

테이퍼를 갖는 맥동관의 2차원 해석모델

백 상 호* · 정 은 수**

(1999년 9월 3일 접수)

Two-Dimensional Analysis Model for Tapered Pulse Tubes

Sang Ho Baek and Eun Soo Jeong

Key Words: Pulse Tube Refrigerator(맥동관냉동기), Pulse Tube(맥동관), Steady Mass Streaming(정상상태 질량흐름), Two-Dimensional Analysis(2차원 해석)

Abstract

A two-dimensional model for pulse tubes with tapered cross-section was proposed. Net enthalpy flow and steady mass streaming were investigated by two-dimensional analysis of mass, momentum and energy equations of the gas as well as energy conservation of the tube wall. Steady mass flux profiles show good agreement with the previous approximate solution. It was shown that steady mass streaming can be reduced by tapering a pulse tube and by increasing the length of a pulse tube. Effects of the velocity phase angle and frequency on steady mass streaming were shown.

기호설명

a : 음속($=\sqrt{\gamma RT_m}$)

$\langle \dot{H} \rangle$: 정미엔탈피유동

i : 허수단위 ($=\sqrt{-1}$)

k : 열전도도

L : 맥동관의 길이

l : 맥동관벽의 두께

\dot{m}_s : 질량유량의 정상성분

Ma : 마하수 ($=as_{c0}/\sqrt{\gamma RT_H}$)

p : 압력

Pr : 프란틀수

R : 맥동관의 반지름

R_g : 기체상수

r : 반경방향 좌표

s : 단면평균 변위 길이

T : 온도

T_H : $x=L$ 에서의 온도, 기준온도

t : 시간

u : x -방향 속도

v : r -방향 속도

x : 축방향 좌표

y : x 에 수직인 직교좌표

그리스문자

β : 맥동관의 반지름과 속도경계층 두께의 비를 나타내는 무차원 변수(식 (20))

γ : 비열비

μ : 점도

ρ : 밀도

\emptyset : 맥동관의 테이퍼각

ϕ : 맥동관 양단의 속도 사이의 위상차

* 한일MEC 기술본부

E-mail:whitesh@hanmail.net

TEL : (02)709-4878 FAX : (02)796-3969

** 회원, 홍익대학교 기계공학과

E-mail:esjeong@wow.hongik.ac.kr

TEL : (02)320-1676 FAX : (02)322-7003

ω : 각속도

상첨자

* : 부차원변수

~ : 공역복소수

하첨자

0 : 기준값, 테이퍼각이 0일 때의 값

1 : 1차항

2 : 2차항

C : 맥동관의 저온부 ($x=0$)

H : 맥동관의 고온부 ($x=L$)

m : 시간평균

s : 2차항의 정상성분

w : 맥동관벽

1. 서론

맥동관냉동기(pulse tube refrigerator)는 냉동기의 수명을 저하시키는 저온구동부가 없으므로 신뢰성이 높고 저온부의 진동이 작으며, 또한 구조가 간단하다는 장점들을 갖고 있다. 맥동관냉동기는 신뢰성이 높다는 장점을 갖고 있으므로 초기에는 우주왕복선 탑재용이나 상온초전도체 냉각용의 소형 극저온냉동기로 개발되어 왔다. 그러나, 맥동관냉동기의 단점이었던 낮은 효율도 새로운 형태의 맥동관냉동기의 개발로 스틸링냉동기와 비슷한 수준으로 향상되었기 때문에 미국, 일본, 중국 등에서 소형 극저온냉동기 뿐만 아니라 대용량의 천연가스 액화용 냉동기나 전자부품을 극저온으로 냉각시키기 위한 냉동기로 실용화하려는 연구들이 매우 활발히 진행되고 있다.⁽¹⁻³⁾

Lee 등⁽⁴⁾은 기본형과 오리피스형 맥동관냉동기 내부에 정상상태의 대규모 흐름(steady large scale streaming) 형태의 이차유동(secondary flow)이 존재한다는 것을 실험적으로 보였고, 이 이차유동에 수반되는 정상상태의 엔탈피흐름(enthalpy streaming)이 맥동관냉동기의 성능을 저하시키는 손실로 작용한다고 제안하였다. Olson과 Swift⁽⁵⁾는 맥동관의 단면적을 적절히 변화시키면 정상상태의 질량흐름을 억제할 수 있다는 것을 맥동관의 직경이 속도와 온도경계층의 두께에 비하여 매우 큰 경우에 대하여 해석적으로 보였고, 그들이 구

한 최적 테이퍼 각도에서 오리피스 맥동관냉동기의 냉동용량이 상당히 증가한다는 것을 실험적으로 보였다.

맥동관 내부의 정상상태의 이차유동과 질량흐름에 관한 지금까지의 연구들⁽⁶⁻¹¹⁾은 모두 단면적이 일정한 맥동관에 대하여 이루어졌으며, 평균 온도의 축방향 기울기를 고려하지 않았거나 평균 온도분포가 선형적이라고 가정하였다. Lee 등⁽¹⁰⁾은 맥동관 내부의 작동가스와 맥동관벽 사이의 열전달이 작동가스의 온도변화의 진폭과 위상각을 변화시켜 정미엔탈피유동에 영향을 미친다는 것을 보였다. 백상호 등⁽¹²⁾과 백상호와 정은수⁽¹³⁾는 단면적이 일정한 맥동관의 축방향 평균온도분포를 직접 구할 수 있는 맥동관의 2차원 해석모델을 제시하였다.

본 연구에서는 테이퍼를 갖는 맥동관의 2차원 해석모델을 제시하였다. 맥동관 내부에 있는 작동가스의 질량, 운동량, 에너지보존 뿐만 아니라 맥동관벽의 에너지보존도 동시에 고려하여 맥동관의 축방향 평균온도분포를 구하였다. 본 연구에서 제시된 해석모델을 이용하여 맥동관의 테이퍼각이 정미엔탈피유동, 평균온도분포, 정미질량흐름에 미치는 영향을 알아보았다.

2. 해석 모델

Fig. 1은 맥동관냉동기의 맥동관을 나타낸다. Fig. 1에 보여진 맥동관의 왼쪽과 오른쪽에 저온 열교환기와 고온열교환기가 각각 위치한다. 맥동관 내부의 작동가스는 맥동관 양쪽으로 들어오고 나가는 작동가스의 주기적인 운동에 의하여 압축과 팽창을 반복하며, 정미엔탈피는 저온열교환기에서 고온열교환기 방향으로 이동한다. 해석에 사용된 주요 가정들은 다음과 같다.

- (1) 가스의 왕복운동의 진폭 s_1 과 s_2 는 맥동관의 길이 L 에 비하여 작다.
- (2) 맥동관의 반지름 R 은 관의 길이 L 에 비하여 매우 작으므로 작동가스의 온도와 속도의 x -방향 기울기는 r -방향의 기울기에 비하여 매우 작다. 또한, 압력은 맥동관의 한 단면에서 균일하다.
- (3) 작동가스가 움직이지 않을 때 맥동관벽과 작동가스의 온도는 평균온도 $T_m(x)$ 로 같다.

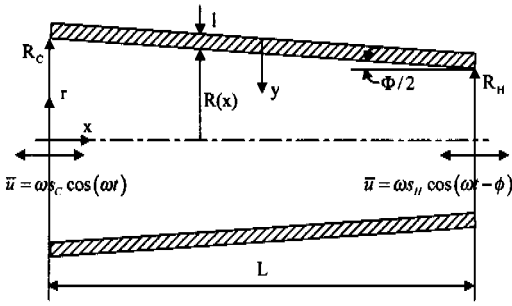


Fig. 1 Schematic diagram of a tapered pulse tube

- (4) 작동유체는 이상기체이고, 유동은 층류이다.
 - (5) 맥동관의 외벽은 단열되어 있다.
- 위의 가정들을 이용하여 구한 작동가스의 질량 보존, 운동량보존, 에너지보존, 이상기체 방정식과 맥동관벽의 에너지보존식은 다음과 같다.⁽¹⁴⁾

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho v)}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \quad (3)$$

$$p = \rho R_g T \quad (4)$$

$$\rho_w C_w \frac{\partial T_w}{\partial t} = k_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} \quad (5)$$

여기서 ρ , u , v , T , p 는 각각 작동가스의 밀도, 축방향 속도, 반경방향 속도, 온도, 그리고 압력을 나타내며, T_w 는 맥동관벽의 온도를 나타낸다. 맥동관벽의 두께 l 은 반지름 R 에 비하여 매우 얇으므로 맥동관벽은 직교좌표로 해석하였다. 맥동관은 중심에 대하여 축대칭이므로 $r=0$ 에서의 경계조건들은 $\partial u/\partial r=0$, $v=0$, $\partial T/\partial r=0$ 이고, 작동가스와 맥동관벽의 경계면($r=R$ 또는 $y=l$)에서 작동가스와 맥동관벽의 온도와 열유

속은 같아야 하므로 경계조건들은 $u=0$, $v=0$, $T=T_w$, $-k \partial T/\partial r = k_w \partial T_w/\partial y$ 이며, 맥동관의 외벽은 단열되어 있다고 가정하였으므로 $y=0$ 에서의 경계조건은 $\partial T_w/\partial y=0$ 이다.

위의 지배방정식들의 해는 섭동법(perturbation method)을 이용하여 구하였다. 섭동법에서는 모든 변수들이 다음과 같이 시간평균항, 1차항, 그리고 고차항들의 합으로 표현된다.⁽¹⁵⁾

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_m + \rho_1 + \rho_2 + \dots \\ u &= 0 + u_1 + u_2 + \dots \\ v &= 0 + v_1 + v_2 + \dots \\ T &= T_m + T_1 + T_2 + \dots \\ p &= p_m + p_1 + p_2 + \dots \\ T_w &= T_{wm} + T_{w1} + T_{w2} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

2.1 속도, 온도, 밀도, 압력의 1차해

식 (6)의 표현들을 지배방정식 (1)-(5)에 대입하고 1차항들만 모으면 다음과 같이 1차 지배방정식들을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m u_1)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho_m v_1)}{\partial r} = 0 \quad (7)$$

$$\rho_m \frac{\partial u_1}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \quad (8)$$

$$\rho_m C_p \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_1 \frac{dT_m}{dx} \right) = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (9)$$

$$\rho_1 = - \rho_m T_1 / T_m + \frac{\gamma}{a^2} p_1 \quad (10)$$

$$\rho_w C_w \frac{\partial T_{w1}}{\partial t} = k_w \frac{\partial^2 T_{w1}}{\partial y^2} \quad (11)$$

1차항들은 시간에 따라 주기적으로 변화하므로 다음과 같이 복소함수 형태로 표현할 수 있는데 실수부만이 물리적인 의미를 갖는다.

$$\begin{aligned}
 u_1(x, r, t) &= \hat{u}_1(x, r)e^{i\omega t} \\
 v_1(x, r, t) &= \hat{v}_1(x, r)e^{i\omega t} \\
 p_1(x, t) &= \hat{p}_1(x)e^{i\omega t} \\
 T_1(x, r, t) &= \hat{T}_1(x, r)e^{i\omega t} \\
 \rho_1(x, r, t) &= \hat{\rho}_1(x, r)e^{i\omega t} \\
 T_{w1}(x, y, t) &= \hat{T}_{w1}(x, y)e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{12}$$

지배방정식의 해를 일반화하기 위하여 변수들을 다음과 같이 무차원화 할 수 있는데

$$\begin{aligned}
 x^* &= \frac{x}{L} & r^* &= \frac{r}{R} & R^* &= \frac{R}{R_0} \\
 t^* &= \frac{t}{1/\omega} & u^* &= \frac{u}{\omega s_{c0}} & v^* &= \frac{v}{\omega s_{c0} R_0/L} \\
 p^* &= \frac{p}{p_0} & T^* &= \frac{T}{T_H} & \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_0}
 \end{aligned} \tag{13}$$

여기서 p_0 와 ρ_0 는 각각 기준압력과 기준밀도이다. R_0 는 맥동관 내부의 체적과 길이를 일정하게 유지하며 테이퍼각 ϕ 를 0° 로 하였을 때의 맥동관의 반지름으로 R_c 와 R_0 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\frac{R_c}{R_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{L}{R_0} \tan \frac{\phi}{2} + \sqrt{4 - \frac{1}{3} \left(\frac{L}{R_0} \tan \frac{\phi}{2} \right)^2} \right] \tag{14}$$

s_{c0} 는 $x=0$ 에서의 체적유량을 일정하게 유지하며 테이퍼각 ϕ 를 0° 로 하였을 때의 변위 길이로 다음 식과 같이 표현된다.

$$s_{c0} = s_c \left(\frac{R_c}{R_0} \right)^2 \tag{15}$$

무차원화된 속도, 온도, 밀도의 1차해들을 구하면 다음과 같이 표현되는데 실수부만 물리적인 의미를 갖는다.

$$u_1^*(x^*, r^*) = i \frac{s_{c0}/L}{\gamma Ma^2} \frac{1}{\rho_m^*} \frac{dp_1^*}{dx^*} [1 - f_1(r^*)] \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 v_1^*(x^*, r^*) &= - \frac{iR^*}{2\gamma(s_{c0}/L)} \frac{p_1^*}{\rho_m^* T_m^*} \\
 &\times \left[r^* + \frac{\gamma-1}{1+\epsilon_s} f_x(r^*) \right] - \frac{i(s_{c0}/L)}{2\gamma Ma^2} \frac{R^*}{\rho_m^* T_m^*} \\
 &\times \frac{dT_m^*}{dx^*} \frac{dp_1^*}{dx^*} \left[r^* - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}-1} f_v(r^*) \right. \\
 &+ \left. \frac{1+\epsilon_s f_v(1)/f_x(1)}{(\text{Pr}-1)(1+\epsilon_s)} f_x(r^*) - (1+b) f_3(r^*) \right] \\
 &- \frac{i(s_{c0}/L)}{2\gamma Ma^2} \frac{R^*}{\rho_m^*} \frac{d^2 p_1^*}{dx^{*2}} [r^* - f_v(r^*)] \\
 &+ \frac{i(s_{c0}/L)}{\gamma Ma^2} \frac{1}{\rho_m^*} \frac{dR^*}{dx^*} \frac{dp_1^*}{dx^*} f_2(r^*) \tag{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_1^*(x^*, r^*) &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p_1^*}{\rho_m^*} \left[1 - \frac{f_4(r^*)}{1+\epsilon_s} \right] \\
 &- \frac{(s_{c0}/L)^2}{\gamma Ma^2} \frac{1}{\rho_m^*} \frac{dT_m^*}{dx^*} \frac{dp_1^*}{dx^*} \left[1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}-1} \right. \\
 &\times \left. f_1(r^*) + \frac{1}{\text{Pr}-1} \frac{1+\epsilon_s f_v(1)/f_x(1)}{1+\epsilon_s} f_4(r^*) \right] \tag{18}
 \end{aligned}$$

$$\rho_1^*(x^*, r^*) = - \frac{\rho_m^*}{T_m^*} T_1^* + \frac{p_1^*}{T_m^*} \tag{19}$$

여기서

$$\beta = \frac{R}{\sqrt{2\mu_m/(\rho_m \omega)}} = \beta_0 \frac{R^*}{\sqrt{(T_m^*)^b/\rho_m^*}} \tag{20}$$

$$\beta_0 = \frac{R_0}{\sqrt{2\mu_0/(\rho_0 \omega)}} \tag{21}$$

$$f_1(r^*) = \frac{2}{(i-1)\beta} \frac{J_1[(i-1)\beta r^*]}{J_0[(i-1)\beta]} \tag{22}$$

$$f_x(r^*) = \frac{2}{(i-1)\beta\sqrt{\text{Pr}}} \frac{J_1[(i-1)\beta\sqrt{\text{Pr}} r^*]}{J_0[(i-1)\beta\sqrt{\text{Pr}}]} \tag{23}$$

$$f_1(r^*) = \frac{J_0[(i-1)\beta r^*]}{J_0[(i-1)\beta]} \tag{24}$$

$$f_2(r^*) = \frac{J_1[(i-1)\beta r^*] J_1[(i-1)\beta]}{\{J_0[(i-1)\beta]\}^2} \quad (25)$$

$$f_3(r^*) = f_v(r^*) - r^* f_1(r^*) - f_2(r^*) \quad (26)$$

$$f_4(r^*) = \frac{J_0[(i-1)\beta\sqrt{\text{Pr}} r^*]}{J_0[(i-1)\beta\sqrt{\text{Pr}}]} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_s = & -i \frac{\sqrt{k_m \rho_m C_p}}{\sqrt{k_w \rho_w C_w}} \\ & \times \frac{J_1[(i-1)\beta\sqrt{\text{Pr}}]/J_0[(i-1)\beta\sqrt{\text{Pr}}]}{\tanh[(1+i)\beta_w]} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\beta_w = \frac{1}{\sqrt{2k_w/(\rho_w C_w \omega)}} \quad (29)$$

$$Ma = \frac{\omega s_{\infty}}{\sqrt{\gamma RT_H}} \quad (30)$$

$$b = \frac{T_m}{\mu_m} \frac{d\mu_m}{dT_m} \quad (31)$$

이다.

식 (10), (16), (18)을 이용하여 작동가스의 1차 질량보존식 (7)에 r 을 곱하여 0부터 R 까지 적분하면 1차 압력의 파동방정식(wave equation)을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{p}_1^*}{dx^{*2}} = & \frac{1}{1-f_v(1)} \left[\frac{f_x(1)-f_v(1)}{(1-\text{Pr})(1+\epsilon_s)} - 1 \right. \\ & \left. + f_v(1) - (1+b)f_3(1) \right] \frac{1}{T_m^*} \frac{dT_m^*}{dx^*} \frac{d\hat{p}_1^*}{dx^*} \\ & - \frac{Ma^2}{(s_{\infty}/L)^2} \frac{1+(\gamma-1)f_x(1)/(1+\epsilon_s)}{1-f_v(1)} \frac{\hat{p}_1^*}{T_m^*} \\ & + \frac{2f_2(1)}{1-f_v(1)} \frac{1}{R^*} \frac{dR^*}{dx^*} \frac{d\hat{p}_1^*}{dx^*} \end{aligned} \quad (32)$$

파동방정식의 경계조건들을 구하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{d\hat{p}_1^*}{dx^*} \right)_{x^*=0} = - \frac{i\rho_m^* \gamma Ma^2}{(s_{\infty}/L)\{1-f_v(1)\}(R_1^*)^2} \quad (33)$$

$$\left(\frac{d\hat{p}_1^*}{dx^*} \right)_{x^*=1} = - \frac{i\rho_m^* \gamma Ma^2 (s_{H0}/s_{\infty})}{(s_{\infty}/L)\{1-f_v(1)\}(R_2^*)^2} e^{-i\phi} \quad (34)$$

맥동관벽의 열전도와 맥동관 내부의 작동유체에 의한 엔탈피유동을 모두 고려하여 무차원화된 2차 정미엔탈피유동을 구하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}_2^* \rangle = & \frac{s_{\infty}/L}{2} \frac{1}{Ma^2} \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \frac{(R^*)^2}{\rho_m^*} \text{Im} \left[\frac{d\hat{p}_1^*}{dx^*} \hat{p}_1^* \right. \\ & \left. \times \left(1 - \tilde{f}_v(1) - \frac{f_x(1) - \tilde{f}_v(1)}{(1+\epsilon_s)(1+\text{Pr})} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{s_{\infty}}{L} \right)^3 \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{Ma^4} \frac{1}{1-\text{Pr}} \\ & \times \frac{(R^*)^2}{\rho_m^*} \frac{dT_m^*}{dx^*} \frac{d\hat{p}_1^*}{dx^*} \frac{d\tilde{f}_v^*}{dx^*} \text{Im} [\tilde{f}_v(1) \\ & + \frac{(f_x(1) - \tilde{f}_v(1))(1 + \epsilon_s f_v(1)/f_x(1))}{(1 + \epsilon_s)(1 + \text{Pr})}] \\ & - \frac{(R_0/L)^2 (R^*)^4}{2\beta^2 \text{Pr} (s_{\infty}/L)} \left[1 + 2 \frac{\beta^2}{\beta_w^2} \text{Pr} \left(\frac{L}{R_0} \right)^3 \right. \\ & \left. \times \frac{\rho_w C_w}{\rho_0 C_p} \frac{1}{\rho_m^* (R^*)^3} \right] \rho_m^* \frac{dT_m^*}{dx^*} \end{aligned} \quad (35)$$

여기서 < >은 시간평균을 나타낸다.

2.2 시간평균된 2차 질량보존과 운동량보존식
2차 운동량보존식을 시간평균을 취하여 무차원화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u_s^*}{\partial r^*} \right) = & 2 \frac{\beta^2}{\gamma Ma^2} \frac{s_{\infty}}{L} \frac{1}{\rho_m^*} \frac{dp_s^*}{dx^*} \\ & + \beta^2 \frac{s_{\infty}}{L} \text{Re} \left[\hat{u}_1^* \frac{\partial \hat{u}_1^*}{\partial x^*} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \beta^2 \frac{s_{c0}}{L} \frac{1}{R^*} Re \left[\hat{v}_1^* \frac{\partial \hat{u}_1^*}{\partial r^*} \right] \\
 & + \beta^2 \rho_m^* Im \left[\hat{\rho}_1^* \hat{u}_1^* \right] \\
 & - \frac{b}{2T_m^*} Re \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \hat{T}_1^* \frac{\partial \hat{u}_1^*}{\partial r^*} \right) \right] \quad (36)
 \end{aligned}$$

u_s^* 는 무차원화된 축방향의 2차 속도의 정상성분을 나타내고, p_s^* 는 무차원화된 2차 압력의 정상 성분이다. u_s^* 의 경계조건은 $r^*=1$ 에서 $u_s^*=0$, $r^*=0$ 에서 $\partial u_s^*/\partial r^*=0$ 이다.

맥동관의 한 단면을 통과하는 정미질량유량을 무차원화하면 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{m}_s^* = 2(R^*)^2 \int_0^1 [\rho_m^* u_s^* + \langle \rho_1^* u_1^* \rangle] r^* dr^* \quad (37)$$

여기서 $\rho_m^* u_s^*$ 는 축방향 2차 속도의 정상성분에 의한 질량유속이고, $\langle \rho_1^* u_1^* \rangle$ 는 축방향 1차속도와 1차 밀도에 의한 정미질량유속을 나타낸다. 기본형이나 오리피스형 맥동관냉동기에서는 맥동관의 한 단면을 통과하는 정미질량유량은 0이 되어야 하므로 $\dot{m}_s^*=0$ 이다.

3. 수치해석방법

1차 압력의 복소진폭을 구하기 위하여 식 (32)와 (35)의 해를 4차 Runge-Kutta 방법을 사용하여 동시에 구하였다. 주어진 냉동온도

$T_c^* = T_m^*(x^*=0)$ 에 대하여 $x^*=1$ 에서의 온도조건 $T_m^*(x^*=1)=1$ 과 압력의 경계조건(식 (34))이 모두 만족될 때까지 정미엔탈피 $\langle \dot{H}_2^* \rangle$ 와 $x^*=0$ 에서의 압력 $\hat{p}_1^*(x^*=0)$ 을 변화시키며 $x^*=0$ 에서 $x^*=1$ 까지 계산을 반복한다.

2차 축방향 속도의 정상성분 u_s^* 는 식 (36)을 유한차분하여 구하였다. 식 (36)에서 구한 u_s^* 가 정미질량유량식 (37)을 만족할 때까지 dp_s^*/dx^* 의 값을 가정하여 반복 계산하였다.

4. 결과 및 토의

본 연구의 계산에 사용된 무차원 변수들의 기준조건은 $s_{c0}/L=0.1$, $R_0/L=0.1$, $Pr=0.7$, $\gamma=5/3$, $s_{H0}/s_{c0}=0.3$, $\phi=90^\circ$, $\Phi=5^\circ$, $\beta_0=100$, $\beta_w=0.5$, $T_c^*=0.6$, $x^*=0.5$ 이다. 무차원화에 사용된 기준 압력 $p_0=1MPa$ 이고 기준온도 $T_H=300K$ 이며, 무차원 평균압력 $p_m^*=0.85$ 이다.

Fig. 2는 테이퍼각 Φ 가 정미엔탈피유동에 미치는 영향을 보여준다. β_0 가 10과 20일 경우에는 Φ 가 증가함에 따라 정미엔탈피유동이 증가하다가 최대값에 도달한 후 감소하는 것을 볼 수 있다. 그러나, β_0 가 50일 경우에는 Φ 가 커질수록 정미엔탈피유동이 증가한다. β_0 가 10일 경우에는 Φ 가 -1° 부근에서 정미엔탈피가 최대가 되고 β_0 가 20일 경우에는 Φ 가 0° 부근에서 정미엔탈피가 최대가 되는 것을 볼 수 있다.

테이퍼각 Φ 가 축방향 평균온도분포에 미치는 영향을 Fig. 3에 나타내었다. Φ 가 증가할수록 평균온도의 최대값은 증가하고 최대가 되는 위치가 저온열교환기 방향으로 이동하는 것을 볼 수 있다. 식 (35)에서 알 수 있는 것처럼 맥동관의 한 단면을 통과하는 정미엔탈피유동은 작동가스의 왕복운동에 의한 정미엔탈피유동(식 (35)의 우변의 첫 번째와 두 번째 항)과 맥동관벽과 작동가스의 열전도에 의한 정미열전달율(식 (35)의 우변의 세 번째 항)의 합으로 표현된다. 맥동관의 외벽은 단열되었다고 가정하였으므로 맥동관의 한

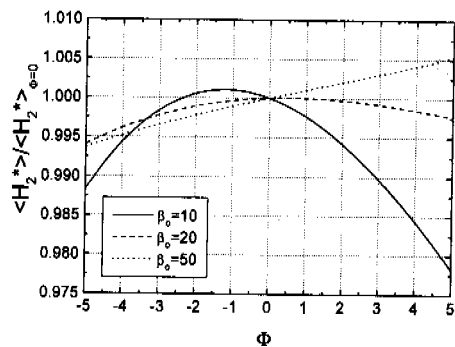


Fig. 2 Effect of taper angle on net enthalpy flow

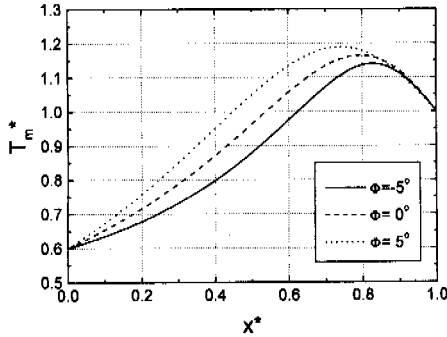


Fig. 3 Effect of taper angle on mean temperature profile

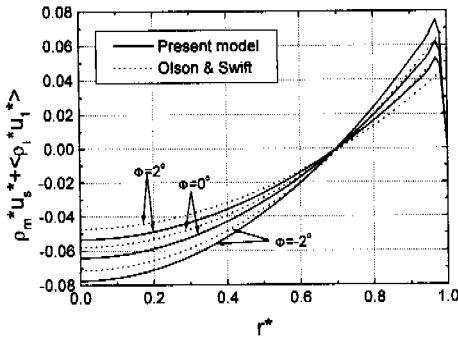


Fig. 4 Comparison of steady mass flux with approximate solution

단면을 통과하는 정미엔탈피유동 $\langle \dot{H}_2^* \rangle$ 는 일정하다. 작동가스의 왕복운동의 진폭은 고온열교환기 방향으로 갈수록 작아지므로 가스의 왕복운동에 의한 정미엔탈피유동은 무차원 각속도 β_0 가 매우 클 경우에 고온열교환기 가까이에서는 x^* 가 커질수록 감소한다.⁽¹²⁾ 맥동관의 한 단면을 통과하는 정미엔탈피유동 $\langle \dot{H}_2^* \rangle$ 가 일정하다는 조건을 만족시키기 위하여 전도에 의한 열전달은 저온열교환기 가까이에서는 저온열교환기 방향으로 이동하고, 고온열교환기 가까이에서는 고온열교환기 방향으로 이동하여야 한다. 따라서, 평균온도는 Fig. 3과 같이 고온열교환기 근처에서 최대가된다. Fig. 2에서 볼 수 있는 바와 같이 β_0 가 매우 클 경우에는 ϕ 가 증가할수록 정미엔탈

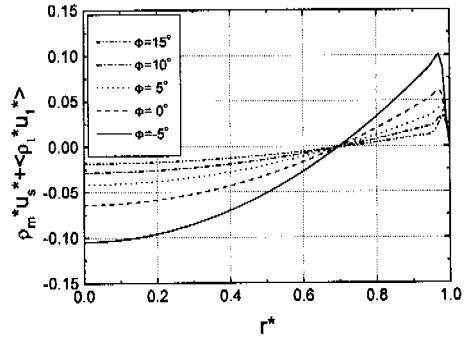


Fig. 5 Effect of taper angle on steady mass flux

피 유동이 증가하므로 평균온도의 최대값은 ϕ 가 증가할수록 커지고 평균온도가 최대가 되는 위치도 저온열교환기 방향으로 이동한다.

Fig. 4에 본 연구에서 구한 정미질량유속과 Olson과 Swift⁽⁵⁾가 제시한 정미질량유속의 근사해를 비교하였다. 이들의 근사해는 관벽 가까이와 얇은 경계층 외부에서만 유효하다. 경계층 외부에서 본 연구에서 구한 정미질량유속과 Olson과 Swift⁽⁵⁾의 근사해는 거의 같은 것을 볼 수 있으며, 맥동관의 단면적이 고온열교환기 방향으로 감소할수록 정미질량유속의 크기는 감소한다.

테이퍼각 ϕ 가 정미질량유속에 미치는 영향을 Fig. 5에 나타내었다. ϕ 가 증가할수록 정미질량유속의 크기는 감소하는 것을 볼 수 있다. Lee 등⁽⁴⁾에 의하면 2차 축방향 속도의 정상성분 u_s 는 $O(U_c \Delta U_c / \omega L)$ 의 크기를 갖는다. 여기서 U_c 는 관 중심에서의 1차 속도의 진폭이고, ΔU_c 는 맥동관 양단의 U_c 의 차이이다. ϕ 가 증가할수록 고온열교환기 방향으로 맥동관의 단면적이 감소하므로 $x^*=0$ 에서 U_c 는 감소하고 $x^*=1$ 에서 U_c 는 증가한다. 따라서, ϕ 가 증가할수록 ΔU_c 가 감소하므로 정미질량유속의 크기는 감소한다.

Fig. 6은 맥동관의 길이와 반지름의 비가 정미질량유속에 미치는 영향을 보여준다. L/R_0 가 커질수록 정미질량유속의 크기는 감소하는 것을 볼 수 있는데, 이것은 Lee 등⁽⁴⁾이 보인 것처럼 2차축방향 속도의 정상성분 u_s 가 맥동관의 길이에 반비례하기 때문으로 생각된다. 이 결과는 정미질

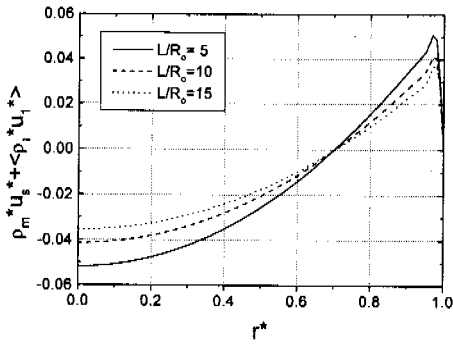


Fig. 6 Effect of length to radius ratio on steady mass flux

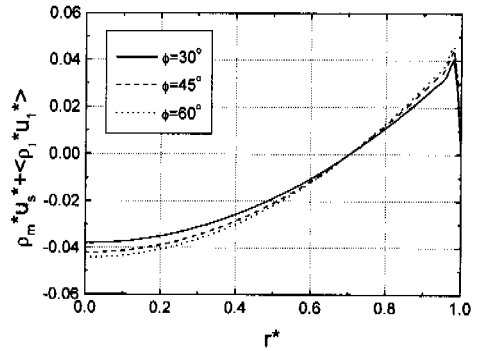


Fig. 8 Effect of velocity phase angle on steady mass flux

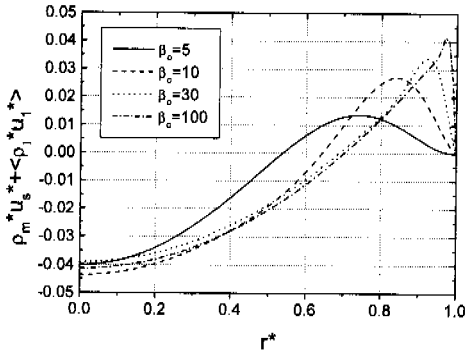


Fig. 7 Effect of the ratio of tube inner radius to momentum thickness on steady mass flux

량흐름에 의한 손실을 감소시키기 위해서는 맥동관을 길게 하는 것이 좋다는 것을 보여준다.

맥동관의 반지름과 속도경계층의 두께의 비를 나타내는 무차원 변수 β_0 가 정미질량유속의 반경방향 분포에 미치는 영향을 Fig. 7에 나타내었다. 식 (21)에서 알 수 있는 바와 같이 맥동관의 반지름이 커지거나 각속도 ω 가 커질수록 β_0 는 증가하나, 본 연구에서는 R_0 를 고정시키고 ω 를 변화시켰다. β_0 가 증가할수록, 즉 각속도가 증가할수록 정미질량유속의 크기는 증가하고, 정미질량유속의 최대값은 커지며, 최대가 되는 위치가 벽으로 이동하는 것을 볼 수 있다.

맥동관 양단의 속도 사이의 위상차 ϕ 가 정미질량유속에 미치는 영향을 Fig. 8에 나타내었다.

ϕ 가 커질수록 정미질량유속의 크기는 증가하나, 그 영향은 그다지 크지 않은 것을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 축방향으로 단면적이 변화하는 맥동관의 2차원 해석모델을 제시하였다. 이 모델을 이용하여 맥동관의 테이퍼각이 정미엔탈피유동과 정미질량흐름에 미치는 영향을 알아보았으며, 맥동관의 길이와 반지름의 비, 맥동관의 반지름과 속도경계층의 두께의 비, 맥동관 양단의 도사이의 위상차가 정미질량유속에 미치는 영향을 알아보았다.

β_0 가 10, 20일 경우에는 정미엔탈피유동이 최대가 되는 테이퍼 각이 존재하나 β_0 가 매우 클 경우에는 테이퍼 각이 커질수록 정미엔탈피유동이 증가한다. 따라서, β_0 가 충분히 큰 경우에는 맥동관의 단면적이 고온열교환기 방향으로 갈수록 감소하게 하는 것이 냉동용량을 크게 한다.

정미질량유속의 크기는 테이퍼 각과 맥동관의 길이와 반지름의 비가 커질수록 감소하나, 맥동관의 반지름과 속도경계층의 두께의 비 β_0 와 맥동관 양단의 속도 사이의 위상차 ϕ 가 커질수록 증가한다. 맥동관의 체적을 일정하게 유지하면서 관의 길이를 증가시키고 반지름을 작게 하면 맥동관의 길이와 반지름의 비는 증가하고 β_0 는 감소하므로 정미질량유속의 크기를 감소시킬 수 있

으며, 정미질량흐름에 수반되는 정상상태의 엔탈피흐름에 의한 손실도 감소시킬 수 있을 것이다.

후 기

이 연구는 1998년도 한국과학재단 연구비(과제번호 : 981-1006-040-2) 지원에 의한 결과입니다. 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Richardson, R. N., 1986, "Pulse Tube Refrigerator - an Alternative Cryocooler?," *Cryogenics*, Vol. 26, pp. 331~340.
- (2) Swift, G. W., 1995, "Thermoacoustic Engines and Refrigerators," *Physics Today*, July, pp. 22~28.
- (3) Wang, C., Ju., Y. L. and Zhou, Y., 1996, "The Experimental Investigation of a Two Stage Pulse Tube Refrigerator," *Cryogenics*, Vol. 36, No. 8, pp. 605~609.
- (4) Lee, J. M., Kittel, P., Timmerhaus, K. D., and Radebaugh, R., 1993, "Flow Patterns Intrinsic to the Pulse Tube Refrigerator," *Proceedings of the 7th International Cryocooler Conference*, pp. 125~139.
- (5) Olson, J. R. and Swift, G. W., 1997, "Acoustic Streaming in Pulse Tube Refrigerators: Tapered Pulse Tube," *Cryogenics*, Vol. 37, No. 12, pp. 769~776.
- (6) Rott, N., 1974, "The Influence of Heat Conduction in Acoustic Steaming," *J. Appl. Math. Phys.* Vol. 25, pp. 417~421
- (7) Jeong, E. S., and Smith, J. L., Jr., 1992, "Secondary Flow in Reciprocating Machinery," *Proceedings of ASME National Heat Transfer Conference*, Vol. 24, pp. 97~104.
- (8) Jeong, E. S., 1996, "Secondary Flow in Basic Pulse Tube Refrigerators," *Cryogenics*, Vol. 36, No. 5, pp. 317~323.
- (9) 이호진, 채왕병, 정은수, 1997, "맥동관냉동기의 2차속도와 온도," 공기조화냉동공학 논문집, 제9권, 제2호, pp. 239~248.
- (10) Lee, J. M., Kittel, P., Timmerhaus, K. D., and Radebaugh, R., 1995, "Steady Secondary Momentum and Enthalpy Streaming in the Pulse Tube Refrigerator," *Cryocoolers* 8, pp. 359~369.
- (11) 강영구, 정은수, 1998, "맥동관냉동기의 엔탈피 이동," 공기조화냉동공학 논문집, 제10권, 제2호, pp. 180~192.
- (12) 백상호, 정승철, 정은수, 1999, "맥동관의 엔탈피유동에 대한 2차원 해석 모델," 한국초전도저온공학회논문지, Vol. 1, No. 1, pp. 42~47.
- (13) 백상호, 정은수, 1999, "맥동관 내부의 정상상태 질량흐름," 공기조화냉동공학회 하계학술발표회 논문집, pp. 946~954.
- (14) R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot, 1960, *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons.
- (15) H. Schlichting, 1979, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill.