

넓은 수평 환형 공간에서의 중간 Prandtl 수 유체의 자연 대류의 천이

유 주 식*
(1999년 3월 22일 접수)

Free Convective Transition of Intermediate Prandtl-Number Fluids in a Wide-Gap Horizontal Annulus

Joo-Sik Yoo

Key Words : Natural Convection(자연 대류), Transition of Flows(유동의 천이), Unicellular Flow(한 셀 유동), Bicellular Flow(두 셀 유동), Dual Solutions(이중해)

Abstract

Natural convection in a wide-gap horizontal annulus is considered, and the transition of flows and the bifurcation phenomenon are investigated for the fluids with $Pr=0.2$ and 0.3 . At $Pr=0.2$, a bicellular flow pattern is observed at high Rayleigh number, and the solution is unique. At $Pr=0.3$, both the steady unicellular and bicellular flows exist above a certain critical Rayleigh number. For the fluids of $Pr=0.2$, the bicellular flow can be obtained by the impulsive heating of the inner cylinder, but it is not obtained from the zero initial condition for $Pr=0.3$. Hysteresis phenomena have not been observed. A transition from a bicellular flow to a unicellular flow occurs for $Pr=0.3$.

기호설명

D_i : 안쪽 실린더의 지름
 g : 중력 가속도
 J : Jacobian
 L : 환형의 폭, $R_o - R_i$
 \overline{Nu} : 평균 Nusselt 수, $(\overline{Nu}_i + \overline{Nu}_o)/2$
 Nu_{cond} : 전도 상태의 Nusselt 수
 Nu_i, Nu_o : 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더에서의 국소 Nusselt 수
 $\overline{Nu}_i, \overline{Nu}_o$: 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더에서의 평균 Nusselt 수

Pr : Prandtl 수, ν/α
 p : 압력
 R_i, R_o : 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 반경
 Ra : Rayleigh 수, $ag(T_i - T_o)L^3/\nu\alpha$
 r : 반경 방향의 좌표
 r_i, r_o : 무차원화 된 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 반경
 t : 시간
 T_i, T_o : 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 온도
 \vec{u} : 속도 벡터
 u : 반경 방향의 속도 성분
 v : 원주 방향의 속도 성분

* 회원, 안동대학교 기계공학교육과

E-mail : jsyoo@anu.andong.ac.kr

TEL : (0571)850-5671 FAX : (0571)841-1624

그리스문자

- α : 열 팽창 계수
- η : 확장된 반경 방향의 좌표
- θ : 무차원화 된 온도
- x : 열 확산 계수
- ν : 동점성 계수
- ρ_0 : 밀도
- ϕ : 원주 방향의 좌표
- Ψ : 흐름 함수
- ω : 와도

1. 서 론

서로 다른 일정 온도를 유지하고 있는 두 개의 수평 동심 실린더 내에서의 자연 대류 현상은, 흥미로운 유동의 형태와 열에너지 저장 시스템, 케이블의 냉각 등의 넓은 응용 분야로 인해 많은 관심은 받아 왔다. 이에 대한 기존의 연구들은 Gebhart 등⁽¹⁾에 의해 포괄적으로 조사되었다. 이 시스템에 있어서의 유동 형태에 대한 일반적인 특성은 Powe 등⁽²⁾에 의해 실험적으로 규명되었다. Powe 등⁽²⁾은 공기의 유동 형태를 Rayleigh 수와 두 실린더 사이의 상대적인 간격(D_i/L)을 변수로 하여 4 가지의 기본적인 유동 형태들로 분류하였다. Rao 등⁽³⁾도 수치적인 방법과 실험을 통하여 유동 형태에 대한 도표를 작성하였는데 전체적인 경향은 Powe 등⁽²⁾의 결과와 일치하였다. 한편 Cheddadi 등⁽⁴⁾과 Yoo⁽⁵⁾는 $Pr=0.7$ 인 공기의 자연 대류에서 인위적인 수치 교란을 사용하여 서로 다른 두 가지 현상의 존재를 보였다.

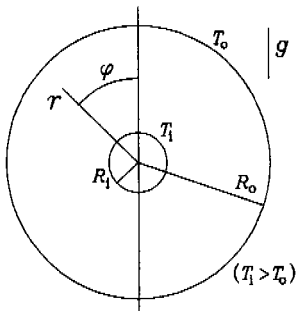


Fig. 1 Problem configuration

액체 금속과 같은 낮은 Prandtl 수($Pr \approx 0.01$)의 유체는 큰 Rayleigh 수에서 조금 더 복잡한 유동의 형태를 보인다.^(6,9) Mack and Bishop⁽⁶⁾과 Custer and Shaughnessy⁽⁷⁾는 $D_i/L=2$ 의 환형 내에 있는 $Pr=0.02$ 의 유체의 정상 상태의 자연 대류를 조사하였다. 그들은 Ra에 대한 regular perturbation expansion을 사용하여 두 개의 소용돌이(eddy)로 구성되는 정상 상태의 복수 셀 유동(multicellular flow)을 보였다. 그리고 Fant 등⁽⁸⁾과 Yoo 등⁽⁹⁾은 Prandtl 수가 0 혹은 0.02인 경우에 대해 아주 좁은 환형에서 진동하는 복수 셀의 유동(oscillatory multicellular flow)을 보였다.

그리고 그 외의 여러 가지 형태의 문제들로서, 불균일하게 가열되는 유체층,⁽¹⁰⁾ 안쪽 실린더에서의 균일한 열 유속,⁽¹¹⁾ 차가운 물,⁽¹²⁾ 열전도와 대류의 결합 문제,⁽¹³⁾ 실린더의 회전에 의한 영향⁽¹⁴⁾ 등에 대한 연구들도 역시 수행되었다.

이와 같이 수평 환형 내에서의 자연 대류에 관해 많은 연구가 수행되었지만 지금까지의 연구들은 대부분 실린더 표면에서의 열전달 특성에 주된 관심을 두었다. 특히 Prandtl 수가 유동 형태에 미치는 영향에 대한 연구는 매우 적다. 최근 Yoo^(15,16)는 여러 가지의 Prandtl 수에 따른 대류 현상과 분기 현상을 체계적으로 조사하여 환형에서 일어나는 열적(thermal) 및 수력학적 불안정성(hydrodynamic instability)은 Prandtl 수에 따라 매우 다양한 형태의 유동과 천이 현상을 일으킨다는 것을 보였다. Yoo⁽¹⁵⁾는 $D_i/L=12$ 의 좁은 환형을 고려하였는데 이때의 전도 영역의 안정성은 Prandtl 수의 함수로서 다음과 같은 두 가지 영역으로 구분된다는 것을 보였다.

(1) $Pr \leq 0.2$: 불안정성은 환형의 수직 부분에서 시작된다. 유동장은 같은 방향으로 회전하는 두 개 이상의 셀들로 구성되며 정상 상태 혹은 진동하는 유동을 보인다.

(2) $Pr \geq 0.3$, 불안정성은 환형의 꼭대기($\phi=0$; Fig. 1) 부근에서 시작되며 사각형 모양의 하나의 작은 셀이 형성되는 정상 상태의 유동을 보인다. 그리고 불안정이 일어난 후에는 Prandtl 수에 따라서 복잡한 복수 셀 유동(multicellular flow)과 분기 현상, 및 다양한 형태의 다중해(multiple solutions)가 존재함을 보였다.^(15,16) 특히 중간 Prandtl 수인 $Pr=0.3, 0.4$ 등에서는 열적 불안정성과 수력학적 불안정성

이 모두 존재함에 따라 매우 다양한 형태의 유동이 일어남을 관찰하였다.

본 연구에서는 $D_i/L=0.5$ 의 상대적으로 매우 넓은 환형에서의 중간 Prandtl 수($Pr=0.2, 0.3$) 유체의 자연 대류에서 일어나는 유동의 천이현상과 이중해의 특성을 조사한다.

2. 해석

고려하는 시스템의 구조와 좌표계는 Fig. 1과 같다. 유체는 일정한 표면 온도를 유지하고 있는 두 개의 무한히 긴 수평 실린더 사이에 있다. 안쪽 실린더의 온도는 T_i 이고 바깥쪽 실린더의 온도는 T_o 이며 $T_i > T_o$ 이다. Boussinesq 근사 하에서 부력 항을 제외하고는 유체에서의 밀도 변화는 무시하며, 그 외의 다른 물성치들은 모두 일정하다고 가정한다. 에너지 방정식에서 점성 소산(viscous dissipation)도 역시 무시한다. 문제를 해석하기 위하여 Fig. 1과 같은 실린더 좌표계 (r, ϕ) 를 사용한다. 질량, 운동량과 에너지에 대한 보존 방정식을 특성 길이, 시간, 속도, 압력과 온도를 각각 $L, L^2/\alpha, \alpha/L, \rho_0 \alpha^2/L^2, (T_i - T_o)$ 로 택하여 무차원화시킨다. 그리고 $Pr = \nu/\alpha, Ra = ag(T_i - T_o)L^3/\alpha\nu$ 를 각각 Prandtl 수와 Rayleigh 수로 정의한다.

무차원화된 지배 방정식과 경계 조건은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + Pr \nabla^2 \vec{u} + PrRa \theta [\cos(\phi) \vec{e}_r - \sin(\phi) \vec{e}_\phi] \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \theta = \nabla^2 \theta \quad (3)$$

$$u = v = 0, \theta = 1 \quad \text{at } r = r_i \quad (4)$$

$$u = v = 0, \theta = 0 \quad \text{at } r = r_o \quad (5)$$

흐름 함수(streamfunction) Ψ 와 와도(vorticity) ω 를 도입하면 지배 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\Psi, \omega) + Pr \nabla^2 \omega - PrRa \left[\sin(\phi) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \cos(\phi) \frac{\partial \theta}{r \partial \phi} \right] \quad (6)$$

$$\omega = -\nabla^2 \Psi \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = J(\Psi, \theta) + \nabla^2 \theta \quad (8)$$

여기에서 와도(ω)와 흐름 함수(Ψ) 및 Jacobian $J(f, g)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\omega = \frac{\partial}{r \partial r}(rv) - \frac{\partial}{r \partial \phi}(u), \quad u = \frac{\partial \Psi}{r \partial \phi}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$J(f, g) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial r} \right) \quad (9)$$

그리고 두 벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \quad \theta = 1 \quad \text{at } r = r_i \quad (10)$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \quad \theta = 0 \quad \text{at } r = r_o \quad (11)$$

각도 방향으로의 다음과 같은 대칭 조건을 적용한다.

$$\Psi = \omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 \quad \text{at } \phi = 0, \pi \quad (12)$$

유체 유동이 없는 경우의 순수한 전도(conduction)에 의한 열전달률은 다음과 같이 된다.

$$Nu_{cond} = \frac{1}{\ln(r_o/r_i)} \quad (13)$$

그리고 국부 Nusselt 수(local Nusselt number)를 다음과 같이 실제적인 열플럭스(heat flux)를 Nu_{cond} 로 나눈 값으로 정의한다.

$$Nu_i(\phi) = -(r \frac{\partial \theta}{\partial r}) / Nu_{cond} \quad \text{at } r = r_i \quad (14)$$

$$Nu_o(\phi) = -(r \frac{\partial \theta}{\partial r}) / Nu_{cond} \quad \text{at } r = r_o \quad (15)$$

평균 Nusselt 수 $\overline{Nu}_i, \overline{Nu}_o$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\overline{Nu}_i = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Nu_i(\phi) d\phi \quad (16)$$

$$\overline{Nu}_o = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Nu_o(\phi) d\phi \quad (17)$$

정상 상태에서 \overline{Nu}_i 와 \overline{Nu}_o 는 같은 값을 가지게 된다.

식 (6)-(12)의 방정식은 Yoo^(15,16)에서 사용한 것

과 같은 유한차분법을 사용하여 푼다. 식 (6)과 (8)을 차분화시키는 데 있어서는 시간 미분 항과 확산항에 대해 Dufort-Frankel의 leap-frog 방법⁽¹⁷⁾을 적용하고 Jacobian 항에 대해서는 중앙 미분을 사용한다. 그리고 유선 함수에 대한 Poisson 방정식은 다섯 점 공식을 이용하여 유한한 방정식 계로 바꾼다. 그리고 이 차분화된 Poisson 방정식은 Buzbee 등⁽¹⁸⁾의 순환적인 짝홀 제거 방법을 사용하여 반복 계산을 하지 않고 바로 푼다. 각방향으로는 균일 격자를 이용하고 반경방향으로는 두 벽면에서의 얇은 경계층을 분해하기 위해 다음과 같은 좌표 확장을 이용한다.

$$r = r_i + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\tanh\{C(2\eta-1)\}}{\tanh(C)} \right]$$

with $C=1.5, 0 \leq \eta \leq 1$ (18)

본 연구에서 사용한 $(r \times \phi)$ 격자계는 (55×65) 이며 시간간격 Δt 는 $10^{-5} \leq \Delta t \leq 10^{-3}$ 의 범위에서 택하였다.

3. 결과 및 논의

3.1 $Pr=0.2$

먼저 $Pr=0.2$ 의 유체에서 Rayleigh 수의 증가에 따라 일어나는 유동의 천이를 Fig. 2에 도시하였다. 전도가 지배적인 작은 Ra 에서는 콩팥 모양의

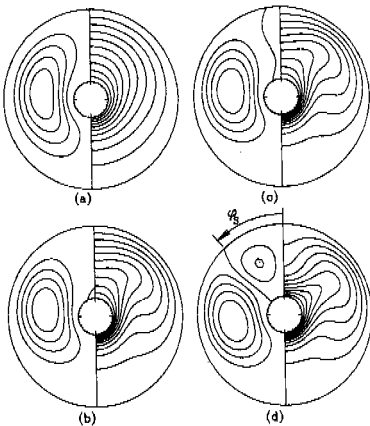


Fig. 2 Transition of flows with $Pr=0.2$:
 (a) $Ra=1000$; (b) $Ra=5000$;
 (c) $Ra=7000$; (d) $Ra=8000$

셀을 형성한다(Fig. 2(a)). 그러나 Ra 가 커지면 환형의 꼭대기 부근의 유동이 점점 약해지고 마침내 반대 방향으로 회전하는 작은 셀이 안쪽 실린더에 부착되어 형성된다(Fig. 2(b)). 그리고 Rayleigh 수의 증가와 함께 이 셀도 점점 커져서 바깥쪽 실린더까지 확대되며(Fig. 2(c)) 마침내 서로 반대 방향으로 회전하는 두 개의 셀로 구성되는 유동(bicellular flow)을 형성하게 된다(Fig. 2(d)). 중간 Prandtl 수인 $Pr=0.2$ 에서 주목할 만한 것은 Fig. 2(d)와 같은 두 셀 유동이 인위적인 수치 교란(artificial numerical disturbance)이 없어도 자연스럽게 얻어진다는 것이다(Fig. 3). 반면 Cheddadi 등⁽⁴⁾은 $Pr=0.7$ 의 유체에서 인위적인 수치 교란을 사용하여 이와 같은 유동을 구한 바가 있다.

Fig. 3에는 $Ra=10^4$ 에서의 시간 변화에 따른 유동의 발달 상황을 나타내었다. 초기 조건은 $\vec{u} = \theta = 0$ 이며 안쪽 실린더의 온도를 순간적으로 $\theta = 1$ 로 하였다. 가열의 초기에는 안쪽 실린더 부근에 얇은 온도 경계층이 형성되어 바깥쪽 실린더로 전파되며 유동장은 콩팥 모양의 셀을 형성한다. 즉, 따뜻한 안쪽 실린더 부근의 유체는 벽면을 따라 위로 올라가며 경계층은 환형의 꼭대기($\phi = 0$)에서 분리된다(Fig. 3(a)). 그러나 시간이 지남에 따라 실린더의 수직 부분의 유체는 수직 방향으로 상승하려 하기 때문에 환형의 위

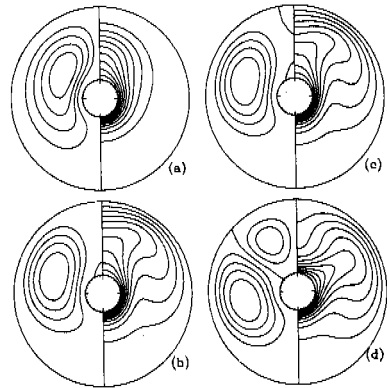


Fig. 3 Transient development of flow fields for $Pr=0.2$ and $Ra=10^4$: at (a) $t=0.07$; (b) $t=0.32$; (c) $t=0.36$; (d) steady state. The initial conditions are $\vec{u} = \theta = 0$, and the inner cylinder is suddenly heated to $\theta = 1$

부분에서의 유동은 상대적으로 점점 약해진다. 이에 따라 안쪽 실린더에서의 경계층이 $\phi=0$ 가 아닌 곳에서 분리되어 안쪽 실린더에 부착된 하나의 작은 소용돌이(eddy)가 형성된다 (Fig. 3(b)). 그리고 다음에는 바깥쪽 실린더에 부착된 소용돌이가 형성된다 (Fig. 3(c)). 각각의 벽면에 부착된 작은 소용돌이가 점점 커져서 합체되고, 이 합체된 셀이 자라나서 마침내 Fig. 3(d)와 같은 두 셀 유동(bicellular flow)을 형성하게 된다. Fig. 3에서 보이는 바와 같이 $D_i/L=0.5$ 의 넓은 환형에서는 과도기 상태에서 두 벽면에 부착된 두 개의 작은 소용돌이의 형성과 합체 현상을 보여주고 있다. 그러나 좁은 환형^(8,9,15,16)에서는 이와 같은 소용돌이의 형성과 합체 현상이 일어나지 않는다.

Fig. 4에는 Rayleigh 수에 따른 Ψ_{max} 과 Ψ_{min} ,

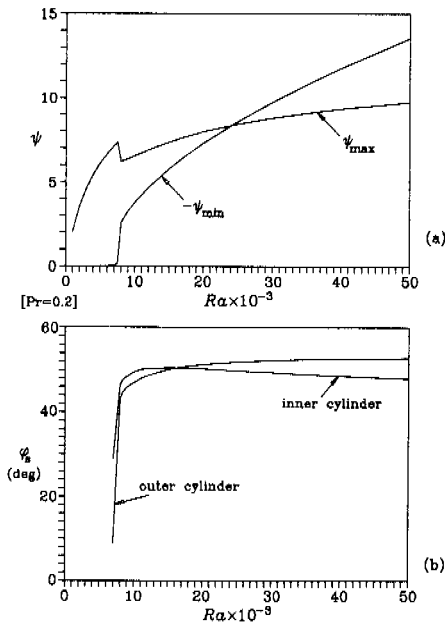


Fig. 4 (a) Maximum(Ψ_{max}) and minimum(Ψ_{min}) values of streamfunction as functions of the Rayleigh number for $Pr=0.2$.
 (b) Angles(ϕ_S) representing the locations of the separation points between two cells on the inner and outer cylinders for $Pr=0.2$. The definition of ϕ_S is in Fig. 2(d).

ϕ_S 의 변화를 나타내었다. 경계 조건은 벽면에서의 유선 함수 값을 0으로 하였으므로 Fig. 2(a)와 같은 한 셀 유동인 경우 $\Psi_{min}=0$ 가 된다. 그리고 $-\Psi_{min}$ 는 두 셀 유동에서 환형의 위 부분에 있는 두 번째 셀의 상대적인 힘의 크기를 나타낸다. ϕ_S 는 Fig. 2(d)에 도시되어 있는 것과 같이 두 셀 유동에 있어서 두 소용돌이(eddy) 사이의 분리점(separation point)을 나타내어 주는 각도이다. 먼저 Fig. 4(a)는 한 셀 유동으로부터 두 셀 유동으로 바뀌는 천이 영역에서 $-\Psi_{min}$ 의 급격한 증가와 Ψ_{max} 의 감소를 보여주고 있다. 또한 Fig. 4(b)는 두 번째 셀의 크기가 급격하게 커짐을 보여준다. 즉, 한 셀 유동으로부터 두 셀 유동으로의 천이는 완만하게 일어나지 않고 약간 급격하게 일어남을 알 수 있다. 두 셀 유동에 있어서 두 소용돌이의 경계를 나타내는 ϕ_S 를 보면, 작은 Rayleigh 수에 있어서는 안쪽 실린더의 ϕ_S 가 바깥쪽 실린더의 것보다 크다. 그리고 어떤 Rayleigh 수까지는 Ra 의 증가와 함께 ϕ_S 도 같이 증가한다. 즉, 불안정한 영역의 작은 소용돌이는 점점 커지게 된다. 그러나 Fig. 4(b)는 안쪽 실린더에서의 ϕ_S 는 Ra 의 증가와 함께 계속하여 증대

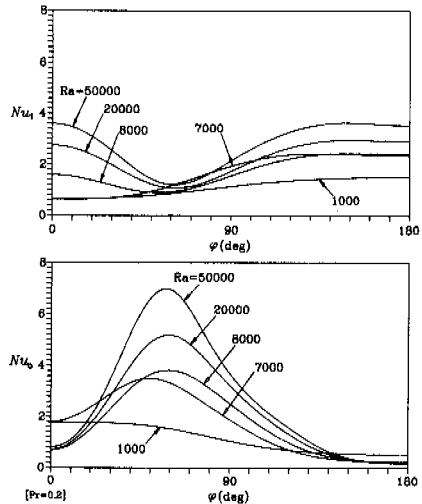


Fig. 5 Distribution of local Nusselt numbers at the inner and outer cylinders for $Pr=0.2$ with $Ra = 1000, 7000, 8000, 2 \times 10^4, \text{ and } 5 \times 10^4$

되지 않고 $Ra \approx 1.3 \times 10^4$ 부근에서 최대 값에 도달한 후 점점 감소함을 보여주고 있다. 이것은, 따뜻한 안쪽 실린더 부근의 유체는 상승하려 하기 때문에 경계층이 분리되는 위치가 더 이상 아래로 움직이지 않음을 보여 준다. 왜냐하면 $\phi_S < \phi < \pi$ 의 뜨거운 안쪽 실린더 영역이 그 부근의 유체를 위로 움직이게 함으로써 안쪽 실린더에서의 분리점 ϕ_S 를 위로 밀어 주기 때문이다.

Fig. 5에는 $Ra = 1000, 7000, 8000, 2 \times 10^4, 5 \times 10^4$ 에서의 벽면에서의 Nusselt 수의 분포를 나타내었다. Fig. 2(a)와 같이 한 셀 유동이 나타나는 $Ra = 1000$ 에서는 $\phi = 0$ 에서 Nu_o 가 최대 값을 갖고 Nu_i 는 최소값을 갖는다. 그러나 Fig. 2(c)와 같이 두 셀 유동이 나타나는 $\phi \geq 7000$ 에서는 최대 Nu_o 및 최소 Nu_i 의 위치가 $40^\circ < \phi < 70^\circ$ 로 이동한다. 셀 대류(cellular convection)는 두 셀의 경계면 부근에서 thermal plume을 형성하므로 이와 같이 대류의 형태에 따라 벽면에서의 최대 혹은 최소 Nusselt 수의 위치가 이동하게 된다. 따라서 벽면에서의 국부 Nusselt 수를 측정하여 그 때의 셀 대류의 형상을 개략적으로 알 수 있다.

다음에는 Rayleigh 수에 따른 벽면에서의 평균 Nusselt 수를 구하여 Fig. 6에 도시하였다. 평균 Nusselt 수는 Ra 의 증가와 함께 증가한다. 그러나 Fig. 6에서 주목할 것은, 유동장의 천이 영역(한 셀 유동으로부터 두 셀 유동으로의 천이)인 $7000 < Ra < 9000$ 에서 Ra 의 함수로서의 \overline{Nu} 곡선이 약간 아래로 오목한 모양을 하고 있다는 것이다. 평균 Nusselt 수가 Ra 의 증가와 함께 단

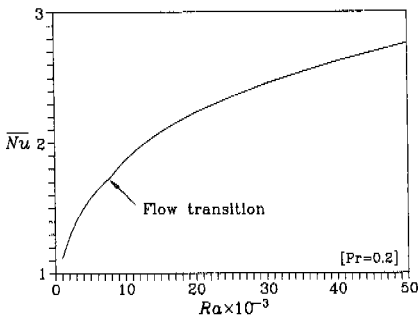


Fig. 6 Overall Nusselt number (\overline{Nu}) for $Pr=0.2$

순하게 증가하지 않고 이와 같은 특이점을 보임으로써 $\overline{Nu}(Ra)$ 곡선으로써도 어떤 유동의 천이 현상이 일어남을 알 수 있다. 유동의 천이 영역에서 일어나는 이와 같은 현상은 Fig. 4에서도 보인 바 있다.

3.2 $Pr=0.3$

$Pr=0.3$ 인 경우 초기 조건을 0으로 하여 실린더를 순간적으로 가열하였을 때에는 두 셀 유동이 얻어지지 않고 언제나 한 셀 유동만 구해진다. 그러나 $Pr=0.2$ 의 두 셀 유동을 초기 조건으로 하면 어떤 임계 Rayleigh 수 이상에서는 정상 상태의 두 셀 유동이 구해진다. 즉, $Pr=0.3$ 에 있어서는 어떤 임계 Rayleigh 수 이상에서는 두 개의 유동(dual flows)이 모두 존재할 수 있다. Fig. 7에는 $Ra=8000, 3 \times 10^4$ 에서의 이중해(dual solutions)를 도시하였다. Fig. 7에서 왼쪽은 두 셀 유동을 나타내고 오른쪽은 공괄 모양의 한 셀 유동을 나타낸다. 두 셀 유동에서는 하나의 작은 셀이 환형의 꼭대기에 형성됨으로써 환형의 수직 대칭면인 $\phi=0$ 부근의 유체가 아래로 움직이게 된다. 반면 한 셀 유동에 있어서는 $\phi=0$ 부근의 유체는 따뜻한 안쪽 실린더의 벽면을 따라 상승하는 유체와 함께 위로 움직인다.

Fig. 7의 등온선에서 알 수 있듯이 두 셀 유동의 온도 분포는 한 셀 유동의 온도 분포와 상당히 다르며 이러한 특성은 특히 환형의 위 부분에서 두드러지게 나타난다. 두 가지 형태의 유동에 대하여, $Ra=8000$ 과 3×10^4 에서의 안쪽 실린더

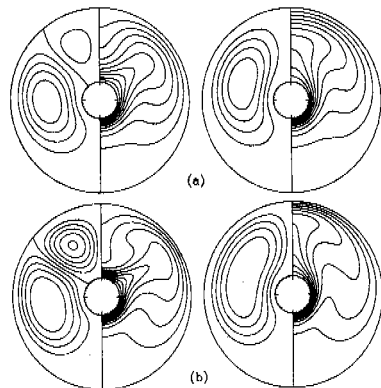


Fig. 7 Flow fields of dual solutions for $Pr=0.3$
(a) $Ra = 8000$; (b) $Ra = 3 \times 10^4$

와 바깥쪽 실린더에서의 국부 Nusselt 수의 분포를 구하여 Fig. 8에 도시하였다. 그리고 두 가지 해에 대한 평균 Nusselt 수를 구하여 Fig. 9에 도시하였다.

Rayleigh 수의 함수로서의 평균 Nusselt 수를 나타내고 있는 Fig. 9는 두 해의 분기 현상과 열

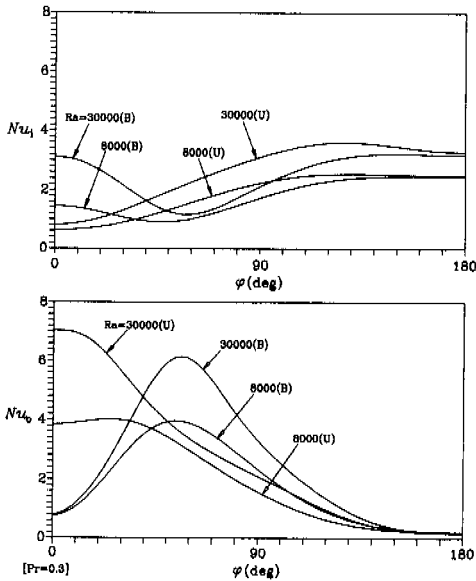


Fig. 8 Distribution of local Nusselt numbers at the inner and outer cylinders for $Pr=0.3$ with $Ra=8000$ and 3×10^4 . The letters "U" and "B" denote the "unicellular" and "bicellular" flows, respectively

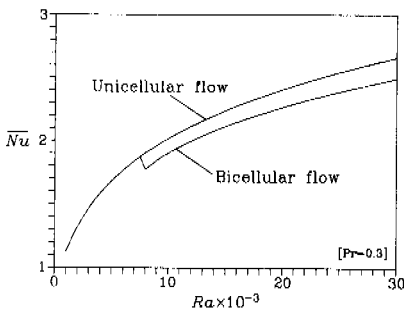


Fig. 9 Overall Nusselt number (\overline{Nu}) of the unicellular and bicellular flows for $Pr=0.3$

전달 특성을 보여주고 있다. 우선, $Pr=0.3$ 인 경우 $Pr=0.2$ 와는 달리 한 셀 유동으로부터 두 셀 유동으로의 천이는 일어나지 않는다. 즉, 한 셀 유동을 초기 조건으로 하면 언제나 같은 형태의 한 셀 유동이 얻어진다. 두 가지 유동은 어떤 임계값 이상에서 존재하며 Rayleigh 수의 감소와 함께 임계값 부근에서 두 셀 유동으로부터 한 셀 유동으로의 천이만 일어난다. 그리고 Fig. 9는 한 셀 유동의 Nusselt 수가 언제나 두 셀 유동의 것보다 크다는 것을 보여주고 있다. 반면, Cheddadi 등⁽⁴⁾은 상대적으로 좁은 $D_i/L=2$ 의 환형에서는 두 셀 유동의 Nusselt 수가 언제나 한 셀 유동의 것보다 크다는 것을 보였다. 그리고 Yoo^(15,16)는 아주 좁은 환형($D_i/L=12$)에서 일어나는 복수 셀 대류(multicellular convection)에서도 더 많은 셀이 형성되었을 때의 Nusselt 수가 그보다 작은 수의 셀을 가지는 유동보다 항상 더 크다는 것을 보인 바가 있다. Fig. 9의 열전달 특성은 좁은 환형의 경우와 달리 넓은 환형에서 일어나는 독특한 현상이다.

4. 결론

서로 다른 일정 온도를 유지하고 있는 두 개의 수평 동심 실린더 사이의 넓은 환형($D_i/L=0.5$)에서 일어나는 중간 Prandtl 수($Pr=0.2, 0.3$)의 유체의 자연 대류 현상을 수치적으로 조사하였다. 유한 차분법을 이용하여 비정상 유선함수와도 방정식을 풀었다. 전도가 지배적인 작은 Ra 에서는 콩팥 모양의 하나의 셀을 형성한다. 그러나 $Pr=0.2$ 인 경우 Rayleigh 수의 증가와 함께 한 셀 유동으로부터 두 셀 유동으로의 천이가 일어나며 초기 조건을 0으로 하여 실린더를 순간적으로 가열할 때에도 큰 Rayleigh 수에서는 두 셀 유동이 자연스럽게 확립된다. $Pr=0.3$ 인 경우 초기 조건을 0으로 하면 언제나 한 셀 유동만 구해진다. 그러나 $Pr=0.2$ 의 두 셀 유동을 초기 조건으로 하면 어떤 임계 Rayleigh 수 이상에서는 정상 상태의 두 셀 유동이 구해진다. 즉, 어떤 임계 Rayleigh 수 이상에서는 한 셀 유동과 두 셀 유동이 모두 존재한다. 이중해(dual solutions)가 존재할 때 벽면에서 평균 Nusselt 수는, 한 셀 유동의 것이 두 셀 유동의 것보다 크다. $Pr=0.3$ 인 경우 한 셀 유

동으로부터 두 셀 유동으로의 천이는 일어나지 않고 두 셀 유동으로부터 한 셀 유동으로의 천이만 일어난다.

참고문헌

- (1) Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R.L. and Sammakia, B., 1988, *Buoyancy-induced Flows and Transport*, Hemisphere Publishing Corporation, pp. 764~771.
- (2) Powe, R.E., Carley, C.T. and Bishop, E.H., 1969, "Free Convective Flow Patterns in Cylindrical Annuli," *J. Heat Transfer*, Vol. 91, pp. 310~314.
- (3) Rao, Y.F., Miki, Y., Fukuda, K., Takata, Y. and Hasegawa, S., 1985, "Flow Patterns of Natural Convection in Horizontal Cylindrical Annuli," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 28, pp. 705~714.
- (4) Cheddadi, A., Caltagirone, J. P., Mojtabi, A. and Vafai, K., 1992, "Free Two-Dimensional Convective Bifurcation in a Horizontal Annulus," *J. of Heat Transfer*, Vol. 114, pp. 99~106.
- (5) Yoo, J.-S., 1996, "Dual Steady Solutions in Natural Convection Between Horizontal Concentric Cylinders," *Int. J. of Heat and Fluid flow*, Vol. 17, pp. 587~593
- (6) Mack, L.R. and Bishop, E.H., 1968, "Natural Convection Between Horizontal Concentric Cylinders for Low Rayleigh Numbers," *Quarterly J. of Mech. and Appl. Math.*, Vol. 21, pp. 223~241.
- (7) Custer, J.R. and Shaughnessy, E.J., 1977, "Thermoconvective Motion of Low Prandtl Number Fluids Within a Horizontal Cylindrical Annulus," *J. Heat Transfer*, Vol. 99, pp. 596~602.
- (8) Fant, D.B., Prusa, J. and Rothmayer, A.P., 1990, "Unsteady Multicellular Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus," *J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 379~387.
- (9) Yoo, J.-S., Choi, J.Y. and Kim, M.-U., 1994, "Multicellular Natural Convection of a Low Prandtl Number Fluid Between Horizontal Concentric Cylinders," *Numer. Heat Transfer, Part A*, Vol. 25, pp. 103~115.
- (10) Prud'homme, M., Robillard, L. and Vasseur, P., 1987, "A Study of Laminar Natural Convection in a Nonuniformly Heated Annular Fluid Layer," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 30, pp. 1209~1222.
- (11) Kumar, P., 1988, "Study of Natural Convection in Horizontal Annuli," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 31, pp. 1137~1148.
- (12) Ho, C.J. and Lin, Y.H., 1988, "Laminar Natural Convection of Cold Water Enclosed in a Horizontal Annulus With Mixed Boundary Conditions," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 31, pp. 2113~2121.
- (13) Kolesnikov, P.M. and Bubnovich, V.I., 1988, "Non-Stationary Conjugate Free-Convective Heat Transfer in Horizontal Cylindrical Coaxial Channels," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 31, pp. 1149~1156.
- (14) Yoo, J.-S., 1998, "Mixed Convection of Air between Two Horizontal Concentric Cylinders with a Cooled Rotating Outer Cylinder," *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, pp. 293~302.
- (15) Yoo, J.-S., 1998, "Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus," *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, pp. 3055~3073.
- (16) Yoo, J.-S., 1999, "Transition and Multiplicity of Flows in Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus : $Pr=0.4$," *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 709~722.
- (17) Roache, P.J., 1972, *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa, pp. 53~64.
- (18) Buzbee, B.L., Golub, G.H. and Nielson, C.W., 1970, "On Direct Methods for Solving Poisson's Equations," *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 7, pp. 627~656.