

비압축성 나비에-스톡스 방정식의 완전 내재적 분리 방법

김경연*, 백승진*, 성형진**

(2000년 1월 20일 접수)

Fully-Implicit Decoupling Method for Incompressible Navier-Stokes Equations

Kyoungyoun Kim, Seung-Jin Baek and Hyung Jin Sung

Key Words : Fully-Implicit Time Advancement(완전 내재적 시간전진), Velocity-Pressure Decoupling(속도-압력 분리), Velocity Components Decoupling(속도 성분 분리), Approximate Factorization(근사적 인수 분해), DNS(직접수치모사)

Abstract

A new efficient numerical method for computing three-dimensional, unsteady, incompressible flows is presented. To eliminate the restriction of CFL condition, a fully-implicit time advancement in which the Crank-Nicolson method is used for both the diffusion and convection terms, is adopted. Based on an approximate block LU decomposition method, the velocity-pressure decoupling is achieved. The additional decoupling of the intermediate velocity components in the convection term is made for the fully-implicit time advancement scheme. Since the iterative procedures for the momentum equations are not required, the velocity components decouplings bring forth the reduction of computational cost. The second-order accuracy in time of the present numerical algorithm is ascertained by computing decaying vortices. The present decoupling method is applied to minimal channel flow unit with DNS (Direct Numerical Simulation).

1. 서 론

현재 직접수치모사를 이용한 난류 유동의 해석에 가장 많이 사용되는 방법은 모멘텀 방정식과 연속 방정식으로 결합되어 있는 속도와 압력을 분리하는 부분단계법 (fractional step method) 이다. 부분단계법은 모멘텀 방정식과 압력 방정식을 독립적으로 각각 단 한번의 계산을 통하여 시간전진을 하는 효율적인 방법이다.

속도와 압력을 분리하는 방법은 Chorin⁽⁵⁾과 Temam⁽¹³⁾에 의해 각각 독립적으로 제시된 후, 다양한 방식으로 접근되고 발전되어 왔다. 대별하여 fractional step method,⁽⁹⁾ pressure correction method,⁽¹⁴⁾ projection method⁽²⁾ 으로 나눌 수 있다. 이러한 수

치방법의 핵심적인 개념은 우선 비압축성조건을 무시하여 구한 중간단계의 속도를 divergence free vector field에 projection 하여 다음 시간 단계의 속도장을 구해내는 방법이다. 따라서 이렇게 구해진 속도장은 계산기계의 수치오차 범위내의 divergence를 가지는 벡터장이 된다.

기존의 부분단계법들^(9,10)은 모멘텀 방정식에서 점성항은 내재적으로, 대류항은 외재적으로 처리하는 준 내재적 부분단계법 (semi-implicit fractional step method) 이다. 이러한 준 내재적 방법들은 CFL 조건으로 인하여 계산 시간 간격의 제한을 받게 된다. 또한, Akselvoll & Moin⁽¹⁾은 CFL 수가 y 방향의 격자 밀집으로 가장 큰 영향을 받게 된다는 사실에 근거하여 y 방향의 미분항들만 내재적으로 처리하고 나머지 x, z 방향의 미분항들에 대해서는 외재적으로 처리하는 방법을 제시하였다. 이와 같은 준 내재적 방법은 복잡한 형상에서의 밀집된 계산 격자의 경우에 있어서 유동해석을 위해 요구되는 물리적인 시간간격보다 더 작은 계산

* 한국과학기술원 기계공학과

** 회원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : hjsung@kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3067 FAX : (042)869-5027

시간간격의 제한으로 그만큼 더 많은 계산 단계를 필요로 한다.

이러한 CFL 조건을 배제시키기 위해, 모멘텀 방정식에서 대류항과 점성항에 대해 모두 Crank-Nicolson 방법을 사용하여 내재적으로 처리하는 완전내재적 부분단계법 (fully-implicit fractional step method) 이 제시되었다.^(3, 4, 9) 또한, Choi & Moin⁽³⁾은 minimal channel flow unit 에 대한 직접수치모사를 통해 난류 유동 해석에 필요한 최대 시간 간격을 조사하여 난류 유동의 물리적인 현상을 모사하기 위해 요구되는 시간간격이 기존의 준 내재적 방법에서의 제한적인 계산 시간 간격보다 클 경우에는 완전내재적 방법이 더 효율적임을 확인하였다. 그러나, 대류항의 내재적인 처리로 인하여, 모멘텀 방정식에서 속도 성분들이 결합되어 있으므로 각각의 속도 성분들을 구하기 위해선 반복적인 계산이 요구된다.

기존의 부분단계법들은 미분방정식 형태의 Navier-Stokes 방정식을 일단 시간에 의한 단계로 나누는 뒤, 공간 차분을 수행하는 방법으로 부분 단계를 나누었다. 이러한 기존의 방법들은 각 부분 단계의 경계조건의 세심한 처리가 없을 경우에는 시간에 대한 정확도의 손실을 야기하게 된다. Perot⁽¹¹⁾과 Dukowicz & Dvinsky⁽⁶⁾는 시간에 대한 정확도의 손실은 경계조건의 처리 때문이 아니라 단계를 나누는 뒤 공간상 차분을 고려하는 기존의 방법 자체에 문제가 있다고 지적하였다. 이를 해결하기 위해서 Navier-Stokes 방정식을 시간과 공간에 대해 동시에 차분하여 행렬식을 구성하는 방법을 제시하였다. Dukowicz & Dvinsky⁽⁶⁾는 구성된 행렬식의 계수행렬의 근사적인 factorization 방법을 이용하여, 시간에 대해 2차의 정확도를 유지하면서 속도와 압력을 분리하는 부분단계법을 제시하였다. Perot⁽¹¹⁾은 계수행렬의 근사적인 block LU decomposition 을 이용하여 계산단계를 나누어 속도와 압력을 분리해 내는 부분단계법을 제시하였다. 이러한 방법은 행렬식의 구성시 원래의 Navier-Stokes 방정식의 경계조건을 소스항 (source term) 에 포함시킴으로서, 계수 행렬의 근사적인 변형으로 계산 단계를 나눔에 있어서, 경계조건의 부가적인 고려를 배제시켰다.

본 연구에서는 3차원 비정상 비압축성 유동을 해석하기 위해 Navier-Stokes 방정식의 모든 항들을 Crank-Nicolson 방법을 사용하여 완전 내재적인 (fully-implicit) 방법으로 시간과 공간에 대하여 동시에 차분하여 행렬식을 구성하였다. 이렇게 구성된 행렬식에서 계수 행렬을 근사적인 block LU decomposition 을 이용하여 시간에 대하여 2차의

정확도를 유지하도록 속도와 압력을 분리하였다. 이에 더하여, 모멘텀 방정식에 해당하는 행렬식의 계수행렬 또한 근사적인 block LU decomposition 을 이용하여 대류항의 내재적인 처리로 인해 결합된 속도 성분들을 시간에 대한 2차의 정확도를 유지하면서 각각 분리하는 방법을 제시하였다.

Decaying vortex problem 을 계산하여 제시된 수치 방법이 시간에 대해 2차 정확도를 가짐을 조사하였고, Minimal channel flow unit 에 대한 직접수치모사를 수행하여 난류 채널 유동 해석의 타당성을 조사하였다. 앞의 수치 계산들을 통하여 본 연구에서 제시된 완전내재적 속도-압력 분리 방법이 복잡한 난류 유동의 직접수치모사에서 정확성을 가질 뿐만 아니라, 완전내재적 방법의 사용시 결합되는 속도 성분의 반복적인 계산을 하지 않으므로 그에 상응하는 계산시간을 단축시키는 효율적인 수치방법을 제시하였다.

2. 수치적 방법

2.1 지배방정식

비압축성 유동의 지배방정식은 아래와 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

여기서, x_i 는 직교좌표를 나타내고, u_i 는 각각의 속도 성분들을 나타낸다. 모든 변수들은 특성 속도와 특성 길이로 무차원화 되었으며, Re 는 레이놀즈 수를 나타낸다.

2.2 지배방정식의 행렬형

Navier-Stokes 방정식의 모든 항들에 대해 Crank-Nicolson 방법을 사용하여 $n+1/2$ 시간 단계에서 식 (1)과 식 (2)의 시간과 공간에 대해서 동시에 차분하여 얻은 차분 식은 아래와 같다.

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} (\mathbf{H}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{H}(\mathbf{u}^n)) \quad (3)$$

$$= -\mathbf{G}p^{n+1/2} + \frac{1}{2\text{Re}} (\mathbf{L}\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{L}\mathbf{u}^n) + \mathbf{m}\mathbf{b}\mathbf{c}$$

$$\mathbf{D}\mathbf{u}^{n+1} = 0 + \mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{c} \quad (4)$$

여기서 \mathbf{L} 은 공간상으로 차분화된 Laplacian operator 를 나타내고 \mathbf{H} 는 차분화된 Convective operator 를 나타낸다. \mathbf{G} 와 \mathbf{D} 는 각각 공간상으로 차분화된 Gradient operator, Divergence operator 를 나타낸다. Δt 는 계산 시간 간격을 나타내고, 위 첨자 n 은 n 번째 계산 단계에서의 변수를 의미한다.

엇갈림 격자계에서 공간에 대해 2차의 정확도를 가지는 중심 차분법을 이용하여 각 공간 차분 operator 를 결정하였다. 엇갈림 격자계를 사용하였으므로, 차분된 식의 미지수인 \mathbf{u}^{n+1} 와 $p^{n+1/2}$ 는 계산 영역의 경계가 아닌 내부의 격자점에서 정의 된다. 계산 영역의 경계에서의 속도값들은 이미 \mathbf{mbc} , \mathbf{cbc} 로서 소스항에 포함되고, 엇갈림 격자계에서는 셀 내부에서 압력이 정해지므로, 경계에서의 압력값은 필요로 하지 않게 된다. 즉, 엇갈림 격자계에서 공간과 시간에 대하여 동시에 차분하여 얻은 위의 식에서는 압력 자체의 경계조건을 필요로 하지 않게 된다.

점성항과 대류항에 대하여 모두 내재적인 처리를 함으로써 완전내재적 시간 전진방법을 사용하였다. 완전 내재적 시간 전진방법은 비선형 항인 대류항의 내재적인 처리로 인하여 필연적으로 각 속도 성분들이 결합된 비선형 방정식을 유도한다. 이러한 비선형 방정식의 풀이를 위해서 비선형항을 시간에 대해 2차의 정확도를 갖도록 아래와 같이 선형화 하였다.⁽¹⁶⁾

$$u_i^{n+1}u_j^{n+1} = (u_i^n + \delta u_i)(u_j^n + \delta u_j) + O(\Delta t^2) \\ = u_i^{n+1}u_j^n + u_i^n u_j^{n+1} - u_i^n u_j^n + O(\Delta t^2) \quad (5)$$

$$\delta u_i = u_i^{n+1} - u_i^n, \quad \delta u_j = u_j^{n+1} - u_j^n$$

위의 방법으로 선형화를 하여 대류항에 대한 선형 연산자 \mathbf{N} 을 아래와 같이 정의 하였다.

$$\mathbf{N}\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{H}(\mathbf{u}^n)) \quad (6)$$

위의 선형 연산자, \mathbf{N} 을 이용하여 차분 방정식 식 (3)과 식 (4)를 행렬식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{G} \\ \mathbf{D} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{mbc} \\ \mathbf{cbc} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta t} \left[\mathbf{I} + \Delta t \left(\mathbf{N} - \frac{1}{2\text{Re}} \mathbf{L} \right) \right]$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}^n - \mathbf{G}p^{n-1/2} + \frac{1}{2\text{Re}} \mathbf{L}\mathbf{u}^n$$

$$\delta p = p^{n+1/2} - p^{n-1/2}$$

이상과 같이 이산화된 Navier-Stokes 방정식의 행렬식에서 계수행렬의 역행렬을 통하여 다음 시간 간격에서의 유동장의 정보, 즉 \mathbf{u}^{n+1} , $p^{n+1/2}$ 를 구할 수 있다. 그러나 이 행렬식의 계수행렬은 매우 크고 비 구조적인 행렬 (large sparse matrix) 이므로 직접적으로 역행렬을 구하기가 매우 어렵고, 또한 반복적인 계산을 통해서 행렬식을 풀기에도 많은 시간이 걸린다. 따라서, 본 연구에서는 이 행렬식의 효율적인 계산을 위해, 속도와 압력, 그리고 각각의 속도 성분까지 분리하는 수치방법을 제시하였다.

2.3 속도와 압력의 분리

앞에서 구성된 행렬식에서 계수행렬의 근사적인 처리를 통해, 속도와 압력을 시간에 대해 2차의 정확도를 가지며 분리하고, 각각의 속도 성분 또한 시간에 대해서도 2차의 정확도를 가지며 분리하는 방법을 제시하였다.

2.3.1 속도-압력 분리

우선, 이산화된 Navier-Stokes 방정식의 행렬식, 식 (7)에서 속도와 압력을 분리하고자 한다. 계수행렬의 근사적인 처리를 통해 원래의 행렬식과 비교하여 시간에 대해 2차의 정확도를 갖는 근사식을 구성하여 속도와 압력을 분리하였다. 식 (7)의 계수행렬의 근사적 LU decomposition 을 통해, 아래와 같이 식 (7)을 시간에 대해 2차의 정확도를 갖는 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{D} & -\Delta t \mathbf{D} \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \Delta t \mathbf{G} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{mbc} \\ \mathbf{cbc} \end{pmatrix} \quad (8)$$

식 (8)은 시간에 대해 아래와 같은 시간에 대한 2차의 오차항을 가지는 식 (7)의 근사식이다.

$$O(\Delta t^2) = \begin{pmatrix} \Delta t \mathbf{M} \mathbf{G} \delta p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{N} - \frac{1}{2\text{Re}} \mathbf{L} \quad (9)$$

식 (8)은 중간단계 속도 \mathbf{u}^* 를 도입하여 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & -\Delta t \mathbf{D} \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^* \\ \delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{m} \mathbf{b} \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{c} \end{pmatrix} \quad (10a)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \Delta t \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^* \\ \delta p \end{pmatrix} \quad (10b)$$

식 (10a)와 식 (10b)에서 각각 속도와 압력을 구해 내는 과정은 아래와 같다.

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^* = \mathbf{r} + \mathbf{m} \mathbf{b} \mathbf{c} \quad (11a)$$

$$\Delta t \mathbf{D} \mathbf{G} \delta p = \mathbf{D} \mathbf{u}^* - \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{c} \quad (11b)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \mathbf{G} \delta p \quad (11c)$$

$$p^{n+1/2} = p^{n-1/2} + \delta p \quad (11d)$$

2.3.2 속도 성분들의 분리

대류항에 대해서는 Adams-Bashforth 또는 Runge-Kutta 방법을 이용하여 외재적으로 처리하고, 점성항에 대해서는 Crank-Nicolson 방법을 사용하여 내재적으로 처리하는 준 내재적 부분단계법에서는 각각의 속도 성분들이 독립적으로 계산될 수 있다. 그러나 완전내재적 시간진진을 채택한 경우, 대류항까지 Crank-Nicolson 방법을 이용하여 내재적으로 처리하므로 각각의 모멘텀 방정식에서 속도 성분들이 결합되어 있다. 따라서, 각 속도 성분들은 독립적으로 계산될 수 없고, 반복적인 계산을 통하여 각각의 모멘텀 방정식을 동시에 만족시키는 수렴된 값을 구하는 방법이 사용되고 있다.

완전내재적 부분단계법에서 요구되는 이러한 속도 성분들의 반복적인 계산을 피하기 위해, Rosenfeld⁽¹²⁾는 각각의 모멘텀 방정식에서 내재적으로 결합된 속도 성분들을 three-time level linearization scheme 을 사용하여 분리하였다. 그러나 이 방법은 n 시간단계에서의 유동장의 정보 뿐만 아니라 $n-1$ 시간단계에서의 정보도 알아야 하므로 기존의 방법보다 많은 메모리를 요구하게 되는 단점을 지니고 있다.

본 연구에서는 완전내재적 시간진진방법을 사용할 경우, 각각의 모멘텀 방정식에서 내재적으로

결합된 속도 성분들을 n 시간 단계에서의 정보만을 가지고, 2차의 정확도를 갖는 속도 성분들의 분리 방법을 제시하였다. 즉, 식 (11a)의 계수행렬의 근사적인 LU decomposition 을 통해 시간에 대해 2차의 정확도를 가지면서 각각의 속도 성분을 분리하여 독립적으로 계산하는 방법이다.

식 (11a)은 아래와 같이 표현될 수 있고, 각각의 속도 성분들을 표시하여 나타내면 식 (13)과 같다.

$$\mathbf{A} \delta \mathbf{u}^* = -\mathbf{A} \mathbf{u}^n + \mathbf{r} + \mathbf{m} \mathbf{b} \mathbf{c} = \mathbf{RHS} \quad (12)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} I + \Delta t M_{11} & \Delta t M_{12} & \Delta t M_{13} \\ \Delta t M_{21} & I + \Delta t M_{22} & \Delta t M_{23} \\ \Delta t M_{31} & \Delta t M_{32} & I + \Delta t M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1^* \\ \delta u_2^* \\ \delta u_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{RHS}_1 \\ \mathbf{RHS}_2 \\ \mathbf{RHS}_3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

준 내재적 부분단계법에서는 식 (13)의 행렬 $M_{ij}(i \neq j)$ 이 0이 되므로 각각의 속도 성분들은 결합되어 있지 않고, 독립적으로 계산될 수 있다. 그러나 완전내재적 방법에서는 행렬 M_{ij} 가 0이 아니므로 각각의 모멘텀 방정식에서 속도 성분들이 내재적으로 결합되어 있다. 식 (13)의 계수행렬을 아래와 같이 근사적인 LU decomposition 을 통하여 각 속도 성분들을 시간에 대한 2차의 정확도를 가지면서 분리해 낼 수 있고, 각각 독립적으로 풀 수 있게 된다.

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} I + \Delta t M_{11} & 0 & 0 \\ \Delta t M_{21} & I + \Delta t M_{22} & 0 \\ \Delta t M_{31} & \Delta t M_{32} & I + \Delta t M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1^* \\ \delta u_2^* \\ \delta u_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{RHS}_1 \\ \mathbf{RHS}_2 \\ \mathbf{RHS}_3 \end{pmatrix} \quad (14)$$

식 (14)는 다음과 같은 시간에 대해 2차의 오차항을 갖는 식 (13)의 근사식이다.

$$O(\Delta t^2) = \begin{pmatrix} \Delta t M_{11} M_{12} \delta u_2^* + \Delta t M_{11} M_{13} \delta u_3^* \\ \Delta t M_{21} M_{12} \delta u_2^* + \Delta t M_{13} M_{21} \delta u_3^* + \Delta t M_{22} M_{23} \delta u_3^* \\ \Delta t M_{31} M_{12} \delta u_2^* + \Delta t M_{13} M_{31} \delta u_3^* + \Delta t M_{32} M_{23} \delta u_3^* \end{pmatrix} \quad (15)$$

식 (14)에서 각각의 중간 단계의 속도 성분들은 새로운 중간단계의 속도 성분 δu^{**} , δv^{**} 를 도입하여 아래와 같은 계산 단계에서 독립적으로 구해질 수 있다.

$$\frac{1}{\Delta t}(I + \Delta t M_{11})\delta u_1^{**} = RHS_1 \quad (16a)$$

$$\frac{1}{\Delta t}(I + \Delta t M_{22})\delta u_2^{**} = RHS_2 - M_{21}\delta u_1^{**} \quad (16b)$$

$$\frac{1}{\Delta t}(I + \Delta t M_{33})\delta u_3^* = RHS_3 - M_{31}\delta u_1^{**} - M_{32}\delta u_2^{**} \quad (16c)$$

$$\delta u_2^* = \delta u_2^{**} - \Delta t M_{23}\delta u_3^* \quad (16d)$$

$$\delta u_1^* = \delta u_1^{**} - \Delta t M_{12}\delta u_2^* - \Delta t M_{13}\delta u_3^* \quad (16e)$$

$$u_i^* = u_i^n + \delta u_i^* \quad (i=1,2,3) \quad (16f)$$

식 (13)을 직접 풀어서 속도 성분을 구하려면 각각의 모멘텀 방정식을 반복적으로 계산하여 속도 성분을 구해야 한다. 그러나 본 연구에서 제시한 방법은 속도 성분을 구함에 있어서 각각 단 한 번의 간단한 TDMA (Tri-diagonal matrix algorithm) 형태의 행렬식만(식 (16a)-(16c))의 역행렬을 계산하게 되는 효율적인 방법이다.

2.3.3 전체적인 계산 절차

앞 절들에서는 속도와 압력을 분리하는 방법과 완전내재적 시간전진의 경우에 각각의 속도 성분들을 분리하는 분리방법을 제시하였다. 모든 미지수, 즉 압력, 각각의 속도 성분들이 분리된 부분단계법의 전체적인 계산 절차를 요약하면 아래와 같다.

1. 식 (16)에서 각각의 중간 단계의 속도 성분들을 구한다.
2. 식 (11b)에서 중간단계의 속도장을 이용하여 압력에 대한 식을 푼다.
3. 식 (11c)에서 중간단계의 속도장을 divergence free vector field 에 projection 을 하여 새로운 시간단계에서의 속도장을 구한다.

3. 수치방법의 검증

3.1 Decaying vortex problem

앞서 제시된 수치해석기법의 정확도를 조사하기 위해서 Navier-Stokes 방정식의 해석적인 해가 존재하는 decaying vortex 문제를 수치적으로 풀어 보았다. 아래의 속도와 압력은 2차원 비정상 Navier-Stokes 방정식을 $Re=1$ 일 때 정확하게 만족하는 해석적인 해이다.

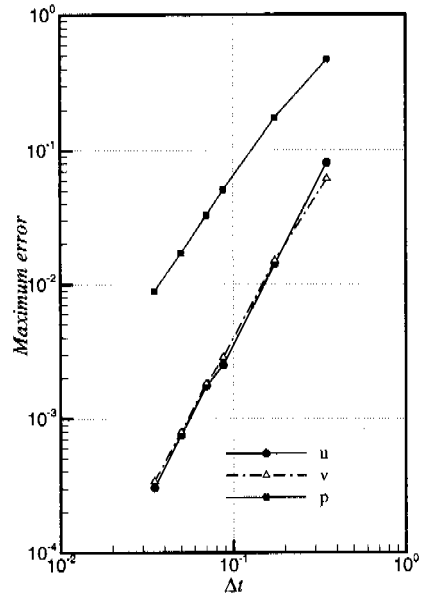


Fig. 1 Error convergence rate for velocity components and pressure

$$u(x, y, t) = -\cos x \sin y e^{-2t}$$

$$v(x, y, t) = \sin x \cos y e^{-2t}$$

$$p(x, y, t) = -\frac{1}{4}(\cos 2x + \sin 2y)e^{-4t} \quad (17)$$

$$0 \leq x, y \leq \pi$$

경계조건과 초기조건을 위의 식으로 부여하여, 제시된 수치 방법으로 계산을 수행하였다. vortex 의 강도가 초기치의 약 1/2이 되는 시간 $t = 0.35$ 일 때, 수치적으로 얻은 결과와 해석적인 해를 비교하여 $\max |u - u_{exact}|$ 로 최대 오차를 정의 하였다.

본 수치방법의 시간에 대한 정확도를 조사하기 위해 40×40 의 동일한 격자계에서 여러 가지 계산시간간격에 대해 계산을 수행하였다. Fig. 1은 계산 시간 간격에 따른 최대 오차의 변화를 나타내고 있다. 속도 u, v 에 대해서 log-log 그래프에서 기울기가 2인 직선을 나타내므로, 본 수치방법이 시간에 대해 2차의 정확도를 가짐을 확인할 수 있다.

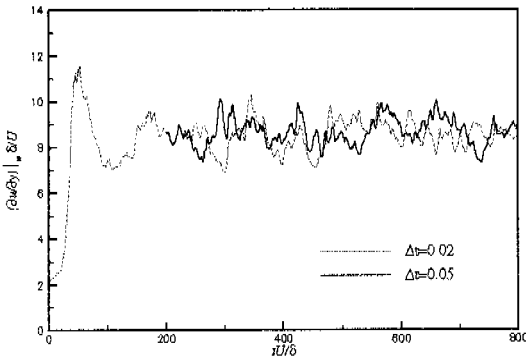


Fig. 2 Time history of the plane-averaged wall-shear rates

3.2 DNS of turbulent plane channel flow

공간에 대해 주기성을 지니는 채널 유동을 수치적인 방법으로 해석 하기 위해서는 우선 평균 압력 구배 값을 지정해야 한다. 최근 채널 유동에 제어가 적용되면서 주유동 방향으로의 질량 유량을 일정하게 유지하도록 평균 압력 구배를 매 시간마다 변화 시키는 방법이 많이 적용되고 있다.

You 등⁽¹⁵⁾의 방법과 마찬가지로, 아래와 같은 평균 압력 구배 개념을 도입하기로 한다.

$$p^{n+1/2}(x, y, z) = \phi^{n+1/2}(x, y, z) + x \left(\frac{dp}{dx} \right)^{n+1/2} \quad (18)$$

$$\int \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} dV = \left(\frac{dp}{dx} \right)^{n+1/2} \cdot V \quad (19)$$

여기서 V 는 계산영역의 전체 체적을 나타낸다. x 방향으로 주기적인 경우, 본 연구에서 제시한 수치방법에 위의 평균 압력 구배 개념을 적용하여 나타내면 압력에 대한 식과 projection 과정은 아래와 같게 된다.

$$\Delta t DG \delta \phi = \mathbf{D} \mathbf{u}^* - cbc \quad (20)$$

$$\delta \phi = \phi^{n+1/2} - \phi^{n-1/2}$$

$$u_1^{n+1} = u_1^* - \Delta t \left(\mathbf{G}_1 \delta \phi + \frac{dp^{n+1/2}}{dx} - \frac{dp^{n-1/2}}{dx} \right) \quad (21a)$$

$$u_2^{n+1} = u_2^* - \Delta t \mathbf{G}_2 \delta \phi \quad (21b)$$

$$u_3^{n+1} = u_3^* - \Delta t \mathbf{G}_3 \delta \phi \quad (21c)$$

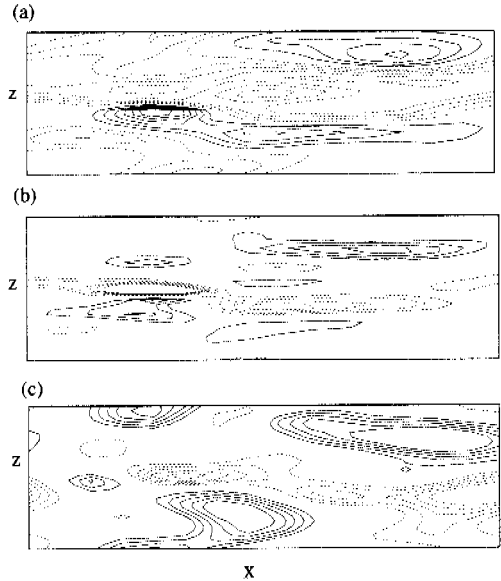


Fig. 3 Instantaneous vorticity contours in the y - z plane at $y^+=2.3$ (a) ω_z ; isoincrement=1.0. Dashed line: $3 < \omega_z < 9$; solid line: $9 < \omega_z$ (b) ω_y ; isoincrement=0.2. Dashed line: $-0.4 < \omega_y$; solid line: $0.4 < \omega_y$ (c) ω_x ; isoincrement=0.2. Dashed line: $-0.4 < \omega_x$; solid line: $0.4 < \omega_x$

평균 압력 구배 항은 공간상으로는 상수항이고, 주유동 방향으로의 질량유량은 항상 일정하다고 가정하면, 식 (21a)에서 아래와 같이 구해 질 수 있다.

$$\frac{dp^{n+1/2}}{dx} - \frac{dp^{n-1/2}}{dx} = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{V} \int_V (u_1^* - \Delta t \mathbf{G}_1 \delta \phi - u_1^{n+1}) dV \quad (22)$$

본 연구에서 제시한 각각의 속도성분까지 분리하는 완전내재적 분리방법을 이용하고, 위에서 제시된 일정한 질량유량을 유지하는 평균압력 구배 결정법을 사용하여 공간에 대해 주기성을 가지는 난류 채널 유동을 직접수치모사 하였다. x 와 z 방향으로 모두 주기성을 가지고 등 간격 격자를 사용할 경우, 푸리에 변환 (Fourier transform) 을 이용하면 $\delta \phi$ 에 대한 3차원 포아송 (Poisson) 방정식 (20)은 1차원 방정식으로 유도된다. 즉, 차분화된 포아송 방정식, 식 (20)을 x, z 방향의 2D FFT와 y 방향의 TDMA 을 이용하여 반복적인 계산 없이 한번에 계산하였다.

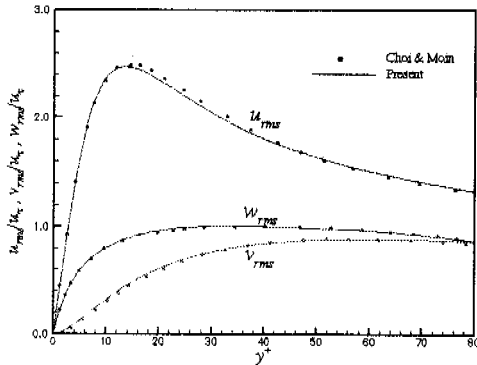


Fig. 4 Comparisons of root-mean-square velocity fluctuations

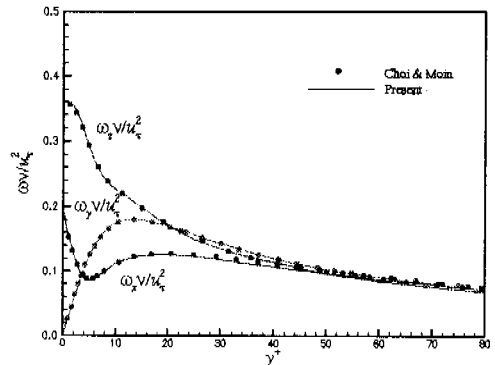


Fig. 5 Comparisons of root-mean-square vorticity fluctuations

층류유동의 중심 속도 U_c 과 채널 절반 두께의 길이 δ 로 무차원화된 레이놀즈 수, $Re_c=4200$ 에서의 유동에 대한 직접수치모사를 수행하였다. 이 경우, 벽면 마찰 속도 u_τ 와 채널 절반 두께의 길이 δ 로 무차원화된 레이놀즈 수(Re_c)는 대략 $Re_c \approx 180$ 이 된다.

Jiménez & Moin⁽⁸⁾은 난류유동을 모사하기 위해 필요한 최소의 계산 영역은 주 흐름 방향으로 대략 250-350 벽단위(wall unit), 채널 폭 방향으로 대략 100 벽단위 정도가 필요하다고 밝혔다. 따라서 본 계산에서는 위의 레이놀즈 수에 해당하는 난류를 모사하기 위해서 Jiménez & Moin⁽⁸⁾의 최소한의 계산 영역보다 좀 큰 계산 영역인, 주 흐름방향으로 $\pi\delta$ (약 570 벽단위), 채널 폭 방향으로 0.289 $\pi\delta$ (약 160 벽단위) 크기의 계산 영역에서 계산하였다. x, y, z 방향으로 $16 \times 129 \times 32$ 개의 격자가 사용되었다. 주 흐름 방향과 채널 폭 방향으로는 동일한 격자 크기를 갖도록 하여, 각각의 격자의 크기는 $\Delta x^+ = \Delta x u_\tau^+ / \nu \approx 35$, $\Delta z^+ = \Delta z u_\tau^+ / \nu \approx 5$ 이다. 그리고 벽면에 수직인 y 방향으로는 hyperbolic tangent 함수를 이용한 격자 분포를 사용하였다. y 방향의 첫번째 격자의 위치가 벽단위로 $y_{1st}^+ = y u_\tau^+ / \nu \approx 0.18$ 이며, 채널 중심에서 가장 큰 y 방향의 격자 크기는 벽단위로 대략 7.2 이다.

Choi & Moin⁽³⁾은 난류유동을 제대로 예측하기 위해서 필요한 계산시간 간격을 $\Delta t^+ = \Delta t u_\tau^2 / \nu \approx 0.4$ 로 제시하고 있다. 따라서 본 계산에서는 Choi & Moin⁽³⁾이 제시한 시간 간격이내의 시간 간격인 $\Delta t U_c / \delta = 0.02$ ($\Delta t^+ \approx 0.16$) 으로 시간 전진을 하였다.

층류 속도 분포에 임의의 교란을 주고 난류 유동으로 발전해 가는 경우이다. Fig. 2는 공간 평균된 벽면 전단 응력을 통해 초기의 층류 속도 분포에서 시간에 따라 난류유동의 속도 분포로 발전해 감을 나타낸다.

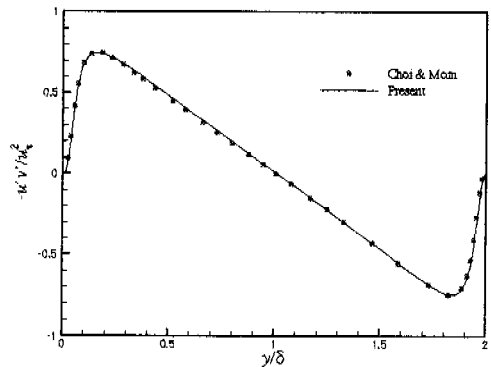


Fig. 6 Comparison of Reynolds shear stress

Fig. 3은 벽면 근처, $y^+ \approx 2.3$ 에서 순간적인 와도 성분들을 나타낸다. 난류 유동의 성질로 잘 알려져 있는 벽면 근처에서의 streaky structure 를 잘 나타내고 있다. 보다 정량적인 비교를 위하여 Choi & Moin⁽³⁾의 minimal channel flow unit 의 결과와 비교하였다. 앞의 계산결과를($\Delta t=0.02$) 초기 조건으로 하여, 계산 시간 간격을 Choi & Moin⁽³⁾이 제시한 난류 채널 유동의 직접수치모사에 필요한 최대 시간 간격인 $\Delta t=0.05$ ($\Delta t^+ \approx 0.4$) 로 시간 전진을 하였다. 이 경우 CFL 수는 0.7 ~ 1.5 정도이다. x, z 방향으로 평균한 물리량들이 통계적으로 정상상태에 도달한 후에, 여러 통계적인 물리량들의 시간 평균을 구하기 위해 1000 δU_c 의 시간 동안 평균을 취하였다. Fig. 4에서는 각각의 속도 성분의 섭동량의 rms (root-mean-square) 값을 나타내었고, Fig. 5는 와도 섭동량의 rms 값, Fig. 6에서는 레이놀즈 전단 응력의 rms 값들을 나타내었다. Choi & Moin⁽³⁾의 결과와 거의 정확한 일치율을 보이고 있으므로, 제시된 수치해석 방법이 복잡한 난류 유동의 해석에도 타당함을 알 수 있다. 본 연구에서 제시된 새로운 완전 내재적 분리방법으로서 난류 채널 유동의 직

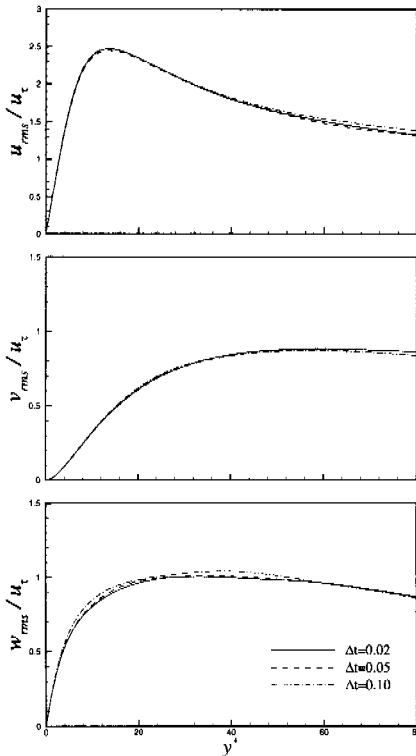


Fig. 7 Effect of the computational time step on root-mean-square velocity fluctuations

접수치모사를 수행하여 타당한 결과를 얻었으며, 이로써 대류항의 선형화, 속도성분의 분리를 위한 계수행렬의 근사적인 LU decomposition 등의 과정이 타당함을 확인하였다.

Fig. 7은 다양한 계산 시간 간격($\Delta t=0.02, 0.05, 0.10$)에 따른 속도성분의 섭동량의 rms 값을 나타내고 있다. 각각의 계산 시간 간격에 해당하는 CFL 수는 대략 0.5, 1.0, 2.0이다. 대류항의 내재적인 처리로 인하여 CFL 수가 2 이상인 경우에서도 안정한 해를 얻을 수 있음을 확인하였고, $\Delta t=0.05$ ($\Delta t^* \approx 0.4$)이내의 시간 간격으로 계산을 수행할 경우, 난류량을 제대로 예측함을 확인하였다.

Table 1은 완전내재적 시간 전진의 경우 대류항으로 인해 결합되는 중간 단계의 속도 성분들을 반복적인 계산을 통하여 동시에 구해내는 방법(식 (13))과 본 연구에서 제시한 분리방법(식 (16))을 사용할 경우 각각의 계산 시간을 비교하여 나타내었다. 계산 시간 간격을 $\Delta t U_i / \delta = 0.05$ 로 하여 $500\delta U_i$ 동안 시간 전진을 하는 경우, 중간 단계의 속도를 구하는 과정과 전체적인 계산 과정에 대한 시간을 비교하였다. 본 연구에서 제시된 분리 방법을 사용할 경우, 반복적인 계산을 통하여 중간

Table 1 CPU time for $500\delta U_i$ in DS10 of COMPAQ Co.
Case 1 : Coupled equations (Eq.(13))
Case 2 : Present decoupling method

	Momentum equations(sec)	Overall computation (sec)
Case 1	18538	20155
Case 2	3593	5205
%	19.4	25.8

단계의 속도를 구하는 방법에 비해, 전체적인 계산 시간에서는 대략 75%의 계산 시간이 단축됨을 확인하였고 중간 단계의 속도를 구하는 모멘텀 방정식에서는 대략 80%의 계산 시간 단축을 확인하였다. x, z 방향으로 주기성을 지니는 채널 유동에서는 3차원 포아송 형태의 압력 방정식이 x, z 방향으로의 푸리에 변환을 통해, 단지 y 방향으로의 TDMA 형태로 변환되므로 반복적인 계산이 필요 없게 되고, 상대적으로 모멘텀 방정식에서 요구되는 계산 시간이 전체 계산 시간에서 큰 비율을 차지하게 된다. 따라서 모멘텀 방정식을 분리하여 계산하는 본 분리 방법이 매우 효율적인 방법임을 확인하였다.

4. 결론

비정상, 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 속도와 압력 뿐만 아니라 대류항의 내재적인 처리로 인해 야기되는 속도 성분의 결합을 분리 시키는 새로운 완전 내재적 분리방법이 제시되었다. 각각의 모멘텀 방정식에서 내재적으로 결합되어 있는 속도성분을 반복적인 계산을 통하여 구하는 기존의 방법과는 달리, 속도 성분들을 분리하여 각각 독립적으로 계산하는 계산 단계를 제시함으로써, 보다 효율적인 수치 방법을 고안하였다. 본 연구에서 제시된 속도-압력 분리 방법이 시간에 대해 2차의 정확도를 가짐을 확인하였다. 난류채널유동에 대한 직접수치모사를 통해 본 수치 방법의 결과 또한 유동을 제대로 예측함을 확인하였다. 완전 내재적 시간 전진방법을 사용하면서 모멘텀 방정식의 반복적인 계산 없이, 직접적으로 중간 단계의 속도 성분들을 구해내는 본 수치 방법은 계산량이 방대한 직접수치모사 (DNS)나 대형와모사 (LES)를 이용한 난류유동의 수치해석에 효율적인 방법이라 할 수 있다.

후 기

이 연구는 과학기술부 국가지정연구실 사업의 일환으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Akselvoll, K. and Moin, P., 1995, "Large Eddy Simulation of Turbulent Confined Coannular Jets and Turbulent Flow over a Backward Facing Step," Report No. TF-63, *Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, CA.*
- (2) Bell, J., Colle, P. and Glaz, H., 1989, "A Second-Order Projection Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 85, pp. 257~283.
- (3) Choi, H. and Moin, P., 1994, "Effects of the Computational Time Step on Numerical Solutions of Turbulent Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol. 114, pp. 1~4.
- (4) Choi, H., Moin, P. and Kim, J., 1993, "Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow over Riblets," *J. Fluid Mech.*, Vol. 255, pp. 503~539.
- (5) Chorin, A. J., 1968, "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations," *Math. Comput.*, Vol. 22, pp. 745~762.
- (6) Dukowicz, J. and Dvinsky, A., 1992, Approximate Factorization as a High Order Splitting for the Implicit Incompressible Flow Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 102, pp. 336~347.
- (7) Hahn, S. and Choi, H., 1997, "Unsteady Simulation of Jets in a Cross Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol. 134, pp. 342~356.
- (8) Jiménez, J. and Moin, P., 1991, "The Minimal Flow Unit in Near-Wall Turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 225, pp. 213~240.
- (9) Kim, J. and Moin, P., 1985, "Application of a Fractional Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 59, pp. 308~323.
- (10) Le, H. and Moin, P., 1991, An Improvement of Fractional Step Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 92, pp. 369~379.
- (11) Perot, J., 1993, "An Analysis of Fractional Step Method," *J. Comput. Phys.*, Vol. 108, pp. 51~58.
- (12) Rosenfeld, M., 1996, "Uncoupled Temporally Second-order Accurate Implicit Solver of Incompressible Navier-Stokes Equations," *AIAA J.*, Vol. 34, No. 9, pp. 1829~1834.
- (13) Temam, R., 1979, *Navier-Stokes Equations : Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, New York.
- (14) Van Kan, J., 1986, A Second-Order Accurate Pressure Correction Scheme for Viscous Incompressible Flow," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 7, p. 870
- (15) You, J., Choi, H. and You, J. Y., 1999, "Modified fractional step method of keeping a constant mass flow rate in channel and pipe flows," Submitted to *KSME Int. J.*
- (16) 김동주, 최해천 1999, "비정렬 격자계에서 비정상 비압축성 유동장 해석을 위한 유한체적법," 대한기계학회 1999년도 춘계학술대회논문집 B, pp. 315~320