속하지 않은 점 p 를 취한다. 정의에 의해 분명 P 와 p 를 서로 다른 반공간에 놓이게 하는 $UM(S,P)$ 의 경계 평면 H 가 존재한다. H 가 점 u 에서 S 를 접한다고 가정해 보자. 그러면, p 와 u 를 연결하는 선분이 P 를

교차하지 않을 뿐만 아니라 $r(p, up)$ 도 I 를 교차하지 않는다. 그러므로 S 의 부분 영역 Se 가 존재하여 p 와 Se 를 함유하는 선분이 P 와 교차하지 않는다. 다시 말해 p 와 S 의 가시성은 P 에 의해 완전히 가려지지 않는다. 따라서 p 는 $UM(S,P)$ 에 속하지 않는다. (그림 5(b) 참조). <증명 끝>

3. 완전음영부를 구하는 알고리즘

지금부터 n 개의 변으로 구성된 블록 다각형 P 에 대해 원, 타원, 구, 타원체, 실린더 등과 같은 블록 이차 광원 S 로부터 생성될 완전음영부 $UM(S,P)$ 를 구하는 알고리즘을 설계해 보자. 먼저 P 를 포함하는 평면 H 가 S 를 포함하는지 혹은 S 와 교차하는지를 점검한다. 제 2장에서 언급한 바와 같이 H 가 S 를 포함하면 $UM(S,P)$ 를 구하는 문제는 2차원에서 문제로 간단히 처리될 수 있고, H 가 S 와 교차하면 $UM(S,P)$ 가 존재하지 않음을 알 수 있다. H 와 S 가 서로 교차하지 않은 경우, $UM(S,P)$ 를 구하기 위해 먼저 제 2장에서 기술된 바와 같이 유형 A의 평면을 구하고(소정리 1), P 의 각 변을 포함하고 S 에 접하는 유형 B의 평면들을 구한다(소정리 2). 분명히 P 를 포함하는 평면은 한 개일 것이고, 즉 유형 A 평면은 한 개이고, P 가 n 개의 변으로 구성되어 있기 때문에 유형 B 평면은 기껏해야 n 개임을 알 수 있다. 따라서 $UM(S,P)$ 의 경계 면을 포함하는 평면은 기껏해야 $n+1$ 개임을 알 수 있다. 구해진 $n+1$ 개의 평면을 이용하여 $UM(S,P)$ 를 구하기 위해 먼저 각각의 평면에 대해 P 를 포함하는 반공간의 교차영역이 완전음영부 $UM(S,P)$ 라는 정리 1을 이용한다.

정리 1로부터 가장 쉽게 완전음영부 $UM(S,P)$ 를 구하는 방법은 구해진 $n+1$ 개의 반공간에 대해 Preparata와 Muller[8]가 제안한 3차원 공간상에 $n+1$ 개의 반공간의 교차 영역을 구하는 알고리즘을 적용하는 것이다. 그러나 그들이 제안한 알고리즘의 시간 복잡도가 $O(n \log n)$ 이므로 완전음영부 $UM(S,P)$ 도 $O(n \log n)$ 시간에 구해질 수 있다.

완전음영부 $UM(S,P)$ 를 보다 효율적으로 구하기 위해 $UM(S,P)$ 의 경계 평면을 보다 자세히 관찰해 보자. 분명히 블록 다각형 P 가 순서화된 정점들의 목록으로 표현되므로, 완전음영부 $UM(S,P)$ 의 경계 평면들도 P 의 경계, 즉 변을 따라 순서화되어 있음을 관찰할 수 있다. 이러한 사실을 가지고 Aggarwal 등[9]이 제안한 결과를 어떻게 적용하여 완전음영부 $UM(S,P)$ 를 보다 더 효율적으로 구할 수 있는지를 관찰해 보자. 이를 위해 Aggarwal 등의 결과를 보다 자세히 들여다보자. 그들

은 아래의 조건을 만족하는 3차원 공간상에 k 개의 평면 H_1, H_2, \dots, H_k 의 각각에 대해 정의된 k 개의 반공간이 주어졌을 때, 이들 k 개의 반공간의 교차영역 R 을 선형 시간에 구하는 알고리즘을 제안하였다.

(조건) k 개의 평면, H_1, H_2, \dots, H_k 와 k 개의 변으로 구성된 블록 다각형 Q 가 주어졌다고 하자. 특히, k 개의 평면 각각이 블록 다각형 Q 의 변을 순서적으로 함유하고 있을 때, Q 를 안내 블록 다각형이라 하고, Q 를 함유하는 평면을 H 라 하자. H_1, H_2, \dots, H_k 각각에 대해 정의된 Q 를 포함하는 반공간들의 교차영역을 R 이라 할 때, 안내 블록 다각형 Q 그 자체가 H 와 R 의 교차영역이다.

위의 결과를 이용하여 완전음영부 $UM(S,P)$ 를 선형 시간에 어떻게 구하는지를 논의해 보자. 먼저 $UM(S,P)$ 의 유형 B 경계 평면에 의해 정의된 반공간의 교차 영역 R' 을 Aggarwal 등이 제시한 알고리즘을 적용하여 선형 시간에 구한다. 그리고 유형 A 평면에 의해 결정된 S 를 포함하지 않는 반공간에 속하는 R' 영역이 완전음영부 $UM(S,P)$ 이므로 이를 선형 시간에 구한다. R' 이 선형 시간에 구해질 수 있음을 보이기 위해 블록 다각형 P 를 Aggarwal 등이 제시한 안내 블록 다각형으로 놓자. $UM(S,P)$ 의 유형 B 경계 평면이 P 의 변을 포함하므로, 소정리 2에 의해 구해진 유형 B 평면들은 P 의 변을 따라 순서화될 수 있다. 더욱이 P 가 블록 다각형이므로, R' 은 완전음영부 $UM(S,P)$ 의 유형 B 평면에 의해 둘러 쌓여 있는 열린 볼록 볼륨(opened convex volume)임을 알 수 있다. 따라서 R' 과 안내 블록 다각형 P 를 포함하는 유형 A 평면과의 교차영역은 바로 안내 블록 다각형 P 이다. 그러므로 P 는 R' 를 계산하기 위한 미리 알려진 안내 블록 다각형의 성질을 만족한다. 따라서 Aggarwal 등[9]이 제시한 선형 시간 알고리즘을 적용하여 $UM(S,P)$ 의 유형 B의 경계 평면에 의해 결정된 P 를 포함하는 반공간의 교차영역 R' 을 선형 시간에 구할 수 있다.

지금까지 논의된 절차를 기술하면 다음과 같다.

PROCEDURE Umbra(S, P)

입력: n 개의 정점(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})로 구성된 블록 다각형 P 와 원, 타원, 구, 타원체, 실린더 등과 같은 블록 이차 광원 S

출력: S 로부터 P 의 완전음영부 $UM(S,P)$

Begin

(1) P 를 포함하는 평면 H 를 계산한다.

```

(2) if (H와 S가 교차하지 않음)
    H는 유형 A 평면이다.
else
(3) if (H가 S를 포함함)
(4) 2차원상의 UM(S,P)를 구한다.
else
    exit(); /* UM(S,P)가 존재하지 않음
endif
for i=0 to n-1 do
(5) P의 변 e(vi, vi+1)를 포함하고 S에 접하는 두 개의
    평면을 계산한다.
    계산된 두 평면을 H1과 H2라 하자.
(6) if (P와 S가 H1에 의해 정의된 같은 반공간상에
    존재한다)
        H1이 유형 B 평면이다;
    else
(7) if (P와 S가 H2에 의해 정의된 같은 반공간상에
    존재한다)
        H2이 유형 B 평면이다;
    endif
end {for}
(8) 유형 B 평면에 의해 결정된 P를 포함하는 반공간
    Hb+들을 구한다.
(9) 이들 반공간의 교차 영역 R'를 구한다.
(10) 유형 A 평면에 의해 결정된 S를 포함하지 않은 반
    공간 Ha-를 구한다.
(11) R'와 Ha-의 교차 영역, 즉 UM(S,P)를 구한다.
End
    
```

위의 알고리즘이 선행시간에 처리될 수 있는지를 분석하기 위해, 먼저 원, 타원, 구, 타원체, 실린더 등과 같은 볼록 이차 광원 S에 대한 방정식을 고려해 보자. 일 반성에 모순 없이 각 광원의 원점은 (0,0,0)이라고 가정 하고, 원, 타원과 같은 2차원 광원에 대해서는 S가 z=0 평면에 놓여 있다고 가정한다.

- S가 반지름이 k인 원인 경우,
 $x^2 + y^2 = k^2$;
- S가 타원인 경우,
 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$;
- S가 반지름 k인 구인 경우,
 $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$;
- S가 타원체인 경우,
 $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$;

- S가 실린더인 경우,
 $x^2 + y^2 = r^2, a \leq z \leq b$;

단계 (1)의 P를 포함하는 평면 H는 임의의 세 점 (v₀, v₁, v₂)을 이용하여 다음과 같이 두 벡터, (v₁ - v₀) 와 (v₂ - v₀)의 Cross Product에 의해 구할 수 있다.

$$H = (v_1 - v_0) \times (v_2 - v_0)$$

단계(1)에 의해 구해진 평면 H를

$$px + qy + rz = 1$$

이라 하자.

단계 (2)에서 요구되는 평면 H와 S의 교차 여부를 시험해 보자. 아래 그림과 같이 원점 (0,0,0)으로부터 가장 짧은 거리(이를 dH라 하자)에 있는 평면 H상의 점 으로 향하는 반직선과 광원 S와의 만나는 점(P_s)까지의 거리를 dS라 하자(그림 6). 먼저

$$dH = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

이다. S가 반지름이 k인 구라 하면,

$$dS = (\sqrt{p^2 + q^2 + r^2})(k^2 - (p^2 + q^2 + r^2))$$

이다. 구해진 값 dH와 dS를 이용하여 H와 S간의 교차 여부는 다음과 같이 이루어진다.

- dH가 dS보다 크면 H와 S는 교차하지 않는다.
- dH가 dS보다 작거나 같으면 H와 S는 서로 교차한다.

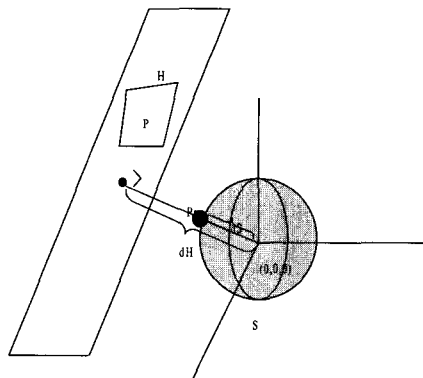


그림 6 H와 S와의 교차 여부 판별

H와 S가 서로 교차하지 않으면 P를 포함하는 평면

H가 소정리 1에 의해 유형 A 평면이다. 구 이외에 다른 블록 이차 광원에 대한 H와 S간의 교차 시첨도 유사한 방법으로 상수 시간에 처리될 수 있다. 따라서 단계 (1)과 (2)는 상수 시간에 처리된다.

단계 (3)에서 요구되는 2차원 광원 S에 대해 S가 H 상에 놓여 있는지는 구해진 H가 $z=0$ 평면인지를 점검함으로써 간단히 처리되고, 단계 (4)는 2차원 상에서 UM(S,P)를 구하는 문제임으로 선형 시간에 처리 가능하다[10].

다음으로 단계 (5), (6)와 (7)에서 요구되는 P의 변 $e(v_i, v_{i+1})$ 를 포함하는 유형 B 평면 H를 상수 시간에 구하는 방법을 생각해 보자. 먼저 P의 변 $e(v_i, v_{i+1})$ 를 포함하고 블록 이차 광원 S에 접하는 평면을 구해보자. 분명히 S가 블록 이차 표면이므로 이들 평면은 두 개일 것이다[8]. 이들 평면을 구하기 위해 이들 평면이 S에 접하는 한 점을 u 라 해 보자. 그러면 이들 평면의 정규 벡터 N 은 두 벡터 $(v_i - u)$ 와 $(v_{i+1} - u)$ 의 Cross Product에 의해 정의된다.

$$N = (v_i - u) \times (v_{i+1} - u)$$

또한 점 u 에서 접하는 평면의 정규 벡터 Nu 는 다음과 같다.

$$Nu = \left[\frac{\partial S}{\partial x} u_x, \frac{\partial S}{\partial y} u_y, \frac{\partial S}{\partial z} u_z \right]$$

여기서 $u = (u_x, u_y, u_z)$ 이다.

미분특성에 의해 $Nu = N$ 이다. 따라서, 점점 u 는 미지수가 세 개이므로 위 두 식으로부터 직접적으로 구해질 수 있다. $u = (u_x, u_y, u_z)$ 의 값은 S가 블록 이차 표면이므로 분명 두 개다. 따라서 변 $e(v_i, v_{i+1})$ 를 포함하고 S에 접하는 평면은 두 개임을 알 수 있다. 이 두 평면중 한 평면이 P와 S를 서로 다른 반대편에 놓이게 하고, 다른 한 평면이 P와 S를 같은 편에 놓이게 한다[3,10]. 소정리 3으로부터 P와 S를 같은 편에 놓이게 하는 후자가 완전음영부의 경계 유형 B 평면임을 알 수 있다. 이의 판별은 P와 S가 블록하므로 P에 대해서는 정점 v_{i-1} 과 S에 대해서는 원점을 각각 구해진 평면에 대입하여 값을 구한 후, 구해진 값이 모두 양수이거나 혹은 음수인지를 점검함으로써 이루어진다. 따라서 주어진 P의 특정 변을 함유하는 완전음영부의 유형 B 평면은 상수시간에 구해진다.

단계 (8)과 (10)에서 구해진 최대 $n+1$ 개의 유형 A와 B 평면에 대해 반공간 Hb^+ 와 Ha^- 를 결정해야 하는데, 이는 광원의 원점 $(0,0,0)$ 을 구해진 평면의 방정식에 대

입함으로써 처리된다. 따라서 이들 단계는 선형 시간에 처리된다. 위에서 논의된 바와 같이 단계 (9)는 Aggarwal 등[9]이 제안한 선형시간 알고리즘을 적용하여 교차영역 R' 를 구할 수 있으므로 선형시간에 처리된다. 마지막으로 단계 (11)에서 요구된 R' 과 Ha^- 의 교차영역도 R' 이 $O(n)$ 개의 변으로 구성됨으로 선형 시간에 쉽게 구할 수 있다[8].

따라서 다음과 같은 정리가 성립함을 알 수 있다.

정리 2: 3차원 공간상에, n 개의 정점으로 구성된 블록 다각형 P와 원, 타원, 구, 타원체, 실린더 등과 같은 블록 이차 광원 S가 주어졌을 때, S로부터 P의 완전음영부 UM(S,P)는 $O(n)$ 시간에 구해진다.

4. 결론

본 논문에서는 블록 다각형 P와 원, 타원, 구, 타원체, 실린더 등과 같은 블록 이차 광원 S가 주어졌을 때, S로부터 P의 완전음영부 UM(S,P)를 구하는 알고리즘을 설계하였다. 완전음영부의 경계가 도달되는 빛의 경계를 나타내고 있으므로, 보다 질 좋은 영상을 생성하기 위한 그림자 생성과 discontinuity meshing 분야에서 완전음영부의 경계를 기본적으로 사용하고 있다[3]. 따라서 본 논문에서 제안한 완전음영부를 구하는 알고리즘을 이용하면 그림자 생성과 discontinuity meshing의 효율성을 증대시킬 수 있다. 또한, 가상 공간을 실시간으로 항해하고자 하는 walkthrough 시스템을 생각해 보자. 이 시스템에서 가장 중요한 요소는 특정한 시점으로부터 보이는 객체를 얼마나 효율적으로 찾을 수 있는냐이다. 만약 움직이고자 하는 시점의 범위가 특정한 볼륨으로 정해져 있다 할 때, 이 볼륨으로부터 완전음영부에 속하는 객체는 분명 이 볼륨에 있는 시점으로부터 보이지 않을 것이다. 그러므로 walkthrough 시스템에서 전처리 과정으로 완전음영부를 이용하면 보다 효율적으로 실시간 렌더링이 가능하다.

일반적으로 3차원 공간상의 객체는 여러 개로 구성된다. 따라서 총 n 개의 변으로 구성된 다각형의 집합에 대해 블록 이차 광원으로부터 완전음영부를 구하는 문제가 매우 흥미로운 것이다. 참고로 현재까지 블록 이차 광원으로 완전음영부를 구하는 알고리즘은 아직까지 제시된 바가 없다.

감사의 글

본 논문은 정보통신진흥원 1999년도 대학기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임

참 고 문 헌

- [1] A.T. Campbell, *Modeling Global Diffuse illumination for image synthesis*, PhD Thesis, Dept. of Computer Science, Univ. of Texas at Austin, December 1991.
- [2] T. Nishita and E. Nakamae, "Continuous tone representation of three-dimensional objects taking account of shadow and interreflection," *ACM Computer Graphics (Proc. of SIGGRAPH'85)*, 19(3), pp.23-30, 1985
- [3] A. Watt and M. Watt, *Advanced Animation and Rendering Techniques - Theory and Practices*, Addison-Wesley, 1992
- [4] K.-H. Yoo, *Complete visibility in the 3D space and its related problems*, PhD Thesis, KAIST, 1995
- [5] T.Nishita and E. Nakamae, "A shading model of parallel cylinder light sources," *Proc. of CG International'92*, pp.429-445, 1992
- [6] H.Bao, J.Ying, and Q.Peng, "Shading with curve light source," *EUROGRAPHICS'95*, pp.217-227, 1985.
- [7] G. Heflin and G. Elber, "Shadow volume generation from free form surfaces," in *Communicating with Virtual Worlds, Proceedings of CGI'93*, pp.115-126, Springer-Verlag, June, 1993
- [8] F.P. Preparata and D.E. Muller, "Finding the intersection of n half-spaces in time $O(n \log n)$," *Theoretical Computer Science*, 8(1), pp.45-55, 1979
- [9] A. Aggarwal, L.J. Guibas, J. Saxe, and P.W. Shor, "A linear-time algorithm for computing Voronoi diagram of a convex polygon," *Discrete Computational Geometry*, Vol. 4, pp.591-604, 1989
- [10] J. O'Rourke, *Computational geometry in C*, pp.70-166, Cambridge University Press, 1994



신 성 용

1970년 한양대학교 산업공학과 졸업(공학사). 1983년 Michigan대학원 산업공학과 졸업(공학석사). 1986년 Michigan 대학원 전산학과 졸업(공학박사). 1987년 삼성 데이터 시스템 고문. 1987년 ~ 1989년 한국과학기술대학 전자전산학부 조교수. 1989년 ~ 1991년 한국과학기술원 전산학과 부교수. 1991년 ~ 1996년 한국과학기술원 전산학과 부교수. 1996년 ~ 현재 한국과학기술원 전산학과 교수.



유 관 회

1985년 전북대학교 전산통계학과 졸업. 1988년 한국과학기술원 전산학과 석사학위 취득. 1995년 한국과학기술원 전산학과 박사학위 취득. 1988년 ~ 1997년 데이콤 종합연구소 선임연구원. 1997년 ~ 현재 충북대학교 컴퓨터교육과 교수. 2000년 ~ 현재 (주)덴탈그래픽 기술이사. 관심분야는 컴퓨터그래픽스, 계산기하학, 3차원 네트워크 게임 등.