

개선된 입자와법을 이용한 급 출발하는 실린더 주위의 비정상 점성 유동 시뮬레이션

진동식* · 이상환** · 이주희*
(1999년 12월 1일 접수)

Simulations of the Unsteady Viscous Flow Around an Impulsively Started Cylinder Using Improved Vortex Particle Method

Dongsik Jin, Sanghwan Lee and Juhee Lee

Key Words: Particle Vortex Method(입자와법), Incompressible Flow(비압축성 유동), Unsteady Viscous Flow(비정상 점성 유동), Particle Strength Exchange(입자강도교환), Boundary Condition(경계조건)

Abstract

We solve the integral representation of the Navier-Stokes equations in a lagrangian view by tracking the particles, which have vortex strengths. We simulate the unsteady viscous flow around an impulsively started cylinder using the vortex particle method. Particles are advanced via the Biot-Savart law for a lagrangian evolution of particles. The particle strength is modified based on the scheme of particle strength exchange. The solid boundary satisfies the no-slip boundary condition by the vorticity generation algorithm. We newly modify the diffusion scheme and the boundary condition for simulating an unsteady flow efficiently. To save the computation time, we propose the mixed scheme of particle strength exchange and core expansion. We also use a lot of panels to ignore the curvature of the cylinder, and not to solve the evaluation of the surface density. Results are compared to those from other theoretical and experimental works.

기호설명

u : 속도벡터
 ω : 와도
 ν : 동점성계수
 Ψ : 유동함수
 δt : 시간 간격
 ϵ : 입자의 핵 반경

U_∞ : 무한경계에서의 속도
 n : 물체표면의 법선벡터
 s : 물체표면의 접선벡터
 U_{slip} : 미끄럼속도
 K : 속도 커널
 Γ : 입자의 강도(순환)
 h : 입자간의 간격
 η : 입자의 모양 함수
 Λ : 격자재형성 커널
 γ : Vortex sheet의 강도
 Re : 레이놀즈 수

* 한양대학교 대학원

** 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : shlee@email.hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0445 FAX : (02)2290-0445

1. 서 론

유체역학에서 방정식들은 보통 속도장과 압력장의 함수로 표현된다. 그러나 유체 밀도가 일정한 경우에 이 방정식들을 와도와 유동함수 항으로 표시하면 압력항이 없어지고, 와도만으로 유동장을 구현할 수 있어 많은 이점이 있다.

와법(vortex method)은 Lagrangian적 방법으로 격자가 필요하지 않으며(grid-free), 무한에서의 경계조건이 자동으로 만족되고, 압력항을 계산할 필요가 없으며, 와도가 존재하는 곳만 계산하면 된다는 장점이 있다. 그러므로 여타의 격자를 필요로 하는 방법에 비해 유동장의 해석이 매우 용이하다.

와법은 처음에 Chorin, A. J.⁽⁵⁾에 의해 수치적 접근이 시도되었다. 이후에 Leonard, A.⁽¹²⁾와 Ghoniem, A. F.⁽⁹⁾에 의해 많은 발전을 이루어 왔다. 처음에 비점성 와도방정식을 수치적으로 풀기 위해 이산화된 와요소를 사용하였다. 각각의 입자의 위치를 발전시키고, 다시 재구성하여 속도장을 얻어내었다. 이후에 점성의 영향을 고려하는데 여러 가지 방법이 시도되었다. Chorin, A. J.⁽⁵⁾의 random walk, Leonard, A.⁽¹²⁾의 점성핵 성장(core expansion : CE), Degond, P. and Mas-Gallic, S.⁽⁷⁾의 입자강도교환(particle strength exchange : PSE), 그리고 Strickland, J. H., Kempka, S. N., and Wolfe, W. P.⁽¹⁵⁾가 제안한 확산속도(diffusion velocity) 등이 있다. 와법에서는 일반적으로 고체 표면에서의 경계조건으로 점착 경계조건을 만족시키는데 많은 어려움이 있다. Koumoutsakos, P., Leonard, A., and Pepin, F.⁽¹⁰⁾은 Lighthill, M. J.⁽¹³⁾가 제안한 고체벽면에서의 와도 생성을 수학적으로 접근하여 이 문제를 해결하였다. 그들은 Neumann 형태의 경계조건을 사용하여 고체 벽면에서 생성되는 와도를 존재하고 있는 고체 근방의 와의 강도를 조절하여 확산됨을 기초를 하여 좋은 결과를 얻었다.

급 출발하는 실린더 문제는 Blasius, H.⁽³⁾에 의해 처음으로 연구가 이루어져 왔고, 이후에 Bouard, R. and Contaceau, M.,⁽⁴⁾ Ta Phuoc Loc and Bouard, R.⁽¹⁶⁾에 의해 많은 실험적 고찰이 있었다. 이 실험적 연구는 수치해석의 검증문제로 많이 사용되어지고 있다.

본 연구에서는 급 출발하는 실린더 주위의 비

정상 점성유동을 해석하였으며, 위에서 지금까지 설명한 방법들 중 장점만을 취하여 입자와법을 개선하였다. 확산항은 PSE와 CE의 방법을 같이 사용하였다. 경계조건인 경우 표면에 분포된 와도 플럭스에 대한 밀도방정식을 풀어야 한다. 이 과정을 없애기 위해 표면에 더 많은 와도를 분포시켜 이 방정식을 풀지 않았다. 결과적으로, 최소한의 입자 개수로 정확도를 유지하면서 연산시간의 효율을 높일 수 있는 새로운 방법을 제안한다.

2. 수치해석 방법

2.1 지배방정식

2차원 비압축성 점성유동의 와도 수송방정식과 제반 경계조건에 대한 수학적 모델은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega &= \nu \nabla^2 \omega & \text{in } D \\
 \nabla^2 \psi &= -\omega & \text{in } D \\
 \mathbf{u} &= \nabla \times \psi & \text{in } D \\
 \omega(\mathbf{x}, 0) &= \omega_0(\mathbf{x}) & \text{in } D \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{U}_b(t) + \Omega(t) \hat{\mathbf{e}}_z \times (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_b) & \text{on } \partial D \\
 \mathbf{u} &\rightarrow \mathbf{U}_\infty & \text{at } \infty
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 \mathbf{u} 는 속도벡터, ω 는 와도, ν 는 동점성계수, ψ 는 유동함수(stream function), Ω 는 물체의 회전각속도, \mathbf{x}_s 는 물체의 위치벡터, 그리고 \mathbf{x}_b 는 물체의 질량중심벡터, \mathbf{U}_b 는 물체의 병진 속도벡터, \mathbf{U}_∞ 는 무한경계에서의 속도벡터이다.

2.2 알고리즘

와법에서는 입자의 궤적을 추적하는 대류항과 확산의 효과를 묘사하는 확산항으로 나누어서 계산하며, 시간 점진이 내포되어 있다. 고체경계가 없을 경우 입자는 대류되고 확산되며, 시간에 대해 적분하면 와도장을 쉽게 얻을 수 있다. 하지만, 고체경계가 존재하는 경우에 점착 경계조건(No-slip boundary condition)의 만족을 위해 알고

리즘이 새롭게 형성되어야 한다.

부분단계 알고리즘(A fractional step algorithm)

고체경계가 있는 경우에는 경계조건을 암시적으로(implicit) 만족시켜야 하기 때문에 어려움이 있다. 시간에 따라 동시에 적분하지 않고, 대신에 a fractional step algorithm을 적용한다. 지배방정식은 경계조건을 조절하여 잘라진 연산을 통하여 풀게 된다.

n 번째 시간 ($t - \delta t$)에서 점착 경계조건을 만족하는 와도장이 계산되어졌다고 가정하면 다음 시간 (t)에서의 해는 다음과 같은 두 단계의 과정으로 구현한다.

• **Step 1a** : 초기조건 $f(\mathbf{x}) = \omega^n(\mathbf{x}^n, n\delta t)$ 으로 다음방정식을 푼다.

$$\begin{aligned} \omega_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega &= 0 & \text{in } D \times [t - \delta t, t] \\ \omega(\mathbf{x}, t - \delta t) &= f(\mathbf{x}) & \text{in } D \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{n} & \text{on } \partial D \times [t - \delta t, t] \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 \mathbf{n} 은 물체의 법선 방향벡터, \mathbf{U}_s 는 물체 표면서의 접선방향 속도벡터이다.

입자는 식 (2)을 만족하기 위해 Biot-Savart 법칙을 통해 이동한다. 정확한 해를 얻기 위해서는 no-through 경계조건이 필요하고, 와도의 속도장에 대한 퍼텐셜 유동의 보정으로 이 경계조건을 만족시킨다. 퍼텐셜 유동의 보정은 표면에 vortex sheet이라는 요소를 사용하며 계산한다. 하지만, 다음단계에서 점착 경계조건이 만족되면 여기에서의 경계조건은 자동으로 만족된다.⁽¹¹⁾ 따라서 이 단계에서 경계조건을 직접적으로 만족시켜줄 필요가 없다.

• **Step 1b** : 그 다음에 식 (1)의 확산항을 분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \omega_t - \nu \nabla^2 \omega &= 0 & \text{in } D \times [t - \delta t, t] \\ \omega(\mathbf{x}, t - \delta t) &= f(\mathbf{x}) & \text{in } D \end{aligned} \quad (3)$$

이 단계에서는 경계조건을 직접적으로 만족시키지 않는다. 점착 경계조건은 다음 단계에서 만

족시켜 준다. PSE와 CE의 방법으로 확산항을 묘사한다.

첫 번째 단계가 수행되면 와도장 ω_1' 가 계산된다. 다시 말하면 첫 번째 단계에서는 입자의 새로운 위치와 강도를 계산한다.

• **Step 2a** : 와도 생성의 알고리즘으로 이 단계에서 점착 경계조건을 만족시킨다. 첫 번째 단계의 마지막에서 계산된 물체의 표면에 있는 vortex sheet (γ)를 와도 플럭스로 바꾼다.

$$U_{slip} \rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial n} \quad \text{on } \partial D \quad (4)$$

• **Step 2b** : 계산된 와도 유량은 유체에 와도로 생성된다. 와도장은 점성전달체계에 의해 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_2'}{\partial t} - \nu \nabla^2 \omega_2' &= 0 & \text{in } D \times [t - \delta t, t] \\ \omega_2'(\mathbf{x}, t - \delta t) &= f(\mathbf{x}) & \text{in } D \\ \frac{\partial \omega_2'}{\partial t} &= F(U_{slip}(\omega_1')) & \text{on } \partial D \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 전 단계에서 계산된 와도장을 동차의 초기조건으로 확산방정식을 푼다. 이에 대한 설명은 2.5절에 자세히 설명하였다.

두 번째 단계에서 구한 ω_2' 와 첫 번째 단계에서 구한 ω_1' 을 중첩하면 다음 시간에서의 와도 분포를 알 수 있다.

$$\omega^{n+1} = \omega_1' + \omega_2' \quad (6)$$

Step1에서의 물리적 의미는 계산된 와도는 확산항에 의해 와도가 높은 곳에서 낮은 곳으로 확산됨을 나타내며, Step2에서는 고체표면 근방에 점성에 의하여 와가 생성되는 물리적 메커니즘을 의미한다. 결국, 실린더가 급 출발할 경우 와도는 경계로부터 생성되어 후류로 흘러가게 된다.

2.3 대류항

본 연구에서 사용한 속도 Kernel은 Beale, J. T. and Majda, A.⁽²⁾가 제안한 높은 차수(6차)를

사용하였다. 입자에서의 유기속도는 중심에서 빨리 감소해야 하기 때문에, 높은 차수의 속도 Kernel은 낮은 차수보다 훨씬 안정적이다. 2차, 4차, 그리고 6차 차수의 속도 Kernel은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_\epsilon^{(2)}(z) &= \frac{(-y, x)}{2\pi r^2} (1 - e^{-r^2/\epsilon^2}) \\ K_\epsilon^{(4)}(z) &= \frac{(-y, x)}{2\pi r^2} (1 - 2e^{-r^2/\epsilon^2} + e^{-r^2/2\epsilon^2}) \\ K_\epsilon^{(6)}(z) &= \frac{(-y, x)}{2\pi r^2} \left(1 - \frac{8}{3} e^{-r^2/\epsilon^2} \right. \\ &\quad \left. + 2e^{-r^2/2\epsilon^2} - \frac{1}{3} e^{-r^2/4\epsilon^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

2.4 확산항

2.4.1 입자강도교환(Particle strength exchange)

PSE는 Degond, P. and Mas-Gallic, S.⁽⁷⁾에 의해 처음 제안되었다. 이후 Pepin, F.⁽¹⁴⁾과 Koumoutsakos, P.⁽¹¹⁾가 새롭게 고찰하고 안정성에 대한 연구를 행하였다. 일반적으로 이 방법은 최소의 입자중복이 유지되어 확산과정을 정확하게 나타낸다. 그러나, 대부분의 유동의 경우 유체 요소의 축적된 변형 때문에 대류는 입자의 위치를 크게 변형시킨다. 그래서 정확한 결과를 얻기 위해서는 입자를 재배치시켜주는 알고리즘(격자재형성 : remesh)이 필요하게 된다.

PSE의 수학적 접근 방법은 Laplacian 연산자 (Δ)와 적분연산자 (Δ^ϵ)를 근사화 시키는 생각에 근거하고 있다. 그리고, 입자의 위치를 구적 위치로서 사용하여 이 적분에 구적법을 적용하였다.

PSE 방법의 1차원이나 2차원에서의 알고리즘으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_i}{dt} &= \frac{\nu h^d}{\epsilon^2} \sum_{j=1}^N (\Gamma_j^{m-1} - \Gamma_i^{m-1}) \eta_\epsilon(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \\ d &= 1, 2 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 Γ_i 는 순환, ϵ 은 입자의 핵 반경, h 는 입자간의 간격, η 는 와의 모양함수, d 는 차원을 나타낸다.

본 연구에서 사용한 시간간격은 Pepin⁽¹⁴⁾의 관

계식을 사용하였다. 그는 Gaussian 함수를 사용하여 시간 간격에서 시간에 대한 Euler 적분을 할 때 다음의 사실을 관찰하였다.

$$\delta t = \frac{\epsilon^2}{4\nu} \quad (9)$$

2.4.2 점성핵 성장(Core expansion)

이 방법은 확산방정식의 선형성에 근간을 두고 있다(Leonard, A.⁽¹²⁾). 와도장은 요소 와도의 선형적 중첩으로 나타낼 수 있다. 이 각각의 와도가 확산방정식을 만족하면 전체의 장 또한 이를 만족하고 이는 전체장을 나타낸다. 각각의 입자에 대한 확산은 각각의 입자는 Oseen의 와 모델이라는 가정 하에서 핵 반경(core radius, ϵ)과 시간(t)에 대해 나타내면 다음과 같다.

$$\epsilon^2(t) = \epsilon^2(0) + 4\nu t \quad (10)$$

이는 확산방정식의 엄밀해이다. 에러는 오직 입자방법에 의한 초기조건의 간략화이다. 그러나, 와 핵의 연속적인 확장은 대류에 해를 끼치며, 그 에러는 입자 간략화로 $O(\epsilon^2)$ 이다.

2.4.3 격자재형성(Remesh)

입자의 대류는 입자 간격의 변형을 유도한다. PSE를 사용할 때 안정성과 정확성을 유지하기 위하여 입자는 잘 정렬된 격자의 새로운 장으로 격자재형성이 필요하다. 격자재형성은 와도장의 전체 순환이 보존되고, 일차 그리고 이차 운동량이 보존됨에 의해 유도된다. 순환점으로부터 간격 d , 거리 x 인 사각격자에 대한 순환으로 Bi-linear 순환이 사용되었으며, 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \Lambda(u) &= \begin{cases} 1 - (u)^2 & 0 \leq u \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1 - u)(2 - u) & \frac{1}{2} \leq u \leq \frac{3}{2} \\ 0 & u > \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 u 는 $|x|/h$ 이다. 위의 식은 임의의 위치

에 있는 와를 일정간격의 와도 대체시킬 때 사용하는 격자재형성 커널(Kernel)이다.

2.4.4 확산항의 개선책

본 연구에서는 확산항의 에러를 최소화하면서 연산을 가속시킬 수 있는 새로운 방법을 제안한다. 우선 고체 경계 근방은 벽면의 와도 생성으로 인해 복잡한 유동양상이 나타나게 된다. 그러므로 이를 구현할 수 있는 PSE를 사용한다. 그리고 고체 벽면에서 충분히 떨어진 부분에서는 고체 경계에서의 확산영향은 대류에 의한 영향보다 아주 작다. 따라서 이 부분은 CE를 사용한다.

이 점에 착안하여 입자의 수를 최소화하여 기존의 계산을 CRAY 같은 슈퍼컴퓨터에서 계산하던 것을 PC수준에서 계산하였다. 점성 핵의 지속적인 확장이 지배방정식에 수렴되지 않는 문제는 대류의 영향만을 고려하여 계산하였다. 이에 대한 개념을 Fig. 1에 나타내었으며, 고체 경계에서 와도 확산의 영향에 대한 크기는 실린더 반경의 두 배로 잡아 주었다.

2.5 경계조건

와도는 속도 구배로 암시된 유체 요소의 회전과 같다고 고려할 수 있다. 와도의 생성원인은 근본적으로 고체경계에서의 점성에 의해서이며, 경계층에서의 속도구배가 와도의 강도로 나타난다. 결국, 초기의 와도의 강도는 고체 근방에서만 존재할 것이다. Navier-Stokes 방정식의 와도 형태에 의존하는 수치적 기법에는 와도장에 상응하는

경계조건이 필요하다. 그와 같은 경계조건은 와도장과 속도장에 관련된 운동학과 같아야만 하고, 경계에서의 와도 생성의 물리적 메커니즘이 모델링 되어야만 한다.

2.5.1 고체경계면에서의 와도생성-Lighthill 모델

고체 경계에서의 와도 생성은 Lighthill⁽¹³⁾에 의해 제안되었다. 이 방법의 핵심은 와도장을 알면 Biot-Savart 법칙에 따라 전체 유동장을 알 수 있다는 것이다. 와도장은 대류되고 확산되지만 고체경계가 존재하므로 고체벽면에서 와도 생성이 계산되어야 한다. Lighthill 모델은 고체표면에서 와도 용출과 용입의 제어로 이 와도 생성을 수행한다. 미지수인 이 와도의 강도를 계산하기 위해서 그는 알고 있는 와도장으로부터 고체 경계면에서 속도장을 계산하여야만 한다는 것을 제안하였다. No-through 경계조건을 만족시키기 위하여 운동학적으로 고려하면, 퍼텐셜 유동에 이 속도장을 첨가하여 수정하여야 한다. 결과적으로 이 속도장은 점선속도성분이 0이 되지 않고 물체의 표면에 vortex sheet이라는 성분을 가지게 된다. 점착 경계조건과 고체 표면에서의 와도 생성을 모델링하기 위하여 vortex sheet은 벽면에서 와도의 생성과 관련되어 있어야만 한다. 결론적으로 Lighthill은 단위 면적 당 생성되는 와도는 vortex sheet과 부호만 반대인 양이어야 한다고 모델링하였다. 본 연구에서는 Neumann 형태의 와도 경계조건을 사용하였는데, 그 이유는 와도 수송방정식과 PSE로 확산항을 묘사하는 와법에 적합하기 때문이다.

Vortex sheet의 강도는 유동장의 유동함수를 사용하여 계산한다. 적분방정식은 결과적으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \gamma(s) - \frac{1}{\pi} \oint \frac{\partial}{\partial n} [\text{Log}|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(s')|] \times \gamma(s') ds' \\ = -2h(\mathbf{x}(s)) \\ h(\mathbf{x}(s)) = \frac{\partial \Psi_f}{\partial n}(\mathbf{x}(s)) + \frac{\partial \Psi_\Omega}{\partial n}(\mathbf{x}(s)) - U_s \cdot \mathbf{s} \end{aligned} \tag{12}$$

여기서 Ψ_f 는 외류에 대한 유동함수이고, Ψ_Ω 는 회전에 대한 유동함수이며, \mathbf{s} , \mathbf{n} 은 각각 점선방

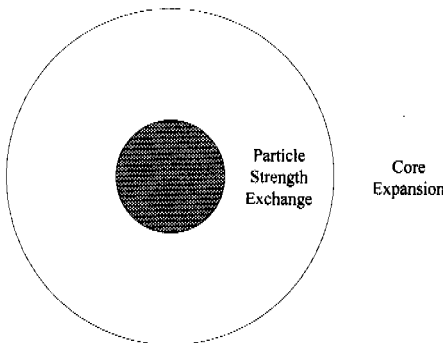


Fig. 1 Mixed scheme of particle strength exchange and core expansion

향과 법선방향 벡터이다.

이는 Neumann 형태의 와도에 대한 점착 경계 조건이 표현된 것이다. Vortex sheet의 강도에 대한 적분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\oint \gamma(s) ds = -2A_B [\Omega(t + \delta t) - \Omega(t)] \quad (13)$$

여기서 A_B 는 물체의 면적을 나타낸다.

식 (12)와 식 (13)을 경계요소(패널)법을 이용하여 이산화 하면 잘 조합된 방정식 계가 된다.⁽¹⁰⁾

2.5.2 와도플럭스의 분포

Koumoutsakos⁽¹¹⁾는 다음과 같이 초기조건과 Neumann 경계조건을 가지는 와도에 대한 확산방정식을 풀었다.

$$\begin{aligned} \omega_t - \nu \nabla^2 \omega &= 0 & \text{in } D \times [t - \delta t, t] \\ \omega(\mathbf{x}, t - \delta t) &= 0 & \text{in } D \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} &= F(\mathbf{x}, t) & \text{on } \partial D \times [t - \delta t, t] \end{aligned} \quad (14)$$

여기에서 F 는 식 (5)의 함수와 같은 함수이다. 그는 위의 방정식을 적분형 방정식으로 바꾸어서 다음과 같이 와도장을 얻어내었다.

$$\omega_i(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{2} \int_0^t \mu_i(\tau) \phi(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t - \tau) &= \frac{e^{-y^2/4\nu(t-\tau)}}{\sqrt{4\pi\nu(t-\tau)}} \\ &\times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{d+x}{\sqrt{4\nu(t-\tau)}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{d-x}{\sqrt{4\nu(t-\tau)}}\right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

표면밀도(μ_i)를 계산하면 다음과 같다.

$$\mu(s) \approx -2F(s)(1 - k(s)\sqrt{\pi\nu\delta t})^{-1} \quad (17)$$

표면 퍼텐셜이 와도 플럭스의 함수이기 위해 k 는 곡률반경을 나타내며, 반경 R 인 실린더의 경우는 곡률이 $k=1/R$ 으로 일정하고, 평판의 경우에는 0이다.

결과적으로, 점착 경계조건을 만족하기 위한 입자의 강도는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \Gamma_j^{n+1} &= \Gamma_j^n + h_j^2 \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{(1 - k_i \sqrt{\pi\nu\delta t})} \\ &\times \phi(x_{ij}, y_{ij}, \delta t) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 첨자 i 는 패널을 나타내고, 첨자 j 는 입자를 나타내며, 첨자 n 은 시간을 나타낸다. 그리고 x, y 는 각각 패널에서의 점선, 법선 방향의 좌표값이다.

2.5.3 경계조건 개선책

크게 두 가지의 방법으로 접근하였다. 경계조건을 만족시키기 위한 식 (18)의 변형과 미끄럼속도의 계산이다.

물체의 패널 수를 물체 주변에 있는 패널의 수보다 아주 많게 하여 물체의 밀도함수를 계산하지 않았다. 즉 곡률에 대한 항을 무시하였다. 본 연구에서는 표면에 둘러싸인 첫 번째 입자의 수보다 3배 많게 분포시켰다. 또한 식 (18)의 에러함수의 계산은 에러함수의 기본적인 값을 가지고 보간하여 사용하는 방법을 사용하였다. 결과적으로 식 (18)는 다음과 같이 간략화 할 수 있다.

$$\Gamma_j^{n+1} = \Gamma_j^n + h_j^2 \sum_{i=1}^M \gamma_i \phi(x_{ij}, y_{ij}, \delta t) \quad (19)$$

직교좌표계에서 미끄럼속도를 계산할 때 입자가 패널의 중앙점과 나란한 축에 놓일 경우 바람직하지 못한 값이 계산된다. 이를 최소한으로 줄이기 위해 다음과 같이 양쪽 패널요소의 값을 보간하여 계산하였다.

$$\gamma_j^{mean} = (\gamma_{j-1} + 2\gamma_j + \gamma_{j+1})/4 \quad (20)$$

3. 결과 및 고찰

3.1 검증 문제

PSE를 통해 엄밀해(ω^{ex})가 존재하는 간단한 1차원 문제와 2차원 문제에 적용하여 보았다.

· 예제 1 : 첫 번째 문제는 1차원 문제로 급

출발하는 평판의 Rayleigh 문제이다. 제차 초기조건 (u, ω)이고, 경계조건은 $u(0, t) = 1$ 이다.

· **예제 2** : 두 번째 문제는 2차원 구속되지 않은 영역에서의 확산문제로 $t=0$ 일 때 Gaussian 표준분포인 0.5의 와도 분포를 취하였다. 101×101 의 사각격자에 입자들을 이산화 하였다.

$$\omega(x, y, vt=0) = \frac{2}{\pi} e^{-2(x^2+y^2)} \quad (21)$$

격자는 $[-4,4] \times [-4,4]$ 의 계산영역이고, 입자는 $\epsilon/h=1$ 로 중복(Overlap)되어 있다. 여기서 h 는 입자간의 간격이다. 연산시 영역의 모서리 부분의 와도는 원래 0이기 때문에 영역은 무한대라고 가정한다. 각 입자들의 초기강도와 $vt=0.375$ 일 때의 엄밀해는 다음과 같다.

$$\Gamma(x_i, y_i, vt=0) = h^2 \omega(x_i, y_i, vt=0) \quad (22)$$

$$\omega(x, y, vt=0.375) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \quad (23)$$

수치해와 엄밀해의 에러(Error)를 측정하였다.

Fig. 2에 예제 1에 대한 결과를 나타내었다. 엄밀해와 아주 잘 맞는 결과를 보이고 있다. 급 출발하는 평판의 근방에 와도가 생성되어 근방으로 전파되는 비정상상태의 현상이 아주 잘 묘사되고 있음을 알 수 있다.

예제 2에 대한 $y=0$ 에서의 초기조건과 계산결과를 각각 Fig. 3와 Fig. 4에 나타내었다. 이 또한 아주 좋은 결과를 보이고 있으며, 수치해와 엄밀해의 RMS에러는 8.6×10^{-6} 으로 상당히 정확하다.

3.2 레이놀즈 수에 따른 수치해석

실린더 직경 (D), 물체의 병진 속도 (U), 그리고 동점성계수 (ν)에 따른 레이놀즈 수는 다음과 같다.

$$Re = \frac{UD}{\nu}$$

본 연구에서는 $Re=60, 200$ 에서의 유동양상을 관찰하였다. Lighthill⁽¹³⁾의 경계층 이론에 의하면

경계층 두께는 대략 $\sqrt{\nu \delta t}$ 의 차수를 갖고, 이는 실린더 직경과 속도가 일정할 경우에 $\sqrt{1/Re}$ 에 비례한다. 따라서 주어진 레이놀즈 수에 따라 경계층 두께를 예측할 수 있다. 본 연구에서는

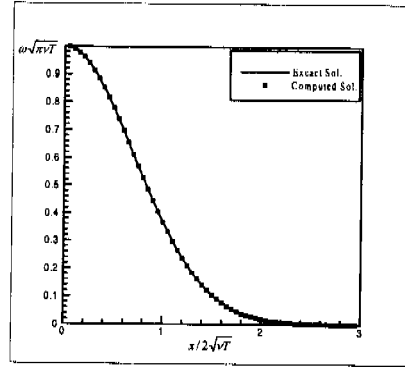


Fig. 2 Particle strength exchange solution of Example 1

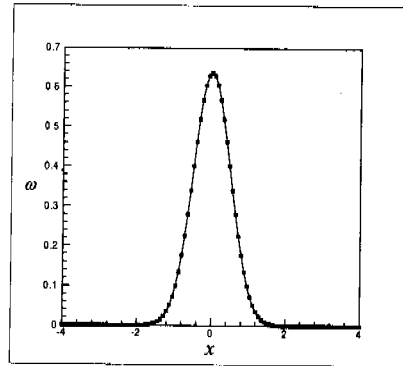


Fig. 3 Initial condition of Example 2

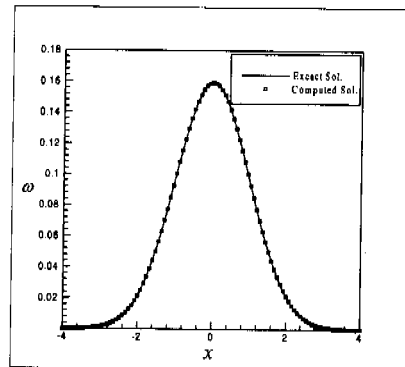


Fig. 4 Results of Example 2

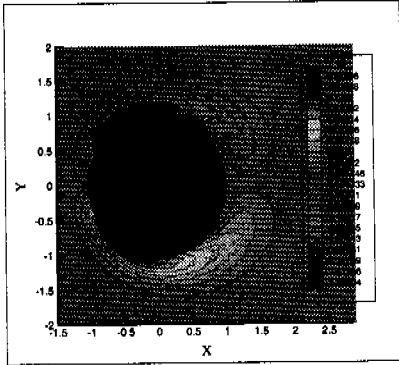


Fig. 5 Equi-vorticity contours($t=1\text{sec}$) for $Re=60$

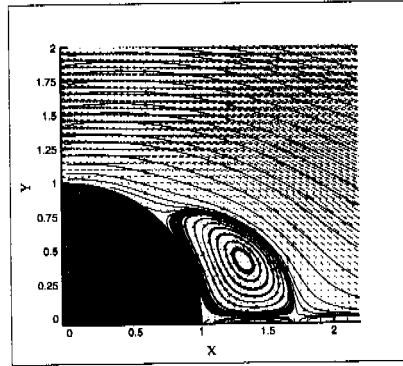


Fig. 8 Streamline time history($t=2\text{sec}$) and velocity field for $Re=60$

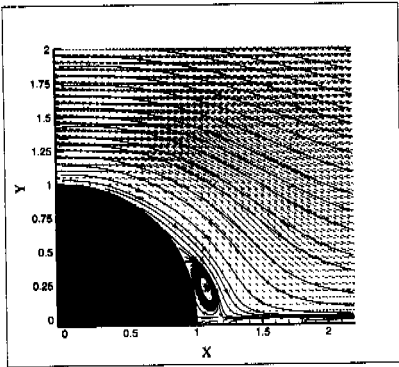


Fig. 6 Streamline time history($t=1\text{sec}$) and velocity field for $Re=60$

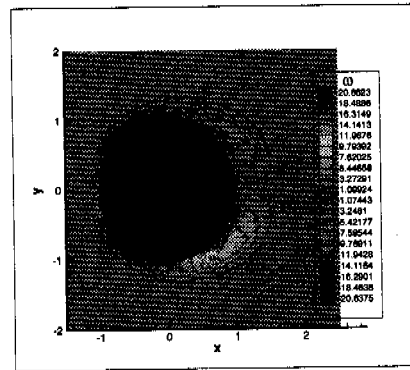


Fig. 9 Equi-vorticity contours($t=1.2\text{sec}$) for $Re=200$

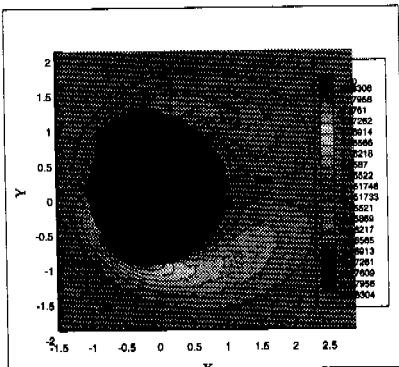


Fig. 7 Equi-vorticity contours($t=2\text{sec}$) for $Re=60$

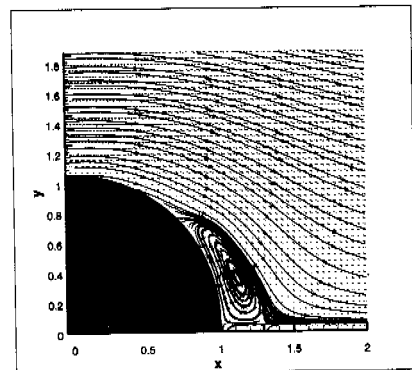


Fig. 10 Streamline time history($t=1.2\text{sec}$) and velocity field for $Re=200$

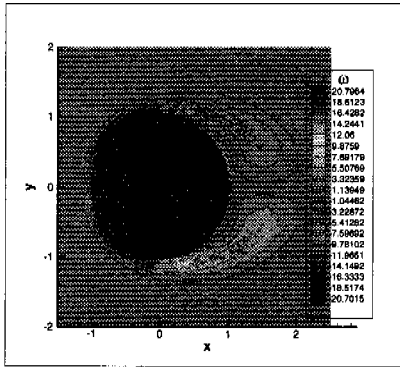


Fig. 11 Equi-vorticity contours($t=2.4$ sec) for $Re=200$

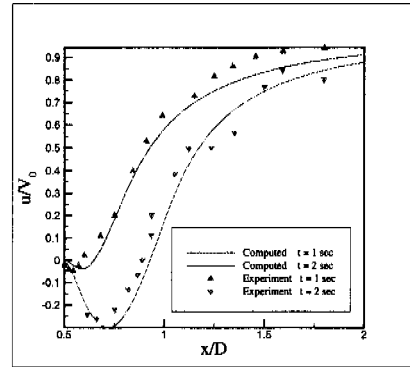


Fig. 14 Comparison of the velocity on the symmetry axis for $Re=200$ obtained numerically and experimentally

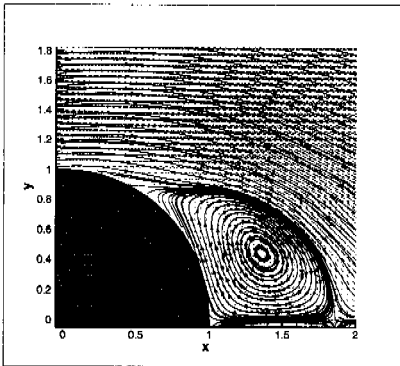


Fig. 12 Streamline time history($t=2.4$ sec) and velocity field for $Re=200$

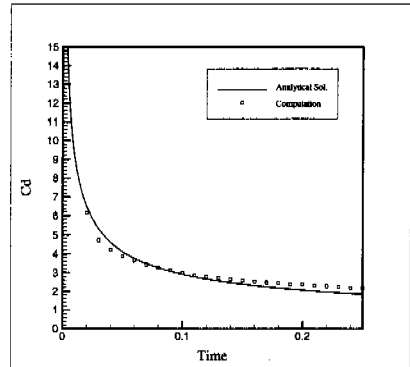


Fig. 15 The comparison of the drag force coefficient for $Re=60$

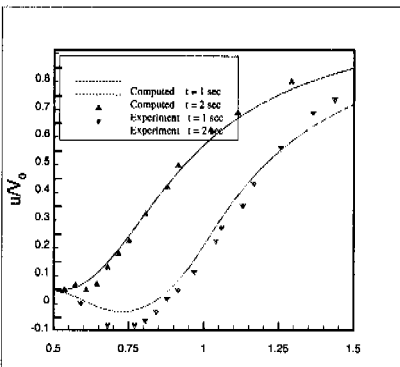


Fig. 13 Comparison of the velocity on the symmetry axis for $Re=60$ obtained numerically and experimentally

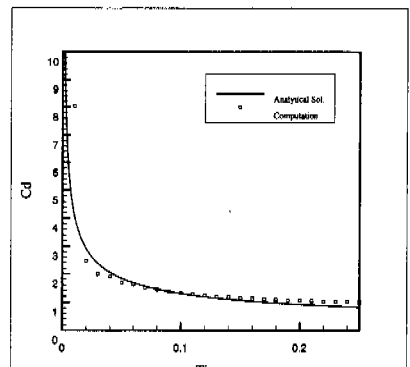


Fig. 16 The comparison of the drag force coefficient for $Re=200$

이 경계층 두께에 대략 3개 정도의 입자를 일정 간격에 배치시켰다. 실린더의 직경은 2로 일정하게 하였다.

3.3 속도장, 유선 그리고 와도장

계산된 와도장을 앞에서 설명한 격자재형성이나 Christiansen⁽⁶⁾이 제안한 cloud-in-cell 방법을 이용하여 일정한 간격의 격자에서의 속도장, 와도장과 그에 따른 유선을 구하였다.

Fig. 5와 Fig. 7에 $Re=60$ 에서의 와도장을 나타내었으며, Fig. 9와 Fig. 11에 $Re=200$ 에서의 와도장을 나타내었다. 시간이 지나면서 실린더 뒤쪽으로 1차 와류의 와도와 반대 방향의 와도가 생성되어서 성장됨을 보아 속도의 역구배가 나타나고 있음을 알 수 있다.

Fig. 6와 Fig. 8에 $Re=60$ 에서의 순간 속도장과 유선을 나타내었다. 시간이 진전됨에 따라 실린더 뒤쪽에 와류가 성장됨을 정확히 잘 묘사하였다. 그리고, Fig. 10와 Fig. 12에 $Re=200$ 에서의 순간 속도장과 유선을 나타내었다.

두 가지의 레이놀즈 수에 따른 수치해석 결과를 보면, $Re=60$ 일 때의 와도가 $Re=200$ 일 때의 와도보다 더 넓게 분포되어 있는 것을 알 수 있다. 이는 작은 레이놀즈 수에서 확산의 영향이 크다는 물리적 의미를 잘 나타내고 있음을 확인시켜주는 것이다. 그리고 와도값은 작은 레이놀즈 수에서보다 큰 레이놀즈 수에서 크다는 물리적 현상 또한 결과 그림에서 알 수 있다.

3.4 결과 비교

Bouard, R. and Contaceau, M.⁽⁴⁾의 실험적 연구에 의하면, 급 출발하는 실린더 후류의 와류의 성장은 레이놀즈 수와 관련되어 있으며 이에 따라 다른 양상을 나타낸다고 하였다.

입자와법에서의 변수는 오직 와도와 이 와들의 위치이다. 또한 속도장은 이들에 의해 정해지며 와도의 값만으로 수치해석을 행한다. 따라서, 이 와도에 대한 정량치의 검증 문제는 실험치와 속도장을 비교하여 보는 것이다. 수치해석의 검증 문제로 $Re=200$ 일 경우와 $Re=60$ 일 경우의 실린더 뒤쪽 대칭축의 상대속도를 그들의 실험 결과와 비교하였다. Fig. 13과 Fig. 14에서 보면 실험 결과와 잘 맞는다는 것을 확인할 수 있다.

실린더가 급 출발할 때 항력(C_d)은 비교적 짧

은 시간에 해석해가 존재한다(Bar-Lev, M., and Yang, H. T.⁽¹⁾). 와법에서는 압력항이 없고 오직 와도와 속도만으로 항력계수를 구하여야 하므로 어려움이 있다. 하지만 와도의 임펄스(impulse)로 이를 계산할 수 있다.⁽¹¹⁾ Fig. 15와 Fig. 16에서 보는 것처럼 각각의 레이놀즈 수에서 아주 잘 맞는 것을 확인 할 수 있다.

레이놀즈 수가 커질수록 경계층 두께는 작아지게 되며, 이를 수치해석하기 위하여 고체 경계에서 상당히 많은 입자를 분포시켜야 한다. 컴퓨터의 연산시간과 용량을 극복할 수 있는 대책이 시급하다.

4. 결론

급 출발하는 실린더 주위의 유동장의 비정상상태를 입자와법을 사용하여 수치해석하였다. 대류항은 Biot-Savart 법칙을 이용하였으며, 확산항은 입자간도교환과 점성확장 성장의 방법을 병행하여 사용하였다. 경계조건으로 점착 경계조건을 만족시켜 주기 위하여 물체 주변의 입자의 강도를 조절하여 경계조건을 만족시켜 주는 알고리즘을 사용하였다. 위와 같은 알고리즘을 사용하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 비교적 짧은 시간의 비정상 상태의 유동해석에 입자와법이 적합함을 확인하였다.
- (2) 고체경계에서 생성되는 와도를 정량화 하였다.
- (3) 확산항, 그리고 경계조건을 효율적으로 계산할 수 있는 방법을 제안하였다.

본 연구에서는 급 출발하는 실린더의 시작부분에서의 유동장을 잘 얻을 수 있었다. 하지만, 시간이 진전됨에 따라 더 많은 연산요소(입자)가 필요하게 되며, 연산시간은 계속 증가하게 되는데, 병렬처리와 같은 알고리즘의 개발이 뒤따라야 한다고 본다.

참고문헌

- (1) Bar-Lev, M. and Yang, H. T., 1975, "Initial Flow Field Over An Impulsively Started Circular Cylinder," *J. of Fluid Mech.* Vol. 72, pp. 625~647.
- (2) Beale, J. T. and Majda A., 1985, "Higher

- Order Accurate Vortex Methods with Explicit Velocity Kernels," *J. of Comput. Phys.* Vol. 58, pp. 188~208.
- (3) Blasius, H. 1908. "Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung," *Z. angew. Math. Phys.* Vol. 56, p. 1.
- (4) Bouard, R. and Contauceau, M., 1980, "The Early Stage of Development of the Wake Behind an Impulsively Started Cylinder for $40 \leq Re \leq 10^4$," *J. Fluid Mech.* Vol. 101, pp. 583~607.
- (5) Chorin, A. J., 1973, "Numerical Study of Slightly Viscous Flow Simulation," *J. Fluid Mech.* Vol. 57, pp. 785~796.
- (6) Christiansen, J. P., 1997, "Vortex Methods for Flow Simulation," *J. Comput. Phys.* Vol. 135, pp. 189~197.
- (7) Degond, P. and Mas-Gallic, S., 1989, "The Weighted Particle Method for Convection-Diffusion Equations, Part I : The Case of an Isotropic Viscosity, Part II : The Anisotropic Case," *Math. Comput.* Vol. 53, pp. 485~526.
- (8) Greengard, C., 1985, "The Core Spreading Vortex Method Approximates the Wrong Equation," *J. Comput. Phys.* Vol. 61, pp. 345~348.
- (9) Knio, O. M. and Ghoniem, A. F., 1991, "Three-Dimensional Vortex Simulation of Rollup and Entrainment In A shear Layer," *J. Comput. Phys.* Vol. 97, pp. 172~223.
- (10) Koumoutsakos, P., Leonard, A., and Pepin, F., 1994, "Boundary Conditions for Viscous Vortex Methods," *J. Comput. Phys.* Vol. 113, pp. 52~61.
- (11) Koumoutsakos, P., 1993, "Direct Numerical Simulations of Unsteady Separated Flows Using Vortex Method," Ph.D. thesis, Caltech.
- (12) Leonard, A., 1980. "Vortex Methods for Flow Simulation," *J. of Comput. Phys.* Vol. 37, pp. 289~335.
- (13) Lighthill, M. J., 1963, "Introduction. Boundary Layer Theory," J. Rosenhead Ed., Oxford Univ. Press, New York, pp. 54~61.
- (14) Pepin, F., 1990, "Simulation of the Flow Past an Impulsively Started Cylinder Using a Discrete Vortex Method," Ph.D. thesis, Caltech.
- (15) Stickland, J. H., Kempka, S. N., Wolfe, W. P., 1995, "Viscous Diffusion of Vorticity in Unsteady Wall Layers Using the Diffusion Velocity Concept," Proceedings of the Forum on Vortex Methods for Engineering Applications, Albuquerque, NM. Feb. pp. 22~24.
- (16) Ta Phuoc Loc and Bouard, R., 1985, "Numerical Solution of the Early Stage of the Unsteady Viscous Flow Around a Circular Cylinder: a Comparison with Experimental Visualization and Measurement," *J. of Fluid Mech.*, Vol. 160, pp. 93~117.