

원통좌표계에서 반경지수도식에 의한 이산화방법

김 찬 중*
(1999년 9월 29일 접수)

A Discretization Method Via a Radial-Exponential Scheme in the Cylindrical Coordinate

Cham-Jung Kim

Key Words: Radial-Exponential Scheme(반경지수도식), Exponential Scheme(지수도식), Exact Solution(엄밀해)

Abstract

In the cylindrical coordinate, the origin $r=0$ plays a role of the singularity and thus much care is needed to treat near-origin region. This work presents a new numerical scheme which is derived from the exact solution under the one-dimensional assumption in the radial direction. It is shown that the near-origin region can be properly treated by the radial-exponential scheme, whereas the numerical results from the conventional exponential scheme deviate considerably from the exact solution. Over the region of small $(\delta r)_e/r_e$, the present radial-exponential scheme turns out to be almost the same as the exponential scheme.

1. 서 론

전달현상의 수치해석에서 우수한 수치기법의 개발은 해의 정확성과 경제적인 계산 측면에서 매우 중요한 일이다. 현재 가장 널리 알려져 있는 상류도식(upwind scheme) 등의 수치도식은 기본적으로 주어진 좌표방향으로 1차원적인 거동을 가정한 것이다. 최근 유동방향까지 고려한 다차원적인 수치기법의 개발이 연구되고 있으나 매우 복잡한 공식화로 인하여 아직 시험단계에 머물고 있다.

수치기법의 개발연구에서 가장 주목을 받은 것은 Spalding⁽¹⁾의 지수도식(exponential scheme)으로 확산항과 대류항을 결합한 형태를 이용하는 접근 방법의 효시가 되었다. 그러나, 지수도식을 비롯하여 이의 변형인 멱승도식(power law scheme),

하이브리드도식(hybrid scheme) 등은 모두 직각좌표계를 기준으로 개발된 것이다.^(2,3)

스칼라 물리량의 보존방정식을 원통좌표계에서 표현하면 $r=0$ 인 원점에서의 특이성 때문에 수치적인 처리시 주의가 필요하다. 더욱이 원점 근처에서 지수도식을 적용하는 것은 오차가 수반될 가능성이 매우 높지만 현재까지 이를 해결하는 수치기법의 개발에 대한 연구는 보고되지 않고 있다.

따라서 본 연구에서는 원통좌표계에서 반경방향의 이산화에 알맞는 수치도식을 개발하고 이를 검증하고자 한다.

2. 반경지수도식의 공식화

다음의 연속방정식과 스칼라방정식

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho u = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \nabla \cdot (\rho u \phi - \Gamma \nabla \phi) = s \quad (2)$$

에서 과도항과 생성항이 없는 경우를 고려하면

* 회원, 서울대학교 기계항공공학부
E-mail : kimcj@plaza.snu.ac.kr
TEL : (02)880-1662 FAX : (02)883-0179

위의 두 식은 원통좌표계에서

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u\phi - r\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r}) \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v\phi - \Gamma \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) \\ + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}) = 0 \end{aligned}$$

으로 된다. 여기서 방위방향 및 축방향의 변화가 없는 것으로 가정하면 $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ 및 $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ 으로 될 수 있으므로

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u\phi - r\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r}) = 0 \quad (4)$$

인 간단한 형태가 된다. 이러한 1차원 가정으로부터 엄밀해를 구하여 수치도식을 유도하는 것은 직각좌표계에서 지수도식을 유도한 과정⁽¹⁾과 유사하다.

2.1 1차원가정에 따른 엄밀해

먼저 식 (3)으로부터 $r\rho u$ 가 일정하므로 새로운 상수

$$\beta \equiv \frac{r\rho u}{\Gamma} \quad (5)$$

를 도입하고, 또한 총 플럭스

$$J \equiv r\rho u\phi - r\Gamma \frac{d\phi}{dr} \quad (6)$$

를 정의하면 식 (4)는

$$\frac{d}{dr} \left[\Gamma \left(\beta\phi - r \frac{d\phi}{dr} \right) \right] = 0 \quad (7)$$

인 상미분방정식으로 되고, 이것을 확산계수 Γ 가 일정하다는 가정하에 풀면

$$\phi = \begin{cases} A + Br^\beta & \beta \neq 0 \\ A + B \ln r & \beta = 0 \end{cases} \quad (8)$$

인 일반해를 얻게 된다. 특히 $\beta=0$ 은 유동이 없고 확산만 존재하는 경우를 말한다. 논의의 편의상 먼저 대류가 포함되어 있는 경우에 대해서 수치도식을 유도하고 마지막으로 $\beta=0$ 인 경우를 고려하기로 한다.

2.2 대류가 존재하는 경우 ($\beta \neq 0$)

식 (8)로 주어진 엄밀해에서 $\beta \neq 0$ 인 경우를 먼저 고려하기로 한다. 구간 $0 < r_P \leq r \leq r_E$ 에서

$$\begin{aligned} \phi = \phi_P \quad \text{at } r = r_P \\ \phi = \phi_E \quad \text{at } r = r_E \end{aligned} \quad (9)$$

를 만족하는 분포는 식 (8)로부터

$$\frac{\phi - \phi_P}{\phi_E - \phi_P} = \frac{(r/r_P)^\beta - 1}{(r_E/r_P)^\beta - 1} \quad (10)$$

가 된다. 계속해서

$$\begin{aligned} \phi = \phi_P + (\phi_E - \phi_P) \frac{(r/r_P)^\beta - 1}{(r_E/r_P)^\beta - 1} \\ \frac{d\phi}{dr} = (\phi_E - \phi_P) \frac{\frac{1}{r_P} \beta (r/r_P)^{\beta-1}}{(r_E/r_P)^\beta - 1} \end{aligned}$$

을 구하고, 식 (6)에 다시 대입하면

$$J = \Gamma \left[\beta\phi_P + (\phi_P - \phi_E) \frac{\beta}{(r_E/r_P)^\beta - 1} \right] \quad (11)$$

인 형태의 총 플럭스를 얻게 된다. 그런데 위 식에서 분모는

$$\left(\frac{r_E}{r_P} \right)^\beta - 1 = e^{\frac{r\rho u}{\Gamma} \ln \frac{r_E}{r_P}} - 1 \quad (12)$$

으로 변형되는 것을 알 수 있다. 여기서 질량유량, 확산컨덕턴스 및 페클레 수를

$$F_e \equiv (r\rho u)_e \quad (13)$$

$$D_e \equiv \frac{\Gamma_e}{\ln(r_E/r_P)} \quad (14)$$

$$P_e \equiv \frac{F_e}{D_e} \quad (15)$$

와 같이 정의하면, Fig. 1에 보인 검사체적의 e 면에서의 총 플럭스는 식 (11)로부터

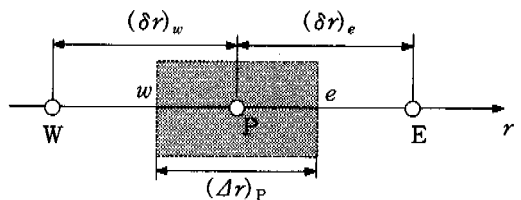


Fig. 1 Typical control volume for cell P

$$J_e = F_e \phi_P + a_E(\phi_P - \phi_E) \quad (16)$$

$$\frac{a_E}{D_e} = \frac{P_e}{e^{P_e} - 1} \quad (17)$$

가 된다. 이 결과는 직각좌표계에서 유도한 지수도식과 같은 형태이며 따라서 반경지수도식(radial-exponential scheme)으로 부르기로 한다.

2.3 확산만이 존재하는 경우 ($\beta = 0$)

확산만 존재할 때는 검사체적면을 통과하는 질량유량이 0 이므로 $P = 0$ 인 경우에 대응한다. 따라서 식 (17)로부터 $P \rightarrow 0$ 인 극한을 취하면

$$\frac{a_E}{D_e} = \lim_{P_e \rightarrow 0} \frac{P_e}{e^{P_e} - 1} = 1 \quad (18)$$

을 얻는다. 위 식과 식 (14) 및 식 (16)을 결합하면 총 플럭스는

$$J_e = \frac{\Gamma_e}{\ln(r_E/r_P)} (\phi_P - \phi_E) \quad (19)$$

으로 결정된다. 그런데, 이 결과는 $\beta = 0$ 일 때 엄밀해 식(8)로부터 구한 분포

$$\frac{\phi - \phi_P}{\phi_E - \phi_P} = \frac{\ln(r/r_P)}{\ln(r_E/r_P)} \quad (20)$$

를 이용하여 직접 구한 것과 같게 된다. 다시 말해서, $\beta = 0$ 인 경우는 이미 식 (17)에 포함되어 있다.

3. 지수도식과의 비교

반경방향의 대류·확산에 대해서 직각좌표계에서 유도된 지수도식 (1)을 사용하는 경우

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u \phi - r \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r}) = 0$$

의 이산화방정식은 Table 1에 나타낸 바와 같다. 또한 비교를 위하여 반경지수도식에 의한 이산화방정식을 함께 정리하였다.

지수도식과 본 연구에서 유도한 반경지수도식은 확산컨덕턴스의 계산에서 서로 다른 점을 알 수 있다. Fig. 1에 보인 격자의 배치에서는 항상 $0 < \frac{1}{2}(r_w + r_e) = r_P$ 이므로 $(\delta r)_e = r_E - r_P$ 와 $2r_e$ 의 비율은 균일격자계를 가정할 경우

Table 1 Comparison between exponential and radial-exponential schemes

• Differential equation	
$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u \phi - r \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r}) = 0$	
• Discretization equation	
$J_e - F_e \phi_P = a_e (\phi_P - \phi_E)$	
$\frac{a_e}{D_e} = \frac{P_e}{\exp(P_e) - 1}$	
$P_e = \frac{F_e}{D_e}$	
$F_e = (r \rho u)_e$	
$D_e = \begin{cases} \frac{r_e \Gamma_e}{(\delta r)_e} & \text{exponential} \\ \frac{\Gamma_e}{\ln(r_E/r_P)} & \text{radial exponential} \end{cases}$	

$$\delta \equiv \frac{(\delta r)_e}{2r_e} < \frac{1}{2} \quad (21)$$

인 부등식을 만족한다. 따라서 반경지수도식에 포함된 로그항은 균일격자계의 경우

$$\begin{aligned} \ln \frac{r_E}{r_P} &= \ln \left[r_e + \frac{(\delta r)_e}{2} \right] - \ln \left[r_e - \frac{(\delta r)_e}{2} \right] \\ &= \left(\delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \dots \right) + \left(\delta + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} + \dots \right) \\ &= 2\delta + \frac{2}{3} \delta^3 + \frac{2}{5} \delta^5 + \dots \end{aligned}$$

즉

$$\ln \frac{r_E}{r_P} = \frac{(\delta r)_e}{r_e} \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left[\frac{(\delta r)_e}{r_e} \right]^2 + \dots \right\} \quad (22)$$

으로 전개된다. 따라서 지수도식과 반경지수도식에서 사용되는 확산컨덕턴스는

$$\frac{(D_e)_{exp.}}{(D_e)_{radial-exp.}} = 1 + \frac{1}{12} \left[\frac{(\delta r)_e}{r_e} \right]^2 + \dots \quad (23)$$

의 관계가 있으므로, $r_e \gg (\delta r)_e$ 인 경우 지수도식과 반경지수도식은 거의 차이가 없게 된다.

그러나 원점 근처에서는 $(\delta r)_e/r_e$ 의 값이 비교적 클 수밖에 없기 때문에 지수도식을 사용한 결과와 반경지수도식을 사용한 결과는 서로 차이가 나타날 것이다. 또한 원점에서 멀리 떨어져

있는 점이라도 비율 $(\delta r)_e/r_e$ 가 충분히 작지 않다면 어떤 도식을 사용하는가에 따라 해가 달라질 가능성이 있다.

4. 계산결과

원통좌표계에서 원점 $r=0$ 은 특이점으로 존재하므로 보통 $r=\epsilon \ll 1$ 과 같이 충분히 원점에 가까운 점을 원점을 대신하는 경계로 사용하는 것이 일반적이다. 이러한 접근방법은 보통 ϵ 의 값을 변화하여도 해에 영향을 미치지 않는다는 것을 확인함으로써 그 타당성을 검증하게 된다.

4.1 원점 근처의 경우

원점 근처에서 수치도식의 선택이 어떤 영향을 미치는가를 살펴보기 위해서 구간 $0.01 \leq r \leq 1$ 을 택하였다. 경계조건은

$$\phi(0.01) = 1, \quad \phi(1) = 10 \quad (24)$$

으로 주어진 경우에 대한 해를 구하였다. 그리고 대류의 영향을 살펴보기 위하여 β 의 값을 달리 하면서 수치해를 각각 구하였다.

Fig. 2는 지수도식과 반경지수도식을 사용하여 구한 수치해와 엄밀해를 서로 비교한 것이다. 본 연구에서 사용한 반경지수도식은 엄밀해를 이용하여 유도되었기 때문에 수치결과는 당연히 원래

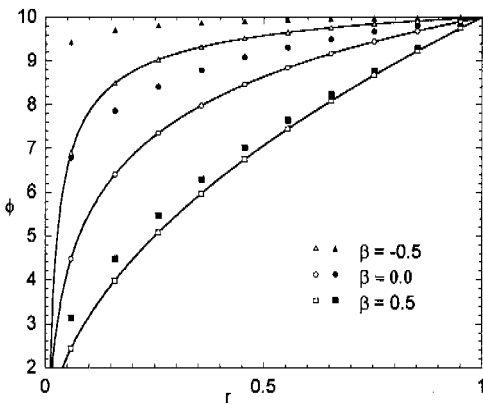


Fig. 2 Comparison between the exact solution and numerical results; (a) exponential scheme (solid symbols) and (b) radial-exponential scheme (open symbols)

의 엄밀해와 동일하게 되며 이는 Fig. 2에서 확인할 수 있다. 그러나 지수도식을 사용한 경우에는 β 의 값에 따라 오차의 크기만 달라질 뿐 엄밀해와 매우 어긋나 있는 것을 알 수 있다. 특히 원점 근처에서의 영향이 원점에서 비교적 멀리 떨어진 점까지 전파되어 있는 것을 알 수 있다.

4.2 생성항을 가지는 경우

본 연구에서 제시한 반경지수도식은 생성항이 없는 경우로부터 유도한 것이므로 생성항을 가지는 경우 수치해는 엄밀해와 일치하지 않을 것이다. 이를 검증하기 위해서 아래와 같이 부차원화된

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = S \quad (25)$$

$$-\frac{d\phi}{dr} \Big|_{r=0} = 0, \quad -\frac{d\phi}{dr} \Big|_{r=1} = B\phi(1) \quad (26)$$

순수한 열전도방정식을 고려하기로 한다. 위에 대응하는 엄밀해는

$$\phi = \frac{S}{4} \left(\frac{2}{B} + 1 - r^2 \right) \quad (27)$$

으로 주어진다.

Fig. 3에는 $S=4, B=1$ 인 경우에 대한 수치해와 엄밀해를 나타내었다. 수치계산시 ϵ 의 값은 0.0001을 택하였다. 지수도식과 반경지수도식 모두 비교적 엄밀해와 가까운 결과를 보여준다. 이것은 원점 근처에서의 경계조건이 단열로 주어져 있으므로 확산계수의 크기가 해에 별 영향을 미치지 못한 때문으로 생각된다.

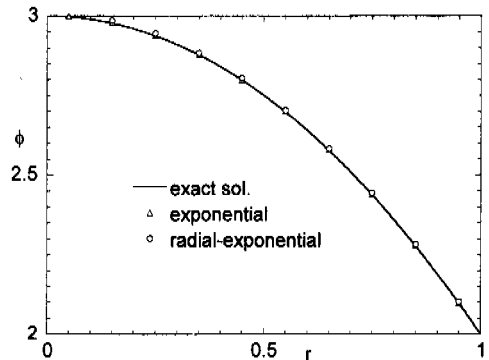


Fig. 3 Comparison between the exact solution and numerical results for the conduction problem with source; (a) exponential scheme (triangles) and (b) radial-exponential scheme (circles)

5. 결 론

원통좌표계에서 반경방향의 확산항과 대류항의 결합을 이산화하기 위한 수치도식을 개발하였다. 본 연구에서 개발된 반경지수도식은 주어진 좌표 방향에 대한 1차원 가정으로부터 구한 엄밀해에 기초한 것이므로, 기존의 지수도식에 비하여 원점 근처에서의 확산을 다룰 때 유리한 것으로 확인되었다. 그러나, 원점에서 단열형태의 경계조건이 주어질 때는 지수도식과 반경지수도식의 차이가 크지 않음을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 서울대학교 정밀기계설계공동연구소 (TPMRC) 및 기계분야 BK-21 사업의 지원을 받아 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Spalding, D. B. 1972, "A Novel Finite- Difference Formuation for Differential Expression Involving Both First and Second Derivatives," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 4, p. 551.
- (2) Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York.
- (3) 김찬중, 1998, "길잡이 전산유체역학," 문운당.