프레게 산수 체계에서의 페아노 공리의 연역

이종권
(중앙대학교 철학과)

요 약 프레게의 논리주의 프로그램은 기본적인 산수 법칙 혹은 가장 단순한 수의 법칙을 논리적 원리로부터 유도해 냄으로써 달성된다. 프레게는 이른바 외연 공리를 포함하는 논리적 원리로부터 흄의 원리로 지칭되는 원리를 거쳐 '기본적인' 산수 법칙을 이끌어내고 있다. 외연 공리가 흄의 원리를 연역하는 과정에서만 사용되고 있다는 사실은 프레게가 말하는 기본적인 산수 법칙을 외연 공리 대신 흄의 원리를 공리로 채택함으로써 유도해낼 수 있음을 암시한다. 여기서는 흄의 원리로부터 페아노의 다섯 가지 공리를 연역해 내는 프레게의 과정을 조상 관계에 대한 일반적인 고찰에 기초하여 보다 단순화하고 있다.

주요어 수리 철학, 프레게, 논리주의

1. 페아노의 공리와 흄의 원리

프레게의 수리 철학의 일차적인 목표는 산수적인 진술이 분석적임을 증명하는 것이었다. 프레게가 말하는 분석성은 어떤 진술을 참이라고 주장을 정당화할만한 궁극적인 근거가 무엇인가와 관계되는 것으로서 따라서 예를 들어 수학적 진술들의 분석성 여부를 가리는 문제는 그 진술의 증명과정을 구함으로써 그것들이 의존하고 있는 궁극적인 진리가 어떤 것인가를 가리는 문제로 귀착된다.[1] 보다 구체적으로 어떤 진술이 분석적이라는 것은 "그러한 증명을 하는

1) [FA], §3.

과정에서 오직 일반적인 논리적 법칙과 정의만을 만나게 된다"[2]는 것을 의미한다. 이러한 프레게의 정의에 비추어 볼 때, 모든 산수적인 진술이 분석적임을 보이기 위해서는 그 진술들이 논리적 법칙들로부터 논리적 추론 절차에 따라 단계적으로 이끌려 나온다는 것을 증명할 필요가 있다.

산수적 진술들이 논리 법칙으로부터 유도된다면 산수의 영역과 논리의 영역은 서로 별개의 영역이 아니며 그것들은 모두 논리의 영역에 속한다고 말해야 한다. 그러나 산수학이 논리학으로부터 유도된다고 말하기 위해서는 적어도 그것을 증명하기 이전에는 산수의 영역과 논리의 영역, 혹은 산수적 진술과 논리적 진술을 구분할 수 있어야 할 것이다. 프레게에 있어 논리적 진술은 이계의(second-order)의 언어에 속하는 논리적 용어만이 등장하는 진술을 의미한다. 그러나 산수적 진술에는 논리적 용어만이 아니라 산수학에 속하는 고유한 용어가 등장할 것이다. 산수학의 진리들은 산수학의 용어들이 지니는 고유한 산수적인 의미 덕분에 참인 산수학의 진술이 될 것이다. 따라서 산수학의 용어와 논리적 용어를 연결시키는 대응 규칙 같은 것이 없다면 산수학의 용어를 포함하는 진술들이 순수한 논리적 진술로부터 유도될 수 있을 것이라고 생각하기 어렵다. 그러한 대응 규칙의 역할을 하는 것이 프레게가 말하는 정의, 즉 논리적 용어에 의거한 산수학의 용어들의 정의이다.

프레게의 프로그램이 실행하기 위해서는 모든 산수학의 용어를 논리적 용어로 정의할 수 있어야 한다. 그러나 그러기 위해서는 산수학의 모든 용어들이 정의할 수 있는 몇 가지 기본적인 산수학의 용어를 추려낼 수 있어야 할 것이

2) 앞의 책, 4 쪽.

고 또한 그 기본적인 용어를 논리적 용어로 정의할 수 있어야 할 것이다. 프레게가 궁극적으로 노리는 것은 모든 산수학의 진리를 논리적으로 유도해 내는 것이지만 그것으로부터 그 이외의 다른 모든 산수학의 진리를 연역해 낼 수 있는 몇 가지 "기본적인 산수 법칙" 혹은 "가장 단순한 수의 법칙"(the simplest laws of Number)[3]이 존재할 뿐더러 그것들을 오직 논리적 법칙에서 이끌어내지 않는 한 프레게의 목표가 어떻게 달성될 수 있을지 생각하기 어렵다. 여기서 프레게가 말하는 기본적인 산수 법칙과 가장 단순한 수의 법칙이 산수학의 공리를 의미하는 것으로 해석한다면 프레게의 프로그램은 우선 산수학이 공리화가 가능하다는 것을 전제로 하고 있는 것으로 보인다. 괴델에 의하면 산수학의 완전하고도 일관적인 공리화는 불가능하지만 그러나 여기서는 페아노가 수립한 공리 체계를 논리적으로 연역해 낼 수 있으면 프레게가 목적으로 한 논리주의의 프로그램은 달성된 것으로 보기로 한다.

잘 알려진 것처럼 페아노의 공리 체계는 일항의 일계 술어인 '자연수'(Nt)과 '영'(*0*), 그리고 이항의 일계 술어인 '전자'(Pred)를 기본적인 산수적 용어로 채택하고 있다. 즉 Nt(x)는 "x는 자연수이다"라는 것을, 그리고 Pred(x, y)는 "자연수 수열에서 x가 y의 바로 앞에 온다"는 것을 의미한다, 페아노의 공리는 다섯 가지인데 그것은 이계의 논리 언어로 다음과 같이 표현된다.

P1. Nt(*0*)

(*0*은 자연수이다.)

---

3) [BLA], 1, §0, 29 쪽.

P2. $Nt(x) \rightarrow \exists y(Nt(y) \wedge Pred(x, y))$

(모든 자연수에 대해 후자인 자연수가 존재한다.)

P3. $\neg Pred(x, 0)$

(*0*은 어떤 것의 후자도 아니다.)

P4. $(Pred(x, u) \wedge Pred(x, v) \rightarrow u=v) \wedge (Pred(u, x) \wedge Pred(v, x) \rightarrow u=v)$

(Pred는 일대일의 함수이다.)

P5. $\forall F(F0 \wedge \forall z(Nt(z) \wedge Fz \rightarrow \forall w(Pred(z, w) \rightarrow Fw)) \rightarrow (Nt(x) \rightarrow F(x))$

(수학적 귀납법)

위에서 지적한 것처럼 위의 산수학의 기본 법칙을 순전히 논리적인 법칙으로부터 유도해내기 위해서는 우선 'Nt'와 '*0*', 그리고 'Pred'를 논리적인 용어로 정의해야만 한다. 프레게가 『산수학의 기초』(*Foundations of Arithmetic*:FA)에서 선택한 용어는 일항의 술어 혹은 개념을 변항으로 하고 수를 치역으로 하는 '…에 속하는 수'(the number which belongs to)라는 함수이다. 개념 *F*에 속하는 수를 기호로 $N(F)$ 혹은 $N(F\alpha)$로 나타내기로 할 때[4], 프레게는 *0*과 Pred를 다음과 같이 정의하고 있다.

<u>정의 1</u>

(1) $0 =df\ N(\neg \alpha = \alpha)$

(2) $Pred(m, n) =df\ \exists F(N(F)=n \wedge \exists w(Fw \wedge N(F\alpha \wedge \neg \alpha = w)=m))$

수 *0*은 즉 자신과 동일하지 않은 대상들의 수(the Number which belongs to the concept "not identical with itself)로 정의되며[5] *n*이 *m*

4) 개념이나 관계를 제시할 때, 그것의 항이 들어갈 자리를 나타낼 필요가 있을 경우 그리스 문자 α, β 등을 사용하기로 한다.

의 후자라는 것은 "개념 *F*에 속한 수가 *n*인 반면에 '*F*에 포섭되기는 하지만 *x*는 아니다'라는 개념에 속하는 수는 *m*인 개념 *F*와 그 개념에 포섭되는 대상 *x*가 존재한다"(there exist a concept *F*, and an object falling under it *x*, such that the Number which belongs to the concept *F* is *n* and the Number which belongs to the concept 'falling under *F* and not identical with *x*' is *m*,")는 것으로 정의된다.[6]

페아노의 공리에서 오직 세 가지 기본저인 용어 가운데 *0*과 Pred만이 포함된 진술은 **P3**과 **P4**인데 그 공리는 따라서 위의 정의 1과 함수 *N*에 관한 '논리적 법칙'으로부터 순전히 논리적 방식으로 연역될 수 있을 것으로 기대된다. 함수 *N*에 관한 논리적 법칙은 그 함수 값이 어떤 경우에 동일한가에 관한 것으로 흔히 '흄의 원리'(Hume's Principle)로 알려져 있는데, 그에 의하면 변항이 되는 개념들간에 일대일의 대응 관계가 성립할 때, 그 개념들에 속하는 수는 동일하다. 개념 *F*와 개념 *G*간에 일대일의 대응 관계가 성립한다는 것을 '$F \approx G$'로 나타내기로 하자. 즉,

<u>정의 2</u>(일대일의 대응 관계)

$$F \approx G \ =\mathrm{df}\ \exists R(\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Rxz \rightarrow y=z) \wedge (Ryx \wedge Rzx \rightarrow y=z)) \wedge \forall x(Fx \rightarrow \exists y(Rxy \wedge Gy)) \wedge \forall x(Gx \rightarrow \exists y(Ryx \wedge Fy)))$$

흄의 원리는 따라서 다음과 같이 표현할 수 있다.

<u>흄의 원리(Hume's Principle)</u>[7]

$$N(F)=N(G) \ =\mathrm{df}\ F \approx G$$

5) [FA], §74. 87 쪽.
6) [FA], §76, 89 쪽.
7) [FA], §63.

이제 흄의 원리와 위의 정의 1의 (1)과 (2)로부터 페아노의 공리 **P3**와 **P4**가 유도된다는 것을 증명하기로 하자.

P3의 증명:

Pred(x, 0)이라고 가정하자. Pred의 정의에 의해 $N(F)=0$이고 $\exists y(Fy \wedge N(F\alpha \wedge \neg \alpha = y) = x)$인 개념 F가 존재할 것이다. 그런데 수 0에 관한 정의(정의 1의 (1))에 의해 $N(F)=N(\neg \alpha = \alpha)$. 따라서 흄의 원리에 의해 어떤 일대일의 대응 함수 R에 대해 $\forall x(Fx \rightarrow \exists y(Rxy \wedge \neg y=y))$. 그런데 $\neg \exists y(Rxy \wedge \neg y=y)$. 따라서 $\forall x \neg Fx$ 혹은 $\neg \exists xFx$. 그러나 $\exists y(Fy \wedge N(F\alpha \wedge \neg \alpha = y) = x)$로부터 $\exists yFy$를 얻을 수 있는데 이것은 앞서 얻은 $\neg \exists xFx$와 충돌한다. 따라서 Pred(x, 0)는 참이 될 수 없다. ■

P4의 증명:

(1) Pred(x, u)$\wedge$Pred(x, v)$\rightarrow u=v$의 증명: Pred(x, u)이고 Pred(x, v)라고 하자. 술어 Pred의 정의(정의 1의 (2))에 의해 $N(F)=u$이고 $Fa \wedge N(F\alpha \wedge \neg \alpha = a) = x$인 술어 F와 원소 a, 그리고 $N(G)=v$이고 $Gb \wedge N(G\alpha \wedge \neg \alpha = b) = x$인 술어 G와 원소 b가 존재할 것이다. 따라서 $N(F\alpha \wedge \neg \alpha = a) = N(G\alpha \wedge \neg \alpha = b)$이므로 $F\alpha \wedge \neg \alpha = a \approx G\alpha \wedge \neg \alpha = b$. 그러므로 개념 $F\alpha \wedge \neg \alpha = a$와 $G\alpha \wedge \neg \alpha = b$를 일대일로 대응시키는 관계 R이 존재한다. 관계 R은 즉, a를 제외한 F에 포섭되는 모든 원소와 b를 제외한 G에 포섭되는 모든 원소를 일대일로 대응시킨다. 지금 관계 $Q\alpha\beta$를 $F\alpha \wedge \neg \alpha = a \wedge R\alpha\beta$라고 하면 Q도 명백히 F의 변역 가운데 a를 제외한 집합과 G의 변역 가운데 b를 제외한 집합을 일대일로 대응시킬 것이다. 그러므로 관계 $Q\alpha\beta \vee (\alpha = a \wedge \beta = b)$는 명백히 F의 변역과 G의 변역의 집합을 일대일로 대응시킨다. 따라서 $F \approx G$이고 흄의 원리에 의해 $N(F)=N(G)$. 그러므로 $u=v$.

(2) $\text{Pred}(u, x) \wedge \text{Pred}(v, x) \rightarrow u=v$의 증명: $\text{Pred}(u, x)$이고 $\text{Pred}(v, x)$라고 하자. 그러면 Pred의 정의에 의해 $N(F)=x$이고 $Fa \wedge N(F\alpha \wedge \neg \alpha=a)=u$인 술어 F와 원소 a, 그리고 $N(G)=x$이고 $Gb \wedge N(G\alpha \wedge \neg \alpha=b)=v$인 술어 G와 원소 b가 존재할 것이다. $N(F)=x$이고 $N(G)=x$이므로 $N(F)=N(G)$. 따라서 흄의 원리에 의해 술어 F와 G를 일대일로 대응시키는 관계 R이 존재한다. 이 관계에 의해 F에 포섭되는 a에 대응되는 G의 원소를 a'이라 고 하고 G에 포섭되는 b에 대응되는 F의 원소를 b'이라고 하자. 즉 Raa'이고 $Rb'b$. 이제 관계 $Q\alpha\beta$를 $(\neg\alpha=a \wedge \neg\alpha=b' \wedge R\alpha\beta) \vee (\alpha=a \wedge \beta=b) \vee (\alpha=a' \wedge \beta=b')$과 같이 정의하기로 하자. 관계 Q는 즉 a를 b에, 그리고 a'을 b'에 대응시키는 것만이 다를 뿐 다른 모든 원소에 대해서는 R과 같은 방식으로 대응시키는 관계이다. 그 관계는 명백히 개념 $F\alpha \wedge \neg\alpha=a$와 $G\alpha \wedge \neg\alpha=b$를 일대일로 대응시킬 것이다. 따라서 흄의 원리에 의해 $N(F\alpha \wedge \neg \alpha=a)=N(G\alpha \wedge \neg \alpha=b)$. 즉 $u=v$. ■

위에서 0과 Pred에 관한 정의와 흄의 원리로부터 페아노의 공리 가운데 **P3**와 **P4**가 이계의 논리 법칙에 의해 연역적으로 유도됨을 보았다. 그 증명 과정은 본질적으로 프레게가 『산수의 기초』에서 제시한 방법에 따른 것이다. 나머지 **P1**과 **P2**, 그리고 **P5**를 증명하기 위해서는 함수 Nt를 N에 의거하여 정의할 필요가 있다. 그러한 정의와 앞서의 0과 Pred의 정의, 그리고 흄의 원리로부터 **P1**, **P2** 그리고 **P5**를 증명하기만 하면, 그리고 함수 N을 논리적 용어로 간주할 수 있기만 하면 프레게의 프로그램은 달성되었다고 말할 수 있을 것이다.

프레게는 함수 N이 논리적 용어라고 점을 의심하지는 않은 것으로 보인다. 프레게는 위에서 제시한 페아노의 기본 용어의 정의

와 흄의 원리로부터 페아노의 정리를 연역하는 것으로는 자신의 논리주의의 프로그램이 충분히 달성된 것으로 보지 않았지만 그 이유를 용어 N의 성격에서 찾지는 않았기 때문이다. 프레게가 보기에 개념의 수의 동일성에 관한 흄의 원리가 안고 있는 문제는 그보다는 '$N(F)=q$'와 같은 형태의 문장이 참인지 여부를 가리는 데 그 원리가 충분하지 않다는 것이었다.

프레게는 그 문제를 극복하기 위해서는 $N(F)$에 대한 명시적인 정의가 필요하다고 생각했다. 그러한 정의를 위해 프레게가 동원한 용어는 개념을 변항으로 하고 이른바 외연(Umfang)을 함수값으로 하는 이계의 함수였다. 그 함수를 E로 나타내기로 하자, 위의 정의 2에서의 $\approx$는 일종의 개념을 변항으로 하는 이계 관계로 생각할 수 있다. 이계 관계에서 개념이 들어갈 장소를 그리스 대문자 Φ, Ψ 등으로 나타내기로 하면 $\Phi \approx F$는 'F와 동수임'(gleichzältig)을 의미하는 이계의 개념이 된다. 프레게는 그 개념의 외연을 F에 속한 수로 정의하자고 제안한다. 즉,

<u>개념의 수의 정의</u>

$N(F) =\mathrm{df}\ E(\Phi \approx F)$

위의 정의에 의하면 '$N(F)=q$'와 같은 형태의 문장의 진위를 결정하는 문제는 '$E(\Phi \approx F)=q$'와 같은 문장의 진위를 결정하는 문제로 귀착된다. 프레게는 후자의 문제가 전자의 문제가 안고 있는 난점을 극복할 것으로 생각한 듯하다. 그것은 여하간에 흄의 원리에 비추어 볼 때, 개념의 수에 대한 위의 정의가 타당하기 위해서는 그 정의로부터

(a) $$E(\Phi \approx F)=E(\Phi \approx G) \leftrightarrow F \approx G$$

가 연역되지 않으면 안된다. 개념의 수의 정의는 개념의 수를 개념의 외연으로 환원시키는데 다리 법칙의 역할을 한다. 앞서 페아

노의 공리의 경우와 마찬가지로 (a)를 도출하기 위해서는 다리 법칙 이외에 외연에 관한 법칙이 필요할 것이다. 그 법칙을 프레게는 그의 논리 체계에서 다섯 번째의 공리로 채택하고 있다.

V. $E(F)=E(G)\leftrightarrow\forall x(Fx\leftrightarrow Gx)$

공리 V에 의해 $E(\Phi\approx F)=E(\Phi\approx G)\leftrightarrow\forall H(H\approx F\leftrightarrow H\approx G)$. 따라서

(b) $\forall H(H\approx F\leftrightarrow H\approx G)\leftrightarrow F\approx G$

를 증명하기만 하면 (a)는 즉각적으로 유도된다. (b)는 관계 $\approx$의 반사성과 대칭성, 그리고 이행성에 의해 어렵지 않게 증명된다.

수의 개념을 궁극적으로 외연의 개념으로 환원하려던 프레게의 시도는 잘 알려진 것처럼 공리 V가 러쓸의 역리와 같은 종류의 모순을 야기한다는 것이 드러남으로써 좌절되었다. 그런데 공리 V는 모순을 야기하지만 흄의 원리는 그렇지 않은 것으로 알려져 있다. 따라서 흄의 원리(와 기본적 산수 용어의 정의)로부터 페아노의 공리를 모두 연역할 수 있다면 공리 V를 배제하고 오직 흄의 원리만을 채택함으로써 체계의 생산성을 훼손하지 않으면서 모순으로부터 프레게의 체계를 구할 수도 있을 것이다. 그러나 여기서의 목적은 프레게의 체계를 구하는 일보다는 오직 흄의 원리로부터 위에서 정식화한 페아노의 공리가 연역된다는 것을 보이는 것이다. 위에서 **P3**와 **P4**를 연역한 이상, **P1**과 **P2**, 그리고 **P5**를 연역해 내기만 하면 페아노의 모든 공리는 흄의 원리와 (페아노의 기본 개념의 정의로부터) 증명되는 셈이다. 프레게는 『산수학의 기본 법칙』(*Grundgesetze der Arithmetik*:Gg)에서 [FA]에서 스케치한 수의 정의를 면밀하게 정식화한 다음 그 정의로부터 산수학의 기본 법칙을 공식적으로 보다 엄밀하게 이끌어 내고 있

다. 페아노의 공리에 대한 프레게의 증명은 라이트(Crispin Wright)가 보다 면밀하게 다듬었다.[8] 최근 헤크(Richard C. Heck, Jr.)가 Heck(1993)에서 [Gg]에서의 프레게의 방식에 따라 거의 완전한 형태로 재구성한 바 있으며, 박준용이 박준용(1999)에서 헤크의 기호를 사용하여 다시 제시한 바 있다.

페아노의 공리 **P1**과 **P2**, 그리고 **P5**는 (특히 **P2**는) 다른 공리에 비해 증명하기가 까다롭다. 그것들을 증명하자면 먼저 Nt를 정의할 필요가 있는데, Nt에 관한 프레게의 정의는 Pred 관계의 조상 관계를 기반으로 하고 있다. 여기서는 [Gg]에서의 프레게의 증명 순서를 충실히 따르는 대신에 일반적인 조상 관계에 대한 고찰을 기초로 위의 세 정리에 대한 보다 단순한 증명을 시도할 것이다. 우선 다음 절에서 일반적인 관계의 조상 관계를 정의하는 문제를 고찰하기로 한다.

2. 일반적인 관계의 조상성

여기 어떤 관계 R이 주어졌을 때, 그로부터 R-조상성을 다음과 같은 단계를 밟아 정의할 수 있다. 우선 어떤 개념이 관계 R에 대해 유전적이라는 것이 어떤 의미인지를 정의하기로 한다.

<u>정의 3</u>(*F*는 관계 *R*에 대해 유전적이다.)

$$\mathrm{Her}_R(F) =\mathrm{df}\ \forall x \forall y(Fx \wedge Rxy \rightarrow Fy)$$
$$\Leftrightarrow\ \forall x(Fx \rightarrow \forall y(Rxy \rightarrow Fy))$$

개념 F가 관계 R에 대해 유전적이라는 것은 다시 말해 그것이 R에 의해 닫혀져 있다는 뜻이다. 이것을 집합에 대해서는 다음과

8) Wright(1983) 4장의 xix절 참조.

같이 기술할 수 있다. 집합 S가 임의의 x와 y에 대해 $x \in S$이고 Rxy일 때, $y \in S$일 경우, S는 R에 대해 유전적이다 혹은 R에 의해 닫혀져 있다고 한다. 프레게는 곧장 관계 R에 대한 조상 관계를 정의하고 있는데, 여기서는 일반적인 개념 G의 R-조상 관계를 먼저 정의하기로 한다.

<u>정의 4</u>(y는 G의 R-조상이다.)
$G^R y$ =df $\forall F(\mathrm{Her}_R(F) \wedge \forall w(Gw \rightarrow Fw) \rightarrow Fy)$

y가 G의 R-조상이라는 것은, 즉 G인 모든 원소들을 포함하는 R-유전적 집합에 공통적으로 속한다는 것을 혹은 그러한 집합 가운데 최소의 집합의 원소이다라는 것을 의미한다. G의 R-조상 술어에 대해서도 우리는 그것이 관계 R에 의해 닫혀져 있는지를 물을 수 있다. 이에 대한 답변은 긍정적이다.

<u>정리 1</u>
$G^R y \rightarrow (Ryz \rightarrow G^R z)$
증명:
$G^R y$이고 Ryz라고 가정하고 $\mathrm{Her}_R(F) \wedge \forall w(Gw \rightarrow Fw)$라고 하자. 이것과 $G^R y$로부터 Fy. Fy와 Ryz 및 $\mathrm{Her}_R(F)$로부터 Fz. 따라서 연역 정리에 의해 임의의 F에 대해 $\mathrm{Her}_R(F) \wedge \forall w(Gw \rightarrow Fw) \rightarrow Fz$. 여기에 F에 대한 일반화에 의해 $G^R z$를 얻는다. ■

G^R인 원소들은 $G^R y$의 정의상 G를 바탕으로 그것의 원소들과 R, R^2 등의 관계에 있는 모든 원소들로 이루어진 집합이므로 다음이 성립할 것이다.

정리 2

(1) $Gy \rightarrow G^R y$.

(2) $Gy \wedge R^n yz \rightarrow G^R z$.

증명:

(1) Gy이고 $\mathrm{Her}_R(F) \wedge \forall w(Gw \rightarrow Fw)$이라고 하자. 후자로부터 $\forall w(Gw \rightarrow Fw)$. 이것과 Gy로부터 Fy. 따라서 $\mathrm{Her}_R(F) \wedge \forall w(Gw \rightarrow Fw) \rightarrow Fy$. F에 대한 일반화에 의해 $G^R y$.

(2) $k \geq 0$인 자연수 k에 대해 (2)의 관계가 성립한다고 하자. 그리고 $Gy \wedge R^{k+1} yz$, 즉 Gy이고 $R^{k+1} yz$라고 하자. $R^{k+1} yz$이므로 어떤 w에 대해 Rwz이고 $R^k yw$인 w가 존재한다. Gy이고 $R^k yw$이므로 가정에 의해 $G^R w$. 이제 $G^R z$임을 증명하기 위해 $\mathrm{Her}_R(F) \wedge \forall w(Gw \rightarrow Fw)$라고 하자. 이것과 $G^R w$로부터 Fw가 쉽게 유도된다. $\mathrm{Her}_R(F) \wedge \forall w(Gw \rightarrow Fw)$로부터 유도되는 $\mathrm{Her}_R(F)$과 Fw 및 Rwz로부터 곧장 Fz가 얻어진다. 따라서 연역 정리에 의해 $\mathrm{Her}_R(F) \wedge \forall w(Gw \rightarrow Fw) \rightarrow Fz$. 여기에 F에 대한 일반화에 의해 $G^R z$를 얻는다.

위에서 n이 k일 때 (2)의 관계가 성립한다는 가정 하에서 n이 $k+1$인 경우에도 (2)가 성립함을 증명하였다. 그런데 위의 (1)은 n이 0인 경우에도 (2)의 관계가 성립함을 말해주고 있다. 따라서 수학적 귀납법에 따라 모든 자연수 n에 대해 (2)가 성립한다는 것이 증명된다. ■

$G^R y$의 정의에 따라 다음이 성립한다.

$$G^R y \rightarrow (\mathrm{Her}_R(K) \wedge \forall w(Gw \rightarrow Kw) \rightarrow Ky)$$

위의 관계는 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\mathrm{Her}_R(K) \wedge \forall w(Gw \rightarrow Kw) \rightarrow (G^R y \rightarrow Ky)$$

위의 식은 G의 R-조상 집합에 대해 다음과 같은 귀납적 원리가 성립함을 말해 준다.

<u>정리 3</u>(.G의 R-조상 집합에 관한 귀납의 원리)
술어 혹은 성질 K가 관계 R에 대해 다음을 만족한다고 하자.
(1) G인 모든 원소들은 성질 K를 지닌다.
(2) 임의의 원소 x에 대해 x가 성질 K를 지닐 경우 그것과 R의 관계에 있는 모든 원소 y도 성질 K를 지닌다. 즉 성질 K는 관계 R에 의해 보존된다, 혹은 닫혀져 있다. 이때,
G의 R-조상 집합에 속하는 모든 원소들은 성질 K를 지닌다.

어떤 원소가 G의 R-조상 집합에 속한다면 G이거나 혹은 G^R인 어떤 원소와 R의 관계를 가질 것이다. 다음 정리는 이것이 참임을 말해 주고 있다.

<u>정리 4</u>
$G^R y \rightarrow (Gy \vee (\exists w)(G^R w \wedge Rwy))$
증명:
정리 3에 비추어, 정리 4를 증명하기 위해서는 (ㄱ) G인 모든 원소들이 성질 $G\alpha \vee (\exists w)(G^R w \wedge Rw\alpha)$를 지니며, (ㄴ) 그 성질이 관계 R에 의해 닫혀져 있음을 증명하는 것으로 족하다.
(ㄱ)이 성립함은 자명하다. (ㄴ)을 증명하기 위해 $Gy \vee (\exists w)(GRw \wedge R^w y)$이고 Ryz라고 하자. Gy라고 할 때, 정리 2의 (1)에 의해 GRy. 또한 $(\exists w)(GRw \wedge R^w y)$인 경우에도 정리 1에 의해 GRy. 따라서 양도논법에 의해 $Gy \vee (\exists w)(GRw \wedge R^w y)$일 때, GRy. 이것과 Ryz로부터 $GRy \wedge R^y z$와 $(\exists y)(GRy \wedge R^y z)$를 얻을 수 있다. 따라서 $Gz \vee (\exists y)(GRy \wedge R^y z)$. 이것은 문제의 성질이 R에 대해 닫혀져 있음을 의미한다. ■

이제 GRy를 $(\exists w)(Gw \wedge Rwy)$의 축약된 표현이라고 하자. 어떤 원소가 R-조상 집합에 속한다면 G이거나 GR이거나 혹은 GR의 R-조상인 어떤 원소와 R의 관계를 가질 것이다. 다음 정리는 이것이 참임을 보이고 있다.

<u>정리 5</u>

$G^R y \to (Gy \vee GRy \vee (\exists w)(GR^R w \wedge Rwy))$

증명:

정리 3에 의해, 정리 5를 증명하기 위해서는 ㈀ G인 모든 원소들이 성질 $G\alpha \vee GR\alpha \vee (\exists w)(GR^R w \wedge Rw\alpha)$를 지니며, ㈁ 그 성질이 관계 R에 대해 닫혀져 있음을 증명하는 것으로 족하다.

정리 4의 경우와 마찬가지로 ㈀이 성립함은 자명하다. ㈁을 증명하기 위해 $Gy \vee GRy \vee (\exists w)(GR^R w \wedge Rwy)$이고 Ryz라고 하자. Gy라고 할 때, 이것과 Ryz로부터 $Gy \wedge Ryz$를, 그리고 GRz를 얻을 수 있다. 이것으로부터 쉽게 $Gz \vee GRz \vee (\exists w)(GR^R w \wedge Rwz)$가 얻어진다.

또 GRy라고 하자. 정리 2의 (1)에 의해 $GR^R y$. 마찬가지로 $(\exists w)(GR^R w \wedge Rwy)$인 경우에도 정리 1에 의해 $GR^R y$. 따라서 GRy이거나 $(\exists w)(GR^R w \wedge Rwy)$인 경우에도 모두 $GR^R y$. 이것과 Ryz로부터 $GR^R y \wedge Ryz$와 $(\exists y)(GR^R y \wedge Ryz)$를 얻을 수 있다. 따라서 $Gz \vee GRz \vee (\exists w)(GR^R w \wedge Rwz)$. 위의 결과에 의해 $Gy \vee GRy \vee (\exists w)(GR^R w \wedge Rwy)$이고 Ryz이면 $Gz \vee GRz \vee (\exists w)(GR^R w \wedge Rwz)$임을 알 수 있다. 이것은 문제의 성질이 R에 대해 닫혀져 있음을 보여준다. ■

지금까지 우리는 어떤 일반적인 개념의 R-조상 관계에 관해 살펴보았는데, 이제부터 관계 R의 다음 원소를 의미하는 개념 $G\alpha \Leftrightarrow Rx\alpha$의 R-조상 관계를 고찰하기로 한다. 개념 $Rx\alpha$의 R-조상 관계를 단순히 R-조상 관계로 부르기로 하고 $G^R y$를 기호로 $x \lessdot_R y$로 나타내기로 하자. R-조상 관계는 즉, 다음에 의해 정의된다.

<u>정의 5</u>(y는 관계 R의 열에서 x의 뒤에 온다. y는 x의 R-조상이다. x는 y의 R-후손이다.)9)

---

9) 관계 '$x \lessdot y$'가 성립할 경우, 프레게는 'y가 R-열에서 x 뒤에 온다'(y follows in the R-series after x) 혹은 'x가 R-열에서 y 전에 온다'(y follows in the

$x <_R y =\text{df} \ \forall F(\text{Her}_R(F) \wedge \forall w(Rxw \rightarrow Fw) \rightarrow Fy)$

앞으로 별도의 언급이 없는 한 $x<y$라고 하면 $x<_R y$을 의미하는 것으로 한다. y가 x의 R-조상이라는 것은 곧 y가 관계 R에 대한 x의 바로 다음 원소를 포함하는, 모든 R-유전적 집합에 공통적으로 속한다, 혹은 그러한 집합들 가운데 최소의 집합에 속한다라는 것을 의미한다.

x의 약한 R-조상 관계는 그것과 동일한 관계, 즉 개념 $G\alpha \Leftrightarrow x = \alpha$의 R-조상 관계로 정의된다. 그것은 즉 x와 그것을 포함하는 모든 R-유전적 집합에 공통적으로 속하는 원소가 갖는 관계이다. x의 약한 R-조상 관계를 기호로 $\leqslant_R$로 나타내면 $x \leqslant_R y$는 다음과 같이 정의된다.

<u>정의 6</u>(y는 x의 약한 R-조상이다. x는 y의 약한 R-후손이다.)[10]

$x \leqslant_R y =\text{df} \ \forall F(\text{Her}_R(F) \wedge \forall w(x=w \rightarrow Fw) \rightarrow Fy)$

$\Leftrightarrow \forall F(\text{Her}_R(F) \wedge Fx \rightarrow Fy)$

앞으로 별도의 언급이 없는 한 $x \leqslant y$라고 하면 $x \leqslant_R y$을 의미하

R-series after x)고 말하고 있다. [FA], §79 와 [BLA], § 45, 103 쪽. 헤크(Richard G. Heck)는 그 관계를 강한 조상 관계로 부르고 있으며 기호 $\mathcal{F}(R)(x, y)$로 표현하고 있는데, 강한 조상 관계라는 것은 그 관계가 반사적인 성질을 지니지 않기 때문이다. 즉 반드시 $x<x$가 성립하지는 않기 때문이다.

10) 헤크는 약한 조상 관계를 $\mathcal{F}^{=}(R)(x, y)$로 표현하고 있는데, 그의 정의는 여기서 제시한 것과는 다르다. 헤크의 정의는 프레게의 예를 따른 것으로 $\mathcal{F}(R)(x, y) \vee x=y$에 의해 정의된다. 아래의 정리 8에서 여기서 정의된 $x \leqslant_R y$가 $x <_R y \vee x=y$와 동치임을, 따라서 여기서 제시된 약한 조상 관계의 정의가 프레게와 헤크의 정의와 맞먹는다는 것을 보게될 것이다. 프레게는 $\mathcal{F}^{=}(R)(x, y)$, 즉 "y가 R의 열에서 x 뒤에 오든가 혹은 y가 x와 동일하다"는 진술이 "y는 x로 시작되는 R-열의 원소이다" 혹은 "x는 y로 끝나는 R-열의 원소이다"라는 진술과 동일한 의미라고 지적하고 있다. [FA], §81, 참조.

는 것으로 한다.

위의 정리 1에서 개념 $G\alpha$를 각각 $Rx\alpha$와 $x=\alpha$로 잡음으로써 다음 정리를 얻을 수 있다.

<u>정리 6</u>

(1) $x<y\rightarrow(Ryz\rightarrow x<z)$

(2) $x\leqslant y\rightarrow(Ryz\rightarrow x\leqslant z)$

같은 방법으로 정리 2로부터 다음을 얻을 수 있다.

<u>정리 7</u>

(1) $Rxy\rightarrow x<y$

(2) $x=y\rightarrow x\leqslant y$

정리 7의 (1)은 x와 R의 관계에 있는 모든 원소가 x의 강한 R-조상임을 말해 주고 있다. 정리 7의 (2)로부터 관계 $\leqslant$의 반사성에 관한 정리를 얻을 수 있다.

<u>정리 8</u>

$x\leqslant x$

관계 $<$과 $\leqslant$간에는 다음과 같은 관계가 성립하는데, 그러한 관계가 $<$를 강한 조상 관계로, 그리고 $\leqslant$를 약한 조상 관계로 부르는 것을 정당화한다.

<u>정리 9</u>

$x<y\rightarrow x\leqslant y$

증명:

$x<y$라고 가정하자. 이 가정 하에서 $\mathrm{Her}_R(F)\wedge Fx$를 전제로 하여 Fy

를 이끌어 내기만 하면 된다. $\mathrm{Her}_R(F) \wedge Fx$로부터 $\mathrm{Her}_R(F)$와 Fx. 이것으로부터 쉽게 $Fx \wedge \forall w(Rxw \to Fw)$를 얻는다. 따라서 $\mathrm{Her}_R(F) \wedge \forall w(Rxw \to Fw)$. 이 결론이 $\mathrm{Her}_R(F) \wedge Fx$에서 귀결된 것이므로 $\mathrm{Her}_R(F) \wedge Fx \to \mathrm{Her}_R(F) \wedge \forall w(Rxw \to Fw)$라고 말할 수 있다. 그런데 최초의 가정 $x \prec y$로부터 $\mathrm{Her}_R(F) \wedge \forall w(Rxw \to Fw) \to Fy$. 따라서 가언적 삼단 논법에 의해 $\mathrm{Her}_R(F) \wedge Fx \to Fy$. 이것을 일반화함으로써 $x \preccurlyeq y$를 얻는다. ■

정리 7의 (2)와 정리 9에 의해 $(x=y \vee x \prec y) \to x \preccurlyeq y$가 성립한다. 뒤에 가서 우리는 그 역도 성립함을 따라서 $(x=y \vee x \prec y)$와 $x \preccurlyeq y$가 동치임을 보게 될 것이다.

관계 $\prec$과 $\preccurlyeq$의 정의로부터 다음이 곧장 유도된다.

$$x \prec y \to (\mathrm{Her}_R(F) \wedge \forall w(Rxw \to Fw) \to Fy)$$
$$x \preccurlyeq y \to (\mathrm{Her}_R(F) \wedge Fx \to Fy)$$

위의 관계로부터 문장 논리의 법칙과 위의 정리 9에 의해 다음을 얻을 수 있다.

<u>정리 10</u>

(1) $\mathrm{Her}_R(F) \wedge Fx \to (x \triangleright y \to Fy)$

(2) $\mathrm{Her}_R(F) \wedge \forall w(Rxw \to Fw) \to (x \prec y \to Fy)$

위의 정리 10의 (1)에서 기호 '$\triangleright$'는 그 자리에 관계 $\prec$과 $\preccurlyeq$ 가운데 어느 것을 대입해 넣어도 성립한다는 것을 의미한다.

정리 10의 (1)은 x를 포섭하는 모든 유전적인 개념이 x의 약한 조상이나 강한 조상을 모두 포섭함을 보이고 있다. 따라서 그것에 의하면 약한 혹은 강한 R-선조 관계와 관련하여 다음과 같은 귀납적 원리가 성립한다.

<u>귀납 원리1</u>

어떤 개념 혹은 성질 K가 다음을 만족한다고 하자.

(1) x가 성질 K를 지닌다.

(2) 성질 K가 관계 R에 의해 닫혀져 있다. 즉 관계 R에 대해 유전적이다.

이때 x의 모든 약한 혹은 강한 R-선조는 성질 K를 지닌다.

정리 10의 (1)로부터 그런데 또다른 형태의 귀납의 원리를 얻을 수 있다. 우선 유전성의 정의에 따라 그것을 다음과 같은 형태로 다시 쓸 수 있다.

$$Fx \wedge \forall z \forall w(Fz \wedge Rzw \rightarrow Fw) \rightarrow (x \triangleright y \rightarrow Fy)$$

위의 공식에서 개념 $F\alpha$ 대신에 $x \triangleright \alpha \wedge F\alpha$를 바꾸어 넣음으로써 다음을 얻는다.

$$x \triangleright x \wedge Fx \wedge \forall z \forall w(x \triangleright z \wedge Fz \wedge Rzw \rightarrow x \triangleright w \wedge Fw) \rightarrow (x \triangleright y \rightarrow x \triangleright y \wedge Fy)$$

(위의 공식에서는 $\triangleright$의 자리에 $<$이나 $\leqslant$을 바꾸어 넣을 때, 모든 자리에 동시에 바꾸어 넣어야 한다.) 그런데 $(x \triangleright y \rightarrow x \triangleright y \wedge Fy)$은 문장 논리의 법칙에 의해 $x \triangleright y \rightarrow Fy$과 동치이다. 또한 정리 6에 비추어 볼 때, $x \triangleright z \wedge Rzw \rightarrow x \triangleright w$이다. 따라서 위의 식은 다음과 같이 단순화할 수 있다.

$$x \triangleright x \wedge Fx \wedge \forall z \forall w(x \triangleright z \wedge Fz \wedge Rzw \rightarrow Fw) \rightarrow (x \triangleright y \rightarrow Fy)$$

특히 정리 8에 의해 $x \leqslant x$이므로, $\triangleright$의 자리에 $\leqslant$을 동시에 대입해 넣음으로써 다음 정리를 얻을 수 있다.

<u>정리 11</u>

$Fx \wedge \forall z(x \leqslant z \wedge Fz \rightarrow \forall w(Rzw \rightarrow Fw)) \rightarrow (x \leqslant y \rightarrow Fy)$

정리 11은 관계 $\leqslant$과 관련된 귀납의 원리가 다음과 같은 형태로도 성립함을 말해주고 있다.

<u>귀납 원리2</u>

어떤 개념 혹은 성질 K가 다음을 만족한다고 하자.

(1) x가 성질 K를 지닌다.

(2) 성질 K가 x의 약한 R-선조인 원소들에 대해 관계 R에 의해 닫혀져 있다.

이때 x의 모든 약한 R-선조는 성질 K를 지닌다.

개념 $G\alpha$를 $x=\alpha$로 잡을 경우, $GR\alpha$는 $Rx\alpha$와 동치가 된다. 따라서 정리 4와 5로부터 다음 관계를 얻는다.

$$x \leqslant y \rightarrow x=y \vee \exists w(x \leqslant w \wedge Rwy)$$

$$x \leqslant y \rightarrow x=y \vee Rxy \vee \exists w(x < w \wedge Rwy)$$

그런데 위의 두 관계의 역도 성립한다. 첫 번째 관계의 경우 $x=y$이면 정리 7의 (2)에 의해 $x \leqslant y$. $\exists w(x \leqslant w \wedge Rwy)$인 경우 정리 6의 (2)에 의해 $x \leqslant y$. 따라서 양도 논법에 의해 $x=y \vee \exists w(x \leqslant w \wedge Rwy) \rightarrow x \leqslant y$. 마찬가지로 두 번째 관계의 경우에도 $x=y$이면 $x \leqslant y$. 또한 Rxy인 경우 정리 7의 (1)과 정리 9에 의해 $x \leqslant y$. $\exists w(x < w \wedge Rwy)$인 경우 정리 6의 (1)과 정리 9에 의해 $x \leqslant y$. 따라서 $x=y \vee Rxy \vee \exists w(x < w \wedge Rwy) \rightarrow x \leqslant y$.

<u>정리 12</u>

(1) $x \leqslant y \leftrightarrow x=y \vee \exists w(x \leqslant w \wedge Rwy)$

(2) $x \leqslant y \leftrightarrow x=y \vee Rxy \vee \exists w(x<w \wedge Rwy)$

위의 정리 7의 (1)에 의하면 $Rxy \to x<y$. 또한 정리 6의 (1)의 비추어 볼 때, $\exists w(x<w \wedge Rwy) \to x<y$이다. 따라서 정리 12의 (2)로부터 $x \leqslant y \to x=y \vee x<y$를 얻는다. 그런데 정리 7의 (2)와 정리 9에 의해 $(x=y \vee x<y) \to x \leqslant y$가 성립하므로 궁극적으로 다음 정리가 성립함을 알 수 있다.

<u>정리 13</u>

$x \leqslant y \leftrightarrow x=y \vee x<y$

정리 13은 $x \leqslant y$가 관계 $x=y \vee x<y$와 동치임을 말해 주고 있다.[11)]

정리 6에서 우리는 관계 $<$과 $\leqslant$가 R에 의해 닫혀져 있음을 보았는데 그 정리는 다음과 같은 형태로 강화될 수 있다.

<u>정리 14</u>

$x \rhd_1 y \to (Ryz \to x \rhd_2 z)$

증명:

우선 $x<y \to (Ryz \to x<z)$과 $x \leqslant y \to (Ryz \to x \leqslant z)$은 정리 6의 (1)과 (2)로부터 곧장 주어진다. 정리 6의 (1)과 정리 13에 비추어 볼 때, $x \leqslant y \to (Ryz \to x<z)$을 보이기 위해서는 $x=y$이고 Ryz일 때 $x \prec z$임을 증명하는 것으로 족하다. 그런데 $x=y$이고 Ryz라면 라이프니츠의 원리에 의해 Rxz. 이것으로부터 위의 정리 7의 (1)에 의해 $x \prec z$.

또한 정리 6의 (1)과 정리 9에 의해 $x<y \to (Ryz \to x \leqslant z)$. ■

---

11) 프레게처럼 $x \leqslant y$를 $x=y \vee x<y$으로 정의하면 정리 13은 증명할 필요가 없어진다. 그러나 대신 정리 10이나 11과 같은 귀납의 원리를 증명하기가 어려워진다. 그러나 여기서와 같이 $x \leqslant y$와 $x<y$를 정의하면 정리 10이나 11를 증명하기는 용이해지는 반면 정리 13을 증명할 필요가 생기게 된다.

정리 10의 (1)로부터 $\mathrm{Her}_R(F)$이면 $Fy \to (y \triangleright z \to Fz)$. 그런데 $F\alpha$를 $x \triangleright \alpha$라고 할 경우, 다시 말해 F를 어떤 원소 x의 강한 혹은 R-조상이라는 의미의 개념이라고 할 경우, 정리 6의 (1)과 (2)에 의해 $\mathrm{Her}_R(F)$. 따라서 $x \triangleright_1 y \to (y \triangleright_2 z \to x \triangleright_1 z)$를 얻는다. 여기서 $\triangleright_1$과 $\triangleright_2$의 자리에는 $<$과 $\ll$ 가운데 어느 것을 대입해도 상관이 없으나 밑의 첨자가 동일한 것끼리는 같은 것을 대입해 넣어야 한다. 정리 9와 $x = y \to (y < z \to x < z)$임을 감안할 때 다음 결과를 얻는다.

<u>정리 15</u>

$x \triangleright_1 y \to (y \triangleright_2 z \to x \triangleright_{12} z)$

위의 공식에서 $\triangleright_1$과 $\triangleright$2의 자리에는 $<$과 $\ll$ 가운데 어느 것을 대입해 넣어도 무방하며 $\triangleright_{12}$의 자리에는 $\triangleright_1$과 $\triangleright_2$의 자리에 모두 $\ll$를 대입할 경우에 한해 $\ll$를 대입해야 하며 나머지 경우에는 $<$과 $\ll$ 중 어느 것을 대입해 넣을 수 있다. 특히 정리 15로부터 관계 $<$과 $\ll$의 이행성에 관한 다음 정리를 얻는다.

<u>정리 16</u>

(1) $x \prec y \to (y < z \to x < z)$.

(2) $x \ll y \to (y \ll z \to x \ll z)$.

정리 7의 (1)과 관계 $\prec$와 $\ll$에 관한 정리 15, 그리고 정리 9로부터 곧장 다음이 얻어진다.

<u>정리 17</u>

$Rxy \to (y \triangleright_1 z \to x \triangleright_2 z)$.

개념 $G\alpha$를 $Rx\alpha$로 잡음으로써 정리 4로부터

$$x < y \rightarrow (Rxy \vee \exists w(x < w \wedge Rwy))$$

이 경우에도 우측으로부터 좌측으로의 함축 관계가 성립한다. 왜냐하면 Rxy이면 정리 7의 (1)에 의해 $x < y$. 또한 $\exists w(x < w \wedge Rwy)$인 경우, $x < w$이고 Rwy인 w가 존재하는데 Rwy로부터 $w < y$. 따라서 그것과 $x < w$로부터 $x < y$. 이 결과로 다음 정리가 성립한다.

<u>정리 18</u>

$x < y \leftrightarrow (Rxy \vee \exists w(x < w \wedge Rwy))$

위의 정리로부터 다음을 얻을 수 있다.

<u>정리 19</u>

$x < y \rightarrow \exists w(x \leqslant w \wedge Rwy)$

증명:

정리 18에 의해 $x < y \rightarrow (Rxy \vee \exists w(x < w \wedge Rwy))$. 그런데 Rxy이면 $x = w \wedge Rwx$. 그런데 정리 7의 (2)에 의해 $x = y \rightarrow x \leqslant y$이므로 Rxy일 경우 $x \leqslant w \wedge Rwx$. 후자로부터 존재 일반화에 의해 $\exists w(x \leqslant w \wedge Rwy)$. 또한 $\exists w(x < w \wedge Rwy)$인 경우에도 정리 9와 술어 논리의 법칙에 의해 쉽게 $\exists w(x \leqslant w \wedge Rwy)$를 얻는다. 따라서 양도 논법에 의해 정리 19를 얻는다. ■

정리 19로부터 다음 정리가 곧장 따라 나온다.

<u>정리 20</u>

$x < y \rightarrow \exists wRwy$

이제부터 어떤 특정한 원소 a에 대해

A1. $\neg Rxa$

가 성립한다고 가정하기로 한다. 따라서 $\neg\exists xRxa$. 이 결과와 정리 20에서 y 대신에 a를 대입해 넣은 결과로부터 쉽게 다음을 유도할 수 있다.

정리 21

$\neg x < a$.

이하에서는 관계 R이 위의 A1 이외에 일대다의 조건을 만족시킨다고 가정하기로 한다. 즉,

A2. $\forall x\forall y\forall z(Ryx \wedge Rzx \rightarrow y = z)$

R에 관한 A1과 A2의 가정 하에서 위에서의 귀납 원리1을 사용하면 다음을 증명할 수 있다.

정리 22

$a \leqslant x \rightarrow \neg x < x$.

증명:

개념 $F\alpha$를 $\neg\alpha < \alpha$로 잡을 때, 귀납 원리1에 의하면 정리 22을 증명하기 위해서는 다음 두가지를 보이는 것으로 충분하다.

(ㄱ) Fa

(ㄴ) $\mathrm{Her}_R(F)$

Fa는 $\neg a<a$를 의미하는데 이것은 위의 정리 21에 의해 참이다. (ㄴ)을 증명하기 위해서는

$$\text{(i)}\qquad \neg x<x \wedge Rxy \rightarrow \neg y<y$$

가 귀결됨을 보이는 것으로 충분하다. 그러나 문장 논리의 법칙에 의해 $\neg x<x \wedge Rxy \rightarrow \neg y<y$는 $y<y \wedge Rxy \rightarrow x<x$와 동치이므로 (i)을 보이는 대신

$$\text{(ii)}\qquad y<y \wedge Rxy \rightarrow x<x$$

가 귀결됨을 보이기로 하자.

(ii)를 증명하기 위해 $y<y$이고 Rxy라고 하자. 정리 18에 의해 $y<y$로부터 $Ryy \vee \exists w(y<w \wedge Rwy)$. Ryy일 경우, 그것과 Rxy로부터 가정 A2에 의해 $x=y$. 이것과 $y<y$에 의해 $x<x$. 또한 $\exists w(y<w \wedge Rwy)$라고 할 경우, $y<w$이고도 Rwy인 w가 존재한다. 그러나 Rxy와 Rwy로부터 또다시 A2에 의해 $x=w$. 이것과 $y<w$로부터 $y<x$. 또한 Rwy로부터 정리 7의 (1)에 의해 $w<y$. 이것과 $x=w$로부터 $x<y$. 따라서 $y<x$과 $x<y$로부터 $<$에 관한 이행성(정리 16의 (1))에 의해 $x<x$. 따라서 양도 논법에 의해 $y<y \wedge Rxy \rightarrow x<x$. ■

정리 22와 같은 가정 하에서 다음을 쉽게 이끌어 낼 수 있다.

<u>정리 23</u>
$a \leqslant x \wedge a \leqslant y \rightarrow (x<y \rightarrow \neg y<x)$
증명:
$x<y$이고 $y<x$이면 $<$의 이행성에 의해 $x<x$이고 $y<y$. 그러나 $0 \leq x$이고 $0 \leq y$일 경우, 정리 22에 의해 이것은 불가능하다. ■

정리 16의 (1)은 관계 $<$이 모든 원소에 대해 이행적임을, 그리고

정리 23은 a의 약한 선조인 모든 원소에 대해 비대칭적(asymmetric)임을 보여 주고 있다.

마찬가지로 A1와 A2의 가정 하에서 다음을 이끌어 낼 수 있다.

정리 24

$a \leqslant x \to \forall w(Rxw \to \neg x = w)$

증명:

지금 $a \leqslant x$에도 불구하고 $\neg\forall w(Rxw \to \neg x = w)$라고 하자. 그러면 Rxw이고도 $x = w$인 w가 존재할 것이다. 그러면 Rxx. 이것으로부터 정리 7의 (1)에 의해 $x < x$. 그러나 정리 22에 의해 이것은 불가능하다. ■

다음 정리는 A2만을 가정해서 정리 19로부터 이끌어 낼 수 있다.

정리 25

$(x < z \wedge Ryz) \to x \leqslant y$

증명:

$x < z \wedge Ryz$라고 하자. 정리 18에 의해 $x < z$로부터 $Rxz \vee \exists w(x < w \wedge Rwz)$. Rxz인 경우, 이것과 Ryz로부터 가정 A2에 의해 $x = y$. 이 관계로부터 정리 7의 (2)에 의해 $x \leqslant y$. 또한 $\exists w(x < w \wedge Rwz)$인 경우, $x < w$이고도 Rwz인 w가 존재한다. Rwz와 Ryz로부터 가정 A2에 의해 $w = y$. 이것과 $x < w$로부터 $x < y$. 따라서 정리 9에 의해 $x \leqslant y$. 여기에 양도 논법을 적용하면 정리 25를 얻는다. ■

지금까지 일반적인 관계 R의 선조 관계가 가지는 특징에 관해 고찰해 보았는데 프레게는 자연수 개념 Nt를 0과 Pred의 선조 관계에 의거하여 정의하고 있다. 다음절에서 Nt의 구체적인 정의와 그러한 정의로부터 나머지 페아노의 공리 **P1, P2** 및 **P5**가 어떻게 증명되는지를 살펴보기로 한다.

3. 수학적 귀납법과 후자의 존재의 증명

우선 전자 관계 Pred에 대해, 강한 Pred-선조 관계 $<_{Pred}$를 기호 '<'으로, 그리고 약한 Pred-선조 관계 $\leqslant_{Pred}$를 기호 '≤'로 나타내기로 하자. 그리고 $x<y$인 경우 단순히 'y는 x보다 크다' 혹은 'x는 y보다 작다'라고 부르기로 하자. 마찬가지로 $x \leq y$인 경우 단순히 'y는 x보다 같거나 크다'로 혹은 'x는 y보다 같거나 작다'라고 부르기로 하자. 즉,

정의 7

(1) $x<y$ =df $x<_{Pred}y$

$\Leftrightarrow \forall F(\mathrm{Her}_{Pred}(F) \wedge \forall w(\mathrm{Pred}(x, w) \rightarrow Fw) \rightarrow Fy)$

(2) $x \leq y$ =df $x \leqslant_{\mathrm{Pred}} y$

$\Leftrightarrow \forall F(\mathrm{Her}_{Pred}(F) \wedge Fx \rightarrow Fy)$

프레게는 Nt를 수 *0*보다 같거나 큰 원소들 그리고 오직 그 원소들만을 포섭하는 개념으로 정의하고 있다.

정의 8(자연수 개념)

$\mathrm{Nt}(x)$ =df $0 \leq x$.

Nt를 정의 8과 같이 해석할 경우 페아노의 공리 P1과 P2 그리고 P5는 각각 아래의 P1′과 P2′ 및 P5′처럼 번역될 것이다.

P1'. $0 \leq 0$.

P2'. $0 \leq x \rightarrow \exists w(0 \leq w \wedge \mathrm{Pred}(x, w))$

P5'. $(\forall F)(F0 \wedge (\forall z)(0 \leq z \wedge Fz \rightarrow \forall w(\mathrm{Pred}(z, w) \rightarrow Fw)) \rightarrow (0 \leq x \rightarrow Fx))$

위의 **P1′**, **P2′** 및 **P5′**를 증명하자면 앞의 절에서 얻은 결과를 적극적으로 이용할 필요가 있다. 앞의 절에서의 각 정리에 관계 R 대신에 Pred를 바꾸어 넣음으로써 관계 $<$와 $\leq$에 관한 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다. 각 정리의 오른 쪽의 주의 정리들은 그 정리에서 관계 R을 Pred로 바꿈으로써 해당 정리를 이끌어 낼 수 있음을 의미한다.

정리 26

(1) $x \leq x$	(정리 8)
(2) $x=y \rightarrow x \leq y$	(정리 7의 (2))
(3) $x<y \rightarrow x \leq y$	(정리 9)
(4) $x \leq y \leftrightarrow (x=y \vee x<y)$	(정리 13)
(5) $\mathrm{Pred}(x, y) \rightarrow x<y$	(정리 7의 (1))
(6) $x \triangleright_1 y \rightarrow (\mathrm{Pred}(y, z) \rightarrow x \triangleright_1 z)$	(정리 14)
(7) $\mathrm{Pred}(x, y) \rightarrow (y \triangleright_1 z \rightarrow x \triangleright_2 z)$	(정리 17)
(8) $x<y \rightarrow (y<z \rightarrow x<z)$	(정리 16의 (1))
(9) $x \leq y \rightarrow (y \leq z \rightarrow x \leq z)$	(정리 16의 (2))
(10) $x \leq y \leftrightarrow x=y \vee \exists w(x \leq w \wedge \mathrm{Pred}(w, y))$	(정리 12의 (1))
(11) $x \leq y \leftrightarrow x=y \vee \mathrm{Pred}(x, y) \vee \exists w(x<w \wedge \mathrm{Pred}(w, y))$	(정리 12의 (2))
(12) $x<y \leftrightarrow \mathrm{Pred}(x, y) \vee \exists w(x<w \wedge \mathrm{Pred}(w, y))$	(정리 18)
(13) $x<y \rightarrow \exists w(x \leq w \wedge \mathrm{Pred}(w, y))$	(정리 19)
(14) $x<y \rightarrow \exists w \mathrm{Pred}(w, y)$	(정리 19)
(15) $x \triangleright_1 y \rightarrow (y \triangleright_2 z \rightarrow x \triangleright_{12} z)$	(정리 15의 (1))

위의 (6)과 (7), 그리고 (15)에서는 $\triangleright_1$과 $\triangleright_2$의 자리에는 $<$과 $\leq$ 가운데 어느 것을 대입할 수 있으나 $\triangleright_{12}$의 자리에는 $\triangleright_1$과 $\triangleright_2$의 자리에 모두 $\leq$를 대입하는 경우에 한해 $\leq$를 대입해야 하며 나머지 경우에는 $<$과 $\leq$ 가운데 어느 것도 대입할 수 있다. 정리 10의 1과 정리 11에 의해 아래와 같은 수학적 귀납의

원리가 성립하는데 그것을 각각 수학적 귀납 원리1과 수학적 귀납 원리 2로 부르기로 하자.

정리 27

(1) $\mathrm{Her}_{Pred}(F) \wedge Fx \rightarrow (x \leq y \rightarrow Fy)$ (수학적 귀납 원리 1)(정리 10의 (1))

(2) $Fx \wedge \forall z(x \leq z \wedge Fz \rightarrow \forall w(\mathrm{Pred}(z, w) \rightarrow Fw)) \rightarrow (x \leq y \rightarrow Fy)$ (수학적 귀납 원리 2) (정리 11)

앞의 절의 정리 21은 A1의 가정 하에서, 그리고 정리 22-24는 A1과 A2를 가정할 경우, 그리고 정리 25는 A2의 가정 하에서 성립한다. 그런데 관계 R을 Pred로 해석할 경우 A2는 페아노의 공리 **P4**에 의해 성립하며, 또한 A1은 a를 0으로 해석할 때, 공리 **P3**에 의해 성립한다. 따라서 그러한 해석에 의해 정리 21-25로부터 각각 다음과 같은 정리를 이끌어 낼 수 있다.

정리 28

(1) $\neg x < 0$	(정리 21)
(2) $0 \leq x \rightarrow \neg x < x$[12]	(정리 22)
(3) $0 \leq x \wedge 0 \leq y \rightarrow (x < y \rightarrow \neg y < x)$	(정리 23)
(4) $0 \leq x \rightarrow \forall w(\mathrm{Pred}(x, w) \rightarrow \neg x = w)$	(정리 24)
(5) $(x < z \wedge \mathrm{Pred}(y, z)) \rightarrow x \leq y$[13]	(정리 25)

---

12) 이 정리를 [Gg]에서의 프레게의 정리 145에 해당한다. 이 정리는 공리 **P2′**를, 보다 구체적으로는 아래의 보조 정리 2를 증명하는데 핵심적인 역할을 한다. 여기서는 그 정리를 보다 일반적인 관계에 관한 정리 22에서 도출하고 있는데 정리 22를 증명하는데 중요한 역할을 하는 것이 정리 4에서 유도되는 정리 18이다. 정리 18은 정리 22의 증명 과정에서 가장 중요한 단계인 $A2 \rightarrow (y < y \wedge Rxy \rightarrow x < x)$을 증명하는데 결정적인 역할을 한다. 정리 22에 대한 우리의 증명은 정리 145에 대한 프레게의 복잡한 과정과 대조되는데 그것은 일반적인 개념의 선조 관계에 관한 정리 4의 가치를 확인시켜 준다. .

13) 이 정리도 아래의 보조 정리 2를 증명하는데 사용되는데, 이것은 [Gg]에서

프레게는 $0 \leq x$인 원소들, 즉 술어 Pt에 포섭되는 원소들을 유한 기수(Finite Number)라고 불렀다. 정리 26이나 27은 특별히 유한 기수만이 아니라 모든 대상에 대해 성립한다. 그러나 정리 28의 (2)는 자신과 크지도 작지도 않다는 성질은 유한 기수에 대해 성립함을 말하고 있으며, 정리 28의 (4)는 어떤 자연수 혹은 유한 기수도 자신의 후자와 동일하지 않음을 말하고 있다. 그러나 유한 기수가 아닌 경우에는 자신의 후자와 동일할 수도 있다. 예를 들어 "α는 유한 기수이다"를 의미하는 개념 Nt(α) 즉 $0 \leq \alpha$의 기수를 $\aleph_0$이라고 하자.[14] 즉,

$$\aleph_0 =\text{df } N(0 \leq \alpha)$$

0은 명백히 개념 $0 \leq \alpha$에 포섭된다. 이제 "0이 아닌 유한 기수이다"라는 의미의 개념 $0 \leq \alpha \wedge \neg \alpha = 0$를 생각해 보자 뒤에서 입증하겠지만 유한 기수는 무한히 많고 또한 관계 $<$에 의해 단순히 순서 지울(simply order) 수 있다. 그러므로 0을 그 후자인 1에, 1를 그 후자인 2에 식으로 대응시키는 대응 관계, 즉 관계 Pred에 의해 술어 $0 \leq \alpha$와 $0 \leq \alpha \wedge \neg \alpha = 0$은 서로 일대일로 대응된다. 따라서 수의 동일성에 관한 프레게의 정의(흄의 원리)에 의해 $N(0 \leq \alpha \wedge \neg \alpha = 0) = \aleph_0$. 따라서 $0 \leq 0 \wedge N(0 \leq \alpha \wedge \neg \alpha = 0) = \aleph_0$. 그러므로 존재 일반화에 의해, $(\exists y)(0 \leq y \wedge N(0 \leq \alpha \wedge \neg z = y) = \aleph_0)$. 이것으로부터 Pred 술어에 관한 정의 1의 (2)에 의해 Pred($\aleph_0$, $\aleph_0$). 따라서 Pred

---

의 정리 143에 해당한다. 우리는 이 정리를 A2의 가정 하에서 증명한 정리 25에서 이끌어 냈다. 따라서 정리 25를 증명함에 있어 사실은 A2$\rightarrow((x<z \wedge Ryz) \rightarrow x \nless y)$를 증명한 셈인데 프레게도 이 후자의 공식으로부터 그의 정리 143이 따라 나옴을 말하고 있다.

14) 프레게는 『산수학의 기초』에서 그 수를 ∞1로 표현하고 있다. [FA], §84 참조.

$(\aleph_0, w) \wedge \aleph_0 = w$. 즉 $\neg\forall w(\mathrm{Pred}(\aleph_0, w) \rightarrow \neg\aleph_0 = w)$. 이것은 $\forall w(\mathrm{Pred}(x, w) \rightarrow \neg x = w)$라는 관계가 무한 기수인 $\aleph_0$에 대해서는 성립하지 않음을 보여준다.

정리 28의 (2)에 의하면 모든 유한 기수는 자신보다 크지도 작지도 않지만 그것도 무한 기수에 대해서는 성립하지 않는다. 위에서 무한 기수 $\aleph_0$에 대해 $\mathrm{Pred}(\aleph_0, \aleph_0)$이 성립함을 증명했는데, 따라서 정리 26의 (5)에 의해 $\aleph_0 < \aleph_0$이 귀결되기 때문이다.

정리 26-28에서의 결과를 이용하면 공리 **P1′**, **P2′** 및 **P5′**를 이끌어 낼 수 있다. **P1′**과 **P5′**의 증명은 즉각적으로 얻어진다.

P1′의증명:
정리 26의 (1)에서 x 대신에 0을 대입하면 **P1′**이 얻어진다.

P5′의증명:
정리 27의 (2)에서 x 대신에 0을 대입함으로써 달성된다.

P5′은 정리 27의 (2)로부터 얻어지지만 정리 27의 (1)에서 x대신에 0를 대입함으로써 보다 간단한 다음과 같은 수학적 귀납법을 얻을 수 있다. 그것을 '수학적 귀납법2'라고 부르기로 하자.

<u>정리 29</u>(수학적 귀납법2)
$\mathrm{Her}_{Pred}(F) \wedge Fx \rightarrow (0 \leq y \rightarrow Fy)$

이제 남은 것은 **P2′**의 증명인데, 그것의 증명은 까다롭다. 그런데 $\mathrm{Pred}(x, w)$이면 정리 26의 (5)에 의해 $x < w$. 따라서 $0 \leq x$이면 정리 26의 (15)에 의해 $0 \leq w$. 따라서 **P2′**대신에 다음 정리를 증명하는 것으로 충분하다.

<u>정리 30</u>
$0 \leq x \rightarrow \exists w \mathrm{Pred}(x, w)$

정리 26의 (14)에서 x를 0으로 취하면 $0<y \rightarrow \exists w \mathrm{P}(w, y)$가 얻어지는데 이것은 0보다 큰 모든 유한기수가 전자를 가지고 있음을 말해주고 있다. 우리가 증명하려는 정리 30은 모든 유한 기수에 대해 그것의 후자가 존재한다는 것이다.

정리 30을 수학적 귀납법에 의해 증명하기 위해 개념 $F\beta$를 다음과 같이 정의하기로 하자.

$$F\beta \ =_{\mathrm{df}} \mathrm{Pred}(\beta, N(\alpha \leq \beta))$$

$F\beta$는 즉, "β의 후자는 '그보다 같거나 적다'라는 개념의 수이다"라는 의미의 개념이다. 그 개념이 모든 유한 기수에 대해 성립할 것으로, 즉 $0 \leq x \rightarrow Fx$일 것으로 기대된다. 수학적 귀납법 **P5'**에 비추어 그것이 참임을 보이기 위해서는 다음 두 가지 보조 정리가 성립함을 증명하는 것으로 충분하다.

<u>보조 정리 1</u>[15]
$F0$

<u>보조 정리 2</u>[16]
$0 \leq x \wedge Fx \rightarrow \forall y(\mathrm{Pred}(x, y) \rightarrow Fy)$

보조 정리 1의 증명:

F의 정의상 $F0$는 $\mathrm{Pred}(0, N(\alpha \leq 0))$을 의미한다. Pred에 관한 정의 1의 (2)에 의하면 $\mathrm{Pred}(0, N(\alpha \leq 0))$는 다음을 의미한다.

---

15) 이 정리는 프레게의 [Gg]에서의 정리 154에 해당한다.
16) 이 정리는 [Gg]에서의 정리 150에 해당한다.

(가) $\exists G(N(G)=N(\alpha \leq 0) \wedge \exists w(Gw \wedge N(G\alpha \wedge \neg \alpha = w)=0))$

이제 (가)를 증명하기 위해 개념 $\alpha \leq 0$를 G로 잡기로 하자. 따라서 명백히 (i) $N(G)=N(\alpha \leq 0)$. 또한 공리 **P1'**에 의해 $G0$. 그런데 정리 26의 (4)에 의해 $\alpha \leq 0 \leftrightarrow \alpha = 0 \vee \alpha < 0$이나 정리 28의 (1)에 의해 $\neg \alpha < 0$이므로 결국 $\alpha \leq 0 \leftrightarrow \alpha = 0$. 그러므로 $\alpha \leq 0 \wedge \neg \alpha = 0 \leftrightarrow \alpha = 0 \wedge \neg \alpha = 0$. 그런데 $\alpha = 0 \wedge \neg \alpha = 0 \leftrightarrow \neg \alpha = \alpha$라고 할 수 있으므로 $\leftrightarrow$의 이행성에 의해 결국 $\alpha \leq 0 \wedge \neg \alpha = 0 \leftrightarrow \neg \alpha = \alpha$. 따라서 흄의 원리에 의해 $N(\alpha \leq 0 \wedge \neg \alpha = 0) = N(\neg \alpha = \alpha)$. 따라서 $N(\alpha \leq 0 \wedge \neg \alpha = 0)=0$. 그러므로 $G0 \wedge N(\alpha \leq 0 \wedge \neg \alpha = 0)=0$. 이 관계로부터 존재 일반화에 의해 (ii) $\exists w(Gw \wedge N(\alpha \leq 0 \wedge \neg \alpha = w)=0))$.

(i)과 (ii)로부터 $N(G)=N(\alpha \leq 0) \wedge \exists w(Gw \wedge N(G\alpha \wedge \neg \alpha = w)=0)$. 여기에 G에 대한 존재 일반화에 의해 (가)를 얻는다. ■

보조 정리 2의 증명:

보조 정리 2을 증명하기 위해서는 $0 \leq x \wedge \mathrm{Pred}(x, N(\alpha \leq x)) \wedge \mathrm{Pred}(x, y)$라는 가정 하에서 $\mathrm{Pred}(y, N(\alpha \leq y))$가 이끌려 나온다는 것을 보이는 것으로 충분하다. 이제 $0 \leq x$이고 $\mathrm{Pred}(x, N(\alpha \leq x))$이고 $\mathrm{Pred}(x, y)$라고 가정하자. 우리가 증명할 것은 다음의 관계이다.

(나) $\exists G(N(G)=N(\alpha \leq y) \wedge \exists w(Gw \wedge N(G\alpha \wedge \neg \alpha = w)=y))$

(나)를 증명하기 위해 개념 $\alpha \leq y$를 G로 잡기로 하자. 이제

(다) $(z \leq y \wedge \neg z = y) \leftrightarrow z \leq x$

를 증명할 수만 있다면 (나)는 증명된다. 왜냐하면 명백히 (i) $N(G)=N(\alpha \leq 0)$. 또한 가정에 의해 $\mathrm{Pred}(x, N(\alpha \leq x))$이고 $\mathrm{Pred}(x, y)$이므로 Pred가 함수적인 관계임을 말하는 공리 **P4**에 의해 $y=N(\alpha \leq x)$. 또 (다)로부터 흄의 원리에 의해 $N(\alpha \leq y \wedge \neg \alpha = y)=N(\alpha \leq x)$. 그런데 $y=N(\alpha \leq x)$이므로 결국

$N(G\alpha \wedge \neg \alpha = y) = y$. 또 정리 26의 (1)에 의해 Gy. 따라서 $Gy \wedge N(G\alpha \wedge \neg \alpha = y) = y$. 여기에 존재 일반화에 의해 (ii) $\exists w(Gw \wedge N(G\alpha \wedge \neg \alpha = w) = y$. 위의 (i)과 (ii)를 결합함으로써 $N(G) = N(\alpha \leq 0) \wedge \exists w(Gw \wedge N(G\alpha \wedge \neg \alpha = w) = y$. 여기에 G에 대한 존재 일반화에 의해 ㈏를 얻는다.

㈐로부터 ㈏를 이끌어 내기 위해서는 $\mathrm{Pred}(x, N(\alpha \leq x))$과 $\mathrm{Pred}(x, y)$만을 가정하는 것으로 충분했다. 그러나 ㈐를 증명하기 위해서는 가정 $0 \leq x$와 $\mathrm{Pred}(x, y)$가 필요하다. 왜냐하면 $0 \leq x$와 $\mathrm{Pred}(x, y)$를 가정하기만 하면 다음 두 명제로부터 ㈐를 증명할 수 있기 때문이다.[17)]

㈑ $0 \leq x \wedge \mathrm{Pred}(x, y) \rightarrow ((z \leq y \wedge \neg z = y) \leftrightarrow z < y)$

㈒ $\mathrm{Pred}(x, y) \rightarrow (z < y \leftrightarrow z \leq x)$[18)]

㈑를 증명하기 위해 $0 \leq x \wedge \mathrm{Pred}(x, y)$라고 하자. 정리 26의 (6)에 의해 $0 \leq y$. 따라서 **정리 28의** (2)에 의해 $\neg y < y$. 이것으로부터 $z < y \rightarrow \neg z = y$. 왜냐하면 $z < y$이고 $z = y$이라고 가정하면 $y < y$라는 결과가 나오기 때문이다. $z < y \rightarrow \neg z = y$로부터 문장 논리의 법칙에 의해 $z < y \wedge \neg z = y \leftrightarrow z < y$. 그런데 정리 26의 (4)에 비추어 볼 때, $z \leq y \wedge \neg z = y \leftrightarrow z < y \wedge \neg z = y$. 따라서 $\leftrightarrow$의 이행성에 의해 $(z \leq y \wedge \neg z = y) \leftrightarrow z < y$. 이렇게 해서 ㈑가 증명된다.

정리 26의 (6)으로부터 (i) $\mathrm{Pred}(x, y) \rightarrow (z \leq x \rightarrow z < y)$. 또한 정리 28의 (5)에 의해 (ii) $\mathrm{Pred}(x, y) \rightarrow (z < y \rightarrow z \leq x)$. (i)과 (ii)를 종합함으로써 ㈒를 얻을 수 있다.

이렇게 해서 ㈑와 ㈒가 증명되며 그것으로부터 $0 \leq x$과 $\mathrm{Pred}(x, N(\alpha \leq x))$ 및 $\mathrm{Pred}(x, y)$의 가정 하에서 ㈐를 거쳐 ㈏가 증명된다. 이렇게 해서 보

---

17) 프레게는 ㈑와 ㈒로부터 이끌어 낼 수 있는 $0 \leq x \wedge \mathrm{Pred}(x, y) \rightarrow (z \leq x \leftrightarrow z \leq y \wedge \neg z = y)$를 정리 149, α로 부르고 있다. 이 정리로부터 프레게는 그가 정리 149로 명명한 $0 \leq x \wedge \mathrm{Pred}(x, y) \rightarrow (N(\alpha \leq x) \leftrightarrow N(\alpha \leq y \wedge \neg \alpha = y))$를 이끌어 내고 있다.

18) ㈑와 ㈒ 대신 프레게가 증명한 것은 그가 정리 148, α라고 부른 $\mathrm{Pred}(x, y) \rightarrow ((z \leq y \wedge \neg z = y) \rightarrow z \leq x)$와 148, β라고 부른 $0 \leq y \wedge \mathrm{Pred}(x, y) \rightarrow (z \leq x \rightarrow (z \leq y \wedge \neg z = y))$였다.

조 정리 2는 증명된다. ■

위와 같은 과정에 의해 보조 정리 1과 2는 모두 증명되는데 그것들로부터 수학적 귀납법에 의해 다음 정리가 곧장 따라 나온다.

정리 31[19)]
$0 \leq x \rightarrow \mathrm{Pred}(x, N(\alpha \leq x))$

정리 31로부터 존재 일반화에 의해 정리 30이, 그리고 궁극적으로 공리 **P2'**이 유도된다.

4. 유한 기수 계열의 무한성

앞의 절에서 1절에서 제시된 페아노의 모든 공리가 흄의 원리와 *0*과 Pred 및 Nt에 관한 정의 1과 정의 7로부터 따라 나옴을 보았다. 우리의 증명은 일반적인 개념의 조상 관계에 관한 정리 4와 5에서 얻어지는 정리 12와 정리 18에 크게 의존하고 있는데 이 방식은 보다 일반성을 기하면서도 프레게의 방식에 비해 증명을 어느 정도 단순화시키는 이점을 안고 있다.

앞서 정리 26의 ⒁로부터는 $0<x \rightarrow \exists w\mathrm{Pred}(w, x)$임을, 즉 *0*보다 큰 모든 유한 기수는 전자를 가짐을, 그리고 정리 30으로부터는 $0 \leq x \rightarrow \exists w\mathrm{Pred}(x, w)$임을, 즉 모든 유한 기수가 후자를 가짐을 보았다. 그런데 공리 **P4**에 의하면 Pred는 함수적인 관계로서 모든 x에 대해 $\mathrm{Pred}(x, y)$인 y가 존재한다면 단 하나밖에 존재하지 않는다. 즉 $0 \leq x \rightarrow \exists_1 w\mathrm{Pred}(x, w)$.[20)] 따라서 $0 \leq x$인 경우 $\mathrm{Pred}(x, y)$를 $y=s(x)$와

---

19) 이 정리는 [Gg]의 II부 *H* 절에서의 정리 155에 해당한다.
20) 여기서 $\exists_1 w\varphi(w)$는 $\exists w(\varphi(w) \wedge \forall y(\varphi(y) \rightarrow y=w)$를 축약한 표현으로서 φ

같이 쓸 수 있다. $s(x)$는 즉 x에 그 후자를 대응시키는 함수이다.

여기서 $\exists z(\mathrm{Pred}(x, z) \wedge \varphi(z))$나 $\forall z(\mathrm{Pred}(x, z) \rightarrow \varphi(z))$와 같은 형식의 문장을 생각해보자. $0 \leq x$인 경우 $\mathrm{Pred}(x, y)$를 $y = s(x)$와 같이 쓸 수 있다는 사실에 비추어 볼 때, $0 \leq x \rightarrow (\exists z(\mathrm{Pred}(x, z) \wedge \varphi(z)) \leftrightarrow \varphi(s(x)))$와 $0 \leq x \rightarrow (\forall z(\mathrm{Pred}(x, z) \rightarrow \varphi(z)) \leftrightarrow \varphi(s(x)))$이 성립할 것이다. 따라서 문장 논리의 법칙에 의해 $\exists z(\mathrm{Pred}(x, z) \wedge \varphi(z)) \rightarrow (0 \leq x \rightarrow \varphi(s(x)))$이고 $\forall z(\mathrm{Pred}(x, z) \rightarrow \varphi(z)) \rightarrow (0 \leq x \rightarrow \varphi(s(x)))$. 따라서 $\exists z(\mathrm{Pred}(x, z) \wedge \varphi(z))$와 $\forall z(\mathrm{Pred}(x, z) \rightarrow \varphi(z))$가 참인 경우 $0 \leq x \rightarrow \varphi(s(x))$도 참이다. 이러한 사실을 이용하면 정리 26의 (5)-(7)과 정리 28의 (4)와 (5)로부터 다음을 얻을 수 있다.

<u>정리 32</u>

(1) $0 \leq x \rightarrow x < s(x)$ (정리 26의 (5))

(2) $0 \leq x \rightarrow (y \rhd_1 x \rightarrow y \rhd_2 s(x))$ (정리 26의 (6))

(3) $0 \leq x \rightarrow (s(x) \rhd_1 y \rightarrow x \rhd_2 y)$ (정리 26의 (7))

(4) $0 \leq x \rightarrow \neg x = s(x)$ (정리 28의 (4))

(5) $0 \leq x \rightarrow (y < s(x) \leftrightarrow y \leq x)$

(5)의 증명:

$0 \leq x \rightarrow (y < s(x) \rightarrow y \leq x)$는 정리 28의 (5)로부터 그리고 $0 \leq x \rightarrow (y \leq x \rightarrow y < s(x))$는 정리 32의 (1)과 정리 26의 (15)로부터 얻어진다. ■

공리 **P4**에 의하면 $\mathrm{Pred}(y, x) \wedge \mathrm{Pred}(z, x) \rightarrow y = z$. 이것으로부터 다음이 귀결된다.

인 w가 단하나 존재함을 의미한다.

정리 33

$0 \leq y \land 0 \leq z \rightarrow (s(y) = s(z) \rightarrow y = z)$

정리 33은 동일한 후자를 갖는 두 유한 기수는 동일하다는 것을 말하고 있다.

앞서 전절의 정의 7에서 관계 <를 개념 Pred(x, α)의 Pred-조상 관계로 그리고 ≤를 $x = \alpha$의 Pred-조상 관계로 정의한 바 있다. 그런데 $0 \leq x$일 경우, Pred(x, α)를 s(x)= α로 고쳐 쓸 수 있다. 개념 s(x)= α의 Pred-조상 관계는 s(x)에 대한 ≤관계에 해당한다는 사실에 비추어 볼 때, 다음 사실이 성립함을 알 수 있다.

정리 34

$0 \leq x \rightarrow (x < y \leftrightarrow s(x) \leq y)$

$0 \leq x$이고 $x < y$이면 $0 \leq y$. 이 사실과 정리 32의 (1)과 정리 34를 이용하면 다음을 쉽게 얻을 수 있다.

정리 35

$0 \leq x \rightarrow (x < y \rightarrow s(x) < s(y))$.

정리 35는 즉 유한 기수의 경우, 관계 <는 후자 관계에 의해 보존된다는 것을 말하고 있다. 정리 34와 앞의 정리 26의 (10)과 (11)로부터 다음이 따라 나온다.

정리 36[21)]

(1) $0 \leq x \land x < y \leftrightarrow (y = s(x) \lor (\exists w)(x < w \land y = s(w)))$.

21) 이 정리는 물론 정리 4와 정리 5로부터 직접 얻을 수도 있다.

(2) $0 \leq x \wedge x < y \leftrightarrow (y = s(x) \vee y = s(s(x)) \vee (\exists w)(s(x) < w \wedge y = s(w)))$.

정리 36의 (1)을 이용하여 다음 정리를 증명할 수 있다.

<u>정리 37</u>

$0 \leq x \wedge 0 \leq y \rightarrow (x < s(y) \leftrightarrow x \leq y)$.

증명:

$0 \leq x \wedge 0 \leq y \rightarrow (x \leq y \rightarrow x < s(y))$를 증명하기 위해 $0 \leq x$이고 $0 \leq y$이고 $x \leq y$라고 하자. 정리 32의 (1)에 의해 $y < s(y)$. 따라서 정리 26의 (15)에 의해 $x < s(y)$.

$0 \leq x \wedge 0 \leq y \rightarrow (x < s(y) \rightarrow x \leq y)$를 증명하기 위해 $0 \leq x$이고 $0 \leq y$이고 $x < s(y)$라고 하자. 정리 35의 (1)에 의해 $s(y) = s(x) \vee (\exists w)(x < w \wedge s(y) = s(w))$. $s(y) = s(x)$일 경우 정리 33에 의해 $y = x$. 따라서 $x \leq y$. 또한 $(\exists w)(x < w \wedge s(y) = s(w))$인 경우, $x < w$이고 $s(y) = s(w)$인 w가 존재하는데, $x < w$이므로 $0 \leq w$. 따라서 정리 33에 의해 $y = w$. 그러므로 이 경우에도 $x < y$이므로 $x \leq y$. 따라서 양도 논법에 의해 $x < s(y) \rightarrow x \leq y$. ■

수학적 귀납법은 P5′는 다음과 같은 형태로 다시 쓸 수 있다.

<u>정리 38</u>

$F0 \wedge \forall z(0 \leq z \wedge Fz \rightarrow Fs(z)) \rightarrow (0 \leq x \rightarrow Fx)$

정리 38은 0에 대해 성립하고 임의의 유한 기수에 대해 성립하면 그것의 후자에 대해서도 성립하는 어떤 성질도, 즉 후자 관계에 닫혀 있는 어떤 성질도 모든 유한 기수에 대해 성립한다는 것을 말해 주고 있다. 정리 38의 적용의 한 예로 우리는 관계 $<$이 유한 기수의 집합에서 연결적(connected)임을 증명할 수가 있다.

<u>정리 39</u>

$(0 \leq x \wedge 0 \leq y) \rightarrow x < y \vee x = y \vee y < x$.

증명:

$0 \leq y$라고 하고 술어 $F\alpha$를 $\alpha < y \vee \alpha = y \vee y < \alpha$로 잡는다. 이 경우 $F0$는 $0 < y \vee 0 = y \vee y < 0$인데 이 후자의 명제가 참임은 $0 \leq y$로부터 곧장 알 수 있다. 이제 $\forall z(0 \leq z \wedge Fz \rightarrow Fs(z))$임을 증명하기 위해 $0 \leq z$이고 Fz라고, 즉 $z < y \vee z = y \vee y < z$라고 가정하자. $z < y$이면 정리 34에 의해 $s(z) \leq y$. 따라서 정리 26의 (3)과 문장 논리 법칙에 의해 $s(z) < y \vee s(z) = y \vee s(z) < z$. 즉 $Fs(z)$. $z = y$이거나 $y < z$이면 정리 32의 (1)과 $<$의 이행성에 의해 $y < s(z)$. 따라서 이 경우에도 $Fs(x)$. 따라서 $0 \leq z \wedge Fz \rightarrow Fs(z)$. z에 대한 일반화에 의해 $\forall z(0 \leq z \wedge Fz \rightarrow Fs(z))$. 따라서 정리 38에 의해 $0 \leq x \rightarrow x < y \vee x = y \vee y < x$. 이것이 $0 \leq y$라는 가정 하에서 성립하므로 연역 정리에 의해 궁극적으로 정리 39을 얻는다. ■

앞서 정리 26의 (8)과 (9)에서 관계 $<$와 $\leq$이 이행적임을 본 바 있다. 정리 28의 (3)은 관계 $<$가 모든 유한 기수에 대해 비대칭적(asymmetric)임을 말해 주고 있다. 위의 정리 30은 관계 $<$가 연결적임을 말해주고 있는데 위의 결과들은 관계 $<$가 유한 기수의 집합에서 단순 순서 관계(simple ordering)를 이루고 있음을 의미하는 것이다.

전 절에서 Pred($\aleph_0$, $\aleph_0$)을 증명하는 가운데 개념 $0 \leq \alpha$가 $0 \leq \alpha \wedge \neg 0 = \alpha$가 일대일로 대응 가능함을 지적한 바 있다. $\forall x(0 \leq x \wedge \neg 0 = x \rightarrow 0 \leq x)$이므로 개념 $0 \leq \alpha \wedge \neg 0 = \alpha$에 포섭되는 대상들은 $0 \leq \alpha$에 포섭되는 대상의 진부분 집합을 이룬다고 말할 수 있다. 그럼에도 그 두 개념이 일대일 대응 가능하므로 무한에 관한 데디킨트의 기준에 의해 개념 $0 \leq \alpha$에 속하는 수 $\aleph_0$은 무한하다고 말할 수 있다. 그러나 개념 $0 \leq \alpha$가 $0 \leq \alpha \wedge \neg 0 = \alpha$가 일대일로 대응 가능하다는 것을 보이기 위해서는 $0 \leq x$인 어떤 수에 대해서도 그것

의 다음 수가 존재한다는 것을 보여야 한다. 그것을 정리 31에서 보였으므로 유한 기수의 무한성을 이제 증명할 수 있다.

정리 40

유한 기수는 무한히 많이 존재한다.

증명:

위의 정리를 증명하기 위해서는 어떤 유한 기수 x에 대해서도 (1) 그것의 후자 $s(x)$가 존재하며, (2) $y \leq x$인 어떤 자연수 y에 대해서도 $\neg y = s(x)$임을 증명하는 것으로 충분하다. (1)은 정리 31에 의해 증명된다. (2)를 증명하기 위해 $k \leq x$인 어떤 유한 기수 k에 대해 $k = s(x)$라고 하자. $k \leq x$이고 $0 \leq k$이므로 $\leq$의 이행성에 의해 $0 \leq x$. 따라서 정리 32의 (1)에 의해 $x < s(x)$. 그러므로 $x < k$. 이것과 $k \leq x$로부터 정리 26의 15에 의해 $k < k$. 그러나 즉 $0 \leq k$이므로 정리 28의 (2)에 의해 이것은 불가능하다. ■

정리 40의 증명 과정을 검토할 때, 유한 기수 혹은 자연수의 무한성을 증명하는데 필요했던 것은 (ㄱ) Pred가 함수적인 관계로서 (ㄴ) 모든 자연수에 대해 그것의 후자가 존재한다는 것과 (ㄷ) 어떤 자연수도 자신이 그것의 후자가 아니라는 사실이었다. 따라서 일반적으로 어떤 관계 Q와 어떤 대상 a에 대해

Q1. Q는 함수적인 관계이다.

Q2. $a \preccurlyeq_Q x \rightarrow \exists y Q(x, y)$

Q3. $a \preccurlyeq_Q x \rightarrow \neg x \preccurlyeq_Q x$

가 성립한다면 개념 $a \preccurlyeq_Q \alpha$의 수, 즉 $N(a \preccurlyeq_Q \alpha)$는 $N(0 \leq \alpha)$와 마찬가지로 무한할 것이다. 왜냐하면 정리 40을 증명하는 과정에서 위의 **Q1-Q3** 이외에 다른 정리는 일반적인 $<$와 $\preccurlyeq$에 대해 성립하거

나 위의 **Q1-Q3**으로부터 연역될 수 있는 것이기 때문이다.[22] 위의 **Q1**은 페아노의 공리 **P4**의 약화된 형태라고 할 수 있고 **Q2**는 **P2**에 해당한다고 볼 수 있다. **Q3**만이 페아노의 공리로부터 정리로 연역되는 공식이다. a와 Q와 다음 공식

Q4. $M(x) \leftrightarrow a \leqslant_Q x$[23]

에 등장하는 개념 M을 기본적인 용어로 간주하는 한, 공리 **Q1-Q4**는 자연수 체계가 지니고 있는 무한성의 개념을 포착한 것으로 간주할 수 있다. 공리 체계의 목적은 그 체계의 본질적인 개념을 공리 속에 담아 내자는 것이다. 만일 자연수 체계의 본질적인 개념을 자연수의 무한성으로 본다면 페아노의 공리 대신에 위의 **Q1-Q4**를 공리로 삼는 것이 타당한 처사일 것이다.[24]

---

22) 예를 들어 정리 40을 증명하는 과정에서 정리 32의 (1)이 사용되었는데 그 정리에 해당하는 $a \leqslant_Q x \rightarrow x <_Q q(x)$는(여기서 $q(x)$ x와 Q의 관계에 있는 원소를 의미한다) 선조 관계에 관한 일반적인 사실인 $Q(x, y) \rightarrow x <_Q y$와 Q가 함수적 관계임을 말하는 **Q1**, 그리고 $a \leqslant_Q x$인 모든 원소 x에 대해 그것과 Q의 관계에 있는 원소가 존재한다는 **Q2**로부터 귀결된다.

23) **Q4**를 채용한다면 **Q2**나 **Q3**에서 $a \leqslant_Q x$를 $M(x)$로 바꾸어도 무방할 것이다. 실제로 **Q2**를 $a \leqslant_Q x \rightarrow \exists y Q(x, y)$로 표현할 경우, **P2**와의 대비가 보다 선명하게 드러날 것이다.

24) 실제로 프레게는 $Q1 \wedge Q2 \wedge Q3 \wedge Q4 \rightarrow N(M) = \infty$에 해당하는 정리를 증명하고 있는데 헤크는 이 사실을 프레게가 Q1-Q4를 산수학의 기본 법칙으로 본 증거로 생각하고 있다. Heck(1993), § 6 참조.

【참고 문헌】

박준용(1999), 『프레게의 논리주의 연구』, 고려대 박사학위 논문.

Frege, G..(1974), *The Foundation of Arithmetic*, Oxford: Basil Blackwell.[FA]

________(1893), *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena.[Gg]

________(1964), *The Basic Laws of Arithmetic*(Montgomery Furth 역), University of California Press.[BLA].

Heck, R. G.(1993), "The Development of Arithmetic in Frege's ***Grundgesetze der Arithmetik***", The Journal of Symbolic Logic, vol. 58, No. 2, 579-601 쪽.

Wright, C.(1983), *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen University Press.