진리함수와 의미론적 확장[1)]

- 진리치 함수, 진리연산 그리고 의미론적 확장 -

양 은 석
(연세대학교 철학연구소)

요 약 이글의 기본적인 목적은 2치를 포함한 다치 논리 체계들간의 관계를 검토하는 데 있다. 이를 위하여 여기서는 명제를 대상으로 한 형식 의미 해석 체계들 간에 고려해야 할 의미론적 확장 개념을 분명히 하였다. 구체적으로 다음의 두 작업이 수행되었다. 첫째로 2치와 다치 논리 또는 다치 논리들 간에 적용될 만한 의미론적 확장 개념을 의미해석의 바탕을 이루는 진리치 함수와 진리연산에 맞게 정의하였다. 둘째로 정의의 적합성을 확장, 비확장 사례 증명을 통해 예증해 보였다.

주요어 의미론적 확장, 진리함수, 진리치 함수, 진리연산

1. 들어가는 말: 논의 배경 및 목적

고전 명제논리의 형식 의미해석은 크게 다음의 두 가지 진리함수(truth-function)를 바탕으로 한다. 하나는 임의의 (요소)명제에 참, 거짓의 진리값(truth-values)을 할당하는 진리치 함수(valuation)이고 다른 하나는 그러한 명제들의 진리값과 연결사의 진리조건에 따라 합성된 명제의 최종 진리값이 결정되도록 하는 진리연산(truth - operation)이다.[2)] 그

---

1) 이 글에서 다루는 의미론적 확장은 진리함수적 확장 문맥에 한정된다. 함수 확장의 논의 대상은 명제 또는 명제를 나타내는 문장들이다.
2) 여기선 진리값(truth-values)과 값 부여의 진리치 함수(valuation / evaluation)를 구별하기 위해 후자에 꼭 "함수"란 말을 붙여 사용한다. 그렇지 않은 "진리값"이나 "진리치"는 전자의 경우를 나타낸다.

런 의미해석은 널리 알려진 진리표에 잘 나타나 있다. 진리표는 임의 명제(또는 명제 도식)의 2치 할당과 그것들이 어떻게 진리함수적으로 연결될 수 있는지를 보여주는 연결사들을 연산으로 해 마련된다.

그러나 진리치 함수와 진리연산을 보다 폭 넓게 이해하면, **다치 논리** 또한 그러한 진리함수를 바탕으로 형식 의미해석이 이루어진 체계들로 간주할 수 있다. 가령 진리치 함수 측면에서 2치의 진리치를 다음으로 표현할 때, (v: 진리치 함수, P_n: n개의 명제로 이루어진 집합, 0: 거짓, 1: 참)

$$v: P_n \rightarrow 2 \quad (\text{또는 } v: P_n \rightarrow \{0,\ 1\})$$

3치, n치 진리치 함수는 $v: P_n \rightarrow 3$, $v: P_n \rightarrow n$으로 표현될 수 있다. 그리고 논리상항으로 간주되는 논리 연결사들에 적절한 진리조건이 부가되어 형식 의미해석에 맞는 각각의 논리체계가 성립하게 된다. 마찬가지로 2치의 진리연산들이 논리 연결사들의 정의를 바탕으로 한 다음의 일반적 함수 (도식) 형태로 표현될 수 있다면,

(T^c_x: x치의 진리조건을 연산으로 한 함수 일반)

$$T^c_2: 2^n \rightarrow 2 \quad (\text{또는 } T^c_2: \{0,\ 1\}^n \rightarrow \{0,\ 1\})$$

3치와 n치 진리연산은 $T^c_3: 3^n \rightarrow 3$, $T^c_n: n^n \rightarrow n$으로 표현될 수 있다.[3)]

그리고 논리상항으로 간주하는 문장 연결사들의 진리조건에 따른 값 결정에 대하여 "진리연산"이란 말은 잘 사용하지 않는다. 여기선 임의의 명제들과 진리조건에 따라 연결된 명제의 값이 진리값이란 점을 강조하기 위해 진리연산이란 말을 사용한다. 두 함수를 바탕으로 한 귀납 정의를 통해 모든 적형식에 진리값이 할당될 수 있다. 귀납 정의와 관련해선 Robbin(1969), 8쪽 참조.

3) 각 치의 서로 다른 체계들의 진리연산은 c 옆에 윗첨자를 보태어 구

역사적 맥락에서 보면 형식 논리로서 다치 논리가 일반화된 건 1920년대 이후이다. 가령 초기 루카치비츠는 미래 우연명제 평가와 관련된 철학적 문제 의식에서 3치 논리를 구상했고, 포스트는 대수적 관점에서 2치를 m치로 확대한 의미해석을 제시했다. 이후 루카치비츠 자신과 클리니, 로써 등을 거치면서 다양한 논리체계가 구상되었고 그러한 시도들은 크게 "다치 논리"로 명명되었다.4) 발상의 차이로 인한 체계 다양성에도 불구하고 그런 논리체계를 다치 논리로 명명할 수 있는 건 무엇보다도 위에서 언급한 진리치 함수 특성 때문이다. 다치 논리는 말 그대로 2치를 다치로 일반화한 체계이다.5) 그런 점에서 다치 논리는 2치를 진리치에 있어 함수적으로 확장한 체계라 할 수 있다.

문제는 그러한 체계들이 서로 다른 진리조건을 갖고 그에 따라 다양한 체계가 양산되는 데 반해 진리조건들 간의 관계를 논하는 작업이 별로 없었다는 점이다.6) 이와 관련하여 다치 논리 양산에 대해 의미해석을 위한 형식화만 이루어진다고 그것 모두를 다치 논리로 인정할 수 있겠는가

별할 수 있다. 가령 3치의 루카치비츠와 보흐바의 진리연산은 $T^{cL}{}_3$, $T^{cB}{}_3$ 같은 형식으로 표현할 수 있다. 마찬가지로 구체적 진리연산 또한 T 옆에 아래첨자를 보태어 구별할 수 있다.(예: $T^{cL}{}_{\wedge 3}$) 논리체계를 염두에 둘 경우엔 다음과 같이 표현하면 된다.(예: 루카치비츠 3치 명제논리의 진리연산 $T^{cPL}{}_3$)

4) 역사적 맥락 이해를 위해선 Rescher(1968), 54-62쪽 참조.

5) 그 점은 진리치 함수 공역 범위에서 뚜렷하게 드러난다.

6) 그런 측면이 간과돼 있단 점은 터너가 잘 보여주고 있다. 그는 진리치 자체를 퍼지화하지 않은 논리를 루카치비츠 무한 다치논리로 간단히 처리하고 있다.(Turner(1985), 101-7쪽) 여기서 터너는 진리치 자체를 언어적으로 퍼지화하지 않아도 퍼지 논리로 간주될 수 있단 점과 어떤 진리연산을 도입하느냐에 따라 퍼지 논리체계가 달라질 수 있단 점을 간과하고 있다.

하는 문제나 진리치 함수적 측면만 갖고 2치와 다치 논리 또는 다치 논리들 간의 관계가 충분히 이해되고 설명될 수 있겠는가 하는 문제가 제기될 수 있다.[7]

필자는 그러한 문제에 대한 진단이 이젠 필요하다고 생각한다.[8] 그리고 그에 맞는 작업의 일환으로 2치에서 다치로 또는 다치에서 더 일반적인 다치로 확장하는 데 염두에 둘 **의미론적 확장** 개념을 분명히 해 두고자 한다. 구체적으로 이 글에선 다음의 두 가지를 목적으로 한다. 첫째는 2치와 다치 논리 또는 다치 논리들 간에 적용될 만한 "의미론적 확장" 개념을 의미해석의 바탕을 이루는 진리치 함수와 진리연산에 맞게 정의해 보고자 한다. 그 이유는 그에 맞는 확장 정의가 정확히 제시된 바 없고 기존의 확장에 관한 정의들 또한 의미론적 확장 개념엔 적용되기 어렵다고 보기 때문이다.[9] 둘째는 새로 마련된 확장 정의를 명제 논리

---

7) 물론 엡스타인(Epstein) 경우 다치 논리 논의 일반을 위한 의미론을 제시하였고(Epstein(1995), 316-18쪽), 반들러/코아웃 경우 다양한 실질 함축 연산자에 대한 의미론적 논의를 수행하였다(Bandler & Kohout(1981), 219-45쪽).

8) 필자는 이런 문제 의식을 다른 지면에서 제시한 바 있다. 거기서 필자는 형식 논리에 관한 한 구조주의 입장에서 체계들 간의 관계를 검토할 것을 제안하였다. 이 글은 그러한 작업의 연장선상의 논의이다. (필자가 주장하는 구조주의는 불바키의 수학에 관한 구조주의 입장과 맥을 같이 한다. 불바키의 입장과 관련해선 N. Bourbaki(1968), 서문을 참조할 것.)

9) 필자는 이전에 함수의 확장 정의를 사용하여 의미론적 확장을 정의한 바 있다.(졸고(1999), [확장정의3.1] 참조) 거기서의 정의 또한 진리치 함수와 진리연산의 특성을 제대로 반영하고 있지 못하며, 또 정의에 체계 외적인 요소를 도입해 확장을 확인해야 하는 한계가 있다. (그에 대한 논의방식은 표준 조건(standard conditions)과 상당히 유사하다. (표준 조건에 대해선 Rose(1980), 120-21쪽 참조.)) 필자는 2장에서 기존의 확장에 관한 정의들이 여기서 검토하고자 하는 확장 정의에 적용되기 어려운 문제점을, 3장에선 이에 맞는 올바른 확장 정의

체계들 간에 적용하여 정의의 적합성을 예증하고자 한다. 구체적으로 루카치비츠 3치 명제계산이 고전 명제계산의 확장이고 표준 퍼지 명제계산 또한 그것의 의미론적 확장으로 간주될 수 있단 점을 예증해 보일 것이다.[10] 또 상호간에 확장으로 간주되기 어려운 다른 체계들도 함께 논하여 필자 정의의 적합성을 간접적으로도 예증해 보일 것이다.[11]

2. 의미론적 확장 정의의 문제들

여기서는 수학과 논리학에서 사용된 기존의 주요 확장 정의가 이 글에서 다루고자 하는 확장 개념에 직접적으로 적용되기 어려운 점을 지적하고자 한다. 고전 수학과 논리학에 사용된 대부분의 확장 개념은 이 글에서 다루고자 하는 의미론적 확장 즉 진리함수 확장에 적용되기 어려운 난점이 있다. 이와 관련하여 먼저 생각해 볼 것이 고전 논리에 사용된 확장 개념이다. 고전 논리에서 명제계산은 양화사를 포함한 1계 술어논리로 그것은 다시 동일성(equality)을 포함하는 1계 술어논리로 확장될 수 있다. 가령 1계 술어논리에 대한 동일성을 포함하는 1계 술어논리로의 확장은 다음과 같은 정의를 바탕으로 한다.

[정의2.1] (구문론적) 확장 (L(P, X): 1계 언어에 관한 형식 연역체계)

를 논할 것이다.

10) 표준 퍼지논리에서 표준의 의미에 관해서는 다른 지면에서 지적되었다.(졸고(1999), 180-81쪽 참조)

11) 이에 대한 구체적인 논의가 4장에서 수행될 것이다.

> L(P, X)의 모든 정리를 보존하면서 새로운 정리를 얻을 수 있도록 상항을 첨가하거나 공리를 변형, 확장하여 얻어지는 형식체계를 L(P, X)의 확장(extension)이라 한다.

정의에서 보듯 고전 논리의 확장은 이전 체계의 타당한 논리식들을 보존하면서 그러한 식들의 범위를 넓혀 주는 확장이다. 널리 알려진 대로 이런 확장은 2치의 전제를 넘어서지 않으면서 참인 진술들(공리, 추론규칙)로부터 도출될 수 있는 진술들(정리)의 범위를 넓혀 주는 구문론적 확장이다. 형식체계의 근간을 이루는 구조에 기초해 보면, 구문론적 확장은 이전 체계의 논리 대수구조를 그대로 보존하는 확장에 해당한다.[12] 그리고 그것은 대수학(algebras)에서 취하는 대부분의 확장 방식이다.[13]

이런 류의 확장이 이 글에서 고려하는 의미론적 확장에 적용될 수 없단 점은 무엇보다도 대부분 다치 논리체계에서 배중률, 모순율 같은 것이 더이상 타당한 논리식이 아니라는 데서 분명하다. 그것은 진리함수적으로 2치를 다치로 확대하는데 따른 자연스런 결과이다.[14] 그 점은 우선 체계의 근간을 이루는 논리 대수적 측면에서 분명히 지적될 수 있다. 즉 배중률, 모순율은 대수적으로 여법칙에 해당하고

---

12) 이 점은 명제논리와 불대수 구조 그리고 1계 술어논리와 다진 불대수나 실린더 대수 구조 사이의 관계에 잘 나타나 있다.

13) 가령 확장 필드(extension field)나 대수 확장(algebraic extension) 등을 들 수 있다. 각각의 정의와 관련해선 Fraleigh(1994), 정의 8.1과 8.12를 참조할 것.(394, 414쪽)

14) 물론 임의의 다치 논리체계가 배중률, 모순율을 만족하는가 아닌가는 진리연산을 어떻게 정의하느냐에 의존한다. 그러나 진리치 결정에 있어 제3의 값을 취하는 한 대부분 다치 논리체계는 배중률(모순율)을 만족하지 않는다.

여법칙은 2치의 특성을 반영한다. 그리고 다치 논리체계 대부분 불대수의 다른 조건을 만족하면서 여법칙을 만족하지 않아 불대수와는 다른 대수구조를 갖게 된다. 진리치 함수적으로도 고전 논리의 확장에선 공역의 2치가 그대로 보존되어야 하나 여기선 진리치의 확장에 따라 치역의 진리치가 함께 확장되어야 한다.

따라서 2치 내에서의 확장만 염두에 둔 고전 논리의 확장이 지금엔 적용될 수 없다. 즉 이 글에서 살펴보고자 하는 (의미론적) 확장은 2치의 전제를 더이상 받아들이지 않는 데서 성립하는 반면 고전 논리의 (구문론적) 확장은 그러한 전제를 보존하는 데서 성립한다. 그 점에서 후자의 확장 개념은 전자에 적용될 수 없는 본질적 한계가 있다. 그리고 대수학의 확장도 이전 체계의 대수 구조를 보존하는 같은 방식으로 마련되기 때문에 적용에 마찬가지 문제를 안게 된다. 그 점은 불대수와 관련된 논리체계들 간의 대수적 성격에서 잘 드러난다. 1계 술어논리는 불대수 구조를 보존한 확장인 반면 다치 논리체계는 불대수 구조를 더이상 보존하지 않는다.[15]

2치의 제한성에 대한 대안으로 고려해 볼만한 것이 함수에서 사용되는 확장 개념이다. 함수의 확장은 우선 다음으로 정의될 수 있다.

[정의2.2] 함수 확장

X, Y를 집합이라고 하고 (집합 A와 함수 f에 있어서) $A \subseteq X$,

---

15) 이는 흔히 다치 대수(MV algebras) 형태로 표현된다.(Mundici(1986), 15-16쪽 참조) 네고이따/랄레스쿠 경우, 여법칙을 제외한 나머지 법칙을 만족하는 논리(또는 집합) 대수를 모르강 대수로 명명한다.(Negoita & Ralescu(1975), 16, 65쪽)

f: A→Y라고 하자. 이때 다음을 만족하는 함수 g: X→Y는 f 에 대한 확장이다:

$$g(x)=f(x), \ ^{\forall}x \in A$$

정의에서 보듯 함수의 공역이 반드시 2치로 한정될 필요는 없다. 따라서 함수 확장 개념은 고전 논리의 확장 개념에 전제된 2치의 범위를 넘어 사용될 수 있다. 그리고 진리연산을 정의할 때 2치를 제외한 나머지 진리치에 같은 값을 할당하는 연산뿐 아니라 다른 값을 할당하는 연산도 정의할 수 있다. 가령 다음과 같은 사례를 고려할 수 있다.

<사례1>(f, g: 진리연산, $A=\{0, 1\}^n$, $B=\{0, 1/2, 1\}^n$, $Y=\{0, 1\}$, $1 \leq n < \omega$[16])
f: A→Y s.t. $f(x)=1$, $^{\forall}x \in A$, $x=(x_1,\cdots,x_n)$, 라고 하자. 그러면 다음을 만족하는 함수 g는 함수 f의 확장이다:

$$g: B \to Y \text{ s.t. } g(x)=1, \ ^{\forall}x \in A, \quad 0, \ ^{\forall}x \in B-A,$$

이는 언뜻 구조 내지 진리치를 보존해야 하는 기존의 2치엔 동일한 값을 부여하고 나머지 진리치엔 다른 값을 부여하는 다치 논리체계 진리연산에 맞게 사용될 수 있을 것으로 보인다. 그러나 진리치 함수에 있어 2치에서 3치, n치 등으로 진리치를 확장하는데 치역이 변하고 있단 점을 감안할 때, 의미론적 확장에 적용되기엔 함수 확장도 구문론

16) 이하 $1 \leq n < \omega$ 생략. 그리고 여기선 함수가 다른 값을 가질 수 있단 점만 보이면 되기 때문에 편의상 공역을 2치의 범위로 한정한다. 주어진 사례에서 다음 함수 h는 함수 f 특성을 그대로 보존한 확장이 된다:

$$h: B \to Y \quad \text{s.t.} \quad h(x)=1, \ ^{\forall}x \in B.$$

적 확장과 마찬가지 문제점이 있다.[17] 즉 위의 함수 정의에서 보듯 정의역은 진리치 확장에 따라 얼마든지 변할 수 있으나 그것을 할당하는 공역의 범위는 여전히 고정되어야 한다. 반면 의미론적 확장이 문제삼는 진리치 함수에선 거꾸로 정의역이 고정되고 치역 나아가 공역이 함께 확장되어야 한다. 따라서 함수 확장 정의 만으론 다치 논리로의 확장에서 볼 수 있는 진리치 함수의 특성(진리치에 따른 치역 변화)을 직접적으로 반영한 확장 개념을 마련할 수 없다.[18] 즉 함수 확장 개념은 진리연산에 앞서 고려해야 할 진리치 함수의 확장 성질을 제대로 담아 낼 수 없다.

이에 대한 적절한 보완으로 생각해 볼 것이 고전 수학의 범위를 넘는 함수 내지 함수 확장 개념이다. 즉 기존의 보통 함수(crisp function)를 퍼지 개념이 도입된[19] 퍼지 함수로 확장한 경우이다.[20] 가령 다음의 보통 집합(crisp set)에 해당하는 정의역 원소의 상(image)을 퍼지화(퍼지 집합화)한 퍼지화 함수는 진리값 범위를 확장하는 진리치 함수에 유용하게 사용될 수 있다.

---

17) 그 점은 정의역, 치역이 함께 변하는 진리연산 문맥에서도 마찬가지이다.

18) 물론 공역의 범위를 처음부터 무한 다치에 해당하는 [0, 1] 정도로 잡아 임의의 정의역 원소에 맞게 진리치를 할당할 순 있다. 그러나 그것도 정의역(독립변항)에 할당된 진리치에 따라 치역(종속변항)이 함께 변하는 진리함수(진리연산)의 특성을 반영하지 못하는 문제가 있다.

19) 퍼지 개념은 정의역이나 치역, 또는 함수 자체에 도입될 수 있다. 여기서 논하는 퍼지 함수는 정의역이나 치역에 퍼지 개념을 도입한 경우에 해당한다.

20) 필자는 이를 "(보통 함수의) 퍼지 확장"으로 명명할 것이다. 이 경우 확장된 함수는 퍼지 확장 함수에 해당한다. 퍼지 함수에 대한 기본적 이해를 위해선 이광형/오길록(1991), 7장과 Zimmermann(1994), 7장을 참조.

[정의2.3] 퍼지화 함수

X에서 Y로의 퍼지화 함수(fuzzyfying function) $\boldsymbol{f}$는 X에서 Y의 퍼지 멱집합 $\boldsymbol{P}$(Y)로의 사상이다.

(i.e, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}$: X→$\boldsymbol{P}$(Y), fuzzyfying function iff $\mu_{\boldsymbol{f}(x)}(y) = \mu_{\boldsymbol{R}}(x,y)$, $^{\forall}(x,y) \in X \times Y$ & $\mu_{\boldsymbol{R}}(x,y)$: the membership function of a fuzzy relation[21])

정의된 퍼지화 함수 $\boldsymbol{f}$는 X에서 Y로의 함수 f: X→Y에서 Y를 퍼지화 한 것이다. 이때 X를 명제들의 집합이라고 하고 Y를 2치라고 할 경우, 함수 f와 $\boldsymbol{f}$는 2치와 무한 다치의 진리치 함수가 된다. 즉 $\boldsymbol{f}$는 명제를 나타내는 문장들과 2치 관계를 그러한 문장들과 무한 다치 관계로 확장한 경우에 해당한다. 따라서 치역(Y의 퍼지 진리값들의 집합)에 해당하는 무한의 퍼지 진리값의 부분집합 진리치를 각각의 공역으로 하고 그것들을 순서 관계로 고려해, 앞장에서 언급한 진리치 확장에 맞는 함수를 얻는 방법을 생각해 볼 수 있다.[22]

그러나 퍼지화 함수만 갖고선 진리치 확장에 따른 각각의 진리치 함수 확장을 정확히 제시할 수 없다. 특히 **퍼지**가 의미하는 애매성만큼이나 "함수의 퍼지 확장"이나 "퍼지 확장 함수"의 **확장** 개념이 애매해 이 글의 목적에 맞는 정확한 확장 개념을 찾아내기가 쉽지 않다. 유사한 문제는 진리연산 문맥에서도 마찬가지로 나타난다. 이와 관련하여 퍼지 함수에서 생각해 볼만한 확장 개념이 다음의 함수 정의

---

21) 이하 퍼지 함수의 기본적인 기호법은 마찬가지임.

22) 2치에서 다치, 무한 다치로의 진리치 함수 확장은 이런 문맥을 염두에 둔 것이다. 물론 적절한 정의를 위해선 "퍼지화 함수" 자체와는 다른 이에 맞는 구체적 확장 조건이 마련되어야 한다.

에 사용된 자데의 확장원리(extension principle)이다.

[정의2.4] (보통 함수의) 퍼지 확장 함수[23]

함수 f: $X^n \rightarrow Y$를 보통 함수라고 하자. 다음의 정의를 만족하는 함수 $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{P}(X)^n \rightarrow \boldsymbol{P}(Y)$, 는 f의 퍼지 확장이다: $^\forall A_1,\cdots,A_n \in \boldsymbol{P}(X)$,

$$B = \boldsymbol{f}(A_1,\cdots,A_n) \quad \text{s.t.}$$

$$\mu_B(y) = \sup_{\substack{x_1,\cdots,x_n \in X \\ y=f(x_1,\cdots,x_n)}} [\min\{\mu_{A1}(x_1),\cdots,\mu_{An}(x_n)], \quad ^\forall y \in Y$$

위 정의는 보통 함수를 퍼지 확장한 것이다. 이때 함수 확장은 확장원리에 준해 마련된다. 그리고 함수 자체를 퍼지화 한 경우를 제외한 대부분의 퍼지 확장은 확장원리에 따라 이루어진다. 여기서 먼저 주목할 것은 이전 함수 f와 비교할 때 확장된 함수 $\boldsymbol{f}$의 정의역과 공역이 모두 확장되었다는 점이다. 퍼지 함수 정의에 사용된 원함수 공역 Y를 정의역의 X로 대체할 경우, 위의 퍼지화 함수처럼 1장의 진리연산 형식에 맞는 퍼지 함수를 얻을 수 있다. 즉 X^n을 2치의 진리연산 정의역(2^n)이라 할 경우, $P(X)^n$은 그것을 퍼지화 한 무한 다치의 정의역($[0, 1]^n$)이 되고, 각각의 공역

23) 반데머와 고트발트 경우 퍼지 확장을 오히려 확장원리로 정의하고 있다.(Bandemer & Gottwald(1995), 35쪽) 자데가 정립한 그리고 일반적으로 받아들여지는 확장원리는 퍼지 집합과 대응함수로부터 새로운 퍼지 집합을 얻는 다음의 원칙만 나타낸다:

[정의2.5] 확장원리

$A_i(i=1,2)$를 X_i 위에서의 퍼지집합이라고 하고 f: $X_1 \times X_2 \rightarrow Y$가 주어졌다고 하자. 이로부터 다음을 만족하는 Y에서의 퍼지집합을 얻을 수 있다:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x1,x2)} [\min(\mu_{A1}(x_1), \ \mu_{A2}(x_2))], & f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$$

은 {0, 1}과 [0, 1]이 된다.

문제는 그러한 확장의 기준이 될 확장원리가 진리연산의 준거인 진리조건에 충분한 원리는 되지 못한다는 점이다. 이 글의 논의 문맥에서 고려할 때, 새로운 퍼지 집합 P(Y)에 속하는 y값을 결정하는데 항상 극대값만 선택해야 할 이유는 없다. 오히려 그것은 연산의 진리조건에 따라 다양하게 결정될 수 있어야 한다. 특히 극대값 선택이 진리조건에 따라 변화(확장)된 함수의 치역과 범위에 있어 반드시 일치할 것이라고 기대하긴 어렵다. 그런 점에서 퍼지화 함수, 퍼지 확장함수는 상당히 유용하긴 하나 이 글에서 다루고자 하는 확장에 필요한 진리치 함수, 진리연산에 그대로 적용되기엔 아직 한계가 있다.

3. 의미론적 확장 정의

비록 진리치 함수와 진리연산에 그대로 적용되기 어려운 문제점이 있었긴 하나 앞 절에서 논한 퍼지 함수를 적절히 활용하면 이 글 논의 문맥에 맞는 의미론적 확장을 정의할 수 있다. A, B가 (의미해석을 위한) 귀납 정의에 의해 닫힌 체계라고 할 경우[24], 체계 A에 대한 B로의 의미론적 확장은 우선 다음의 정의를 바탕으로 구상될 수 있다.[25]

---

24) 각각의 해석체계는 진리치 함수와 진리연산의 특성을 순서쌍과 행렬 방식으로 해 다음으로 표현할 수 있다: ($v_{(X)}$: (x치) 진리치 함수, $T^c_{(X)}$: (x치) 진리연산 도식)

$$A = \langle (P,\ v_X(P)),\ T^c_X \rangle, \quad B = \langle (P,\ v_Y(P)),\ T^c_Y \rangle$$

25) 편의상 논의 범위를 명제논리로 한정한다. 그리고 각각의 정의는 1장의 진리치 함수와 진리연산을 바탕으로 한다. 제약 성립 가능성과 관련해선 Negoita & Ralescu(1975), 70-71쪽 참조.

[정의3.1] 진리치 확장(truth-values valuation extension)
(P: (n개의 명제로 이루어진) 집합, f, g: 진리치 함수, X, Y: (X치, Y치) 집합들)[26]
$X \subset Y$, $f: P \rightarrow X$, $g: P \rightarrow Y$라고 할 때, 다음을 만족하는 함수 g는 함수 f의 진리치 확장이다:
$(x, g(x)) = (x, f(x)), \quad {}^{\forall}g(x) \in X$
$(\& \ {}^{\forall}(x, g(x)) \in P \times Y \ \& \ {}^{\forall}(x, f(x)) \in P \times X)$

[정의3.2] 진리치 제약(truth-values valuation restriction)
$g: P \rightarrow Y$, $X \subset Y$라고 하자. 이때 다음을 만족하는 진리치 함수 $g|_X: P \rightarrow X$를 g의 X로의 진리치 제약이라고 한다:
$(x, g(x)) = (x, g|_X(x)), \quad {}^{\forall}(x, g|_X(x)) \in P \times X$

진리치 확장과 제약을 진리연산에 마찬가지 방법으로 적용해 진리연산 확장과 진리연산 제약을 정의할 수 있다.

[정의3.3] 진리연산 확장(truth-operation extension)
$X^n = P \times X$, $Y^n = P \times Y$, $X \subset Y (X^n \subset Y^n)$, $T^c_X: X^n \rightarrow X$, $T^c_Y: Y^n \rightarrow Y$라고 하자. 이때 다음 관계를 만족하는 연산 T^c_Y를 T^c_X의 진리연산 확장이라고 한다:
$(x, T^c_Y(x)) = (x, T^c_X(x)), \quad {}^{\forall}x \in X^n, \ x = (x_1, \cdots, x_n),$
$(\& \ {}^{\forall}(x, T^c_Y(x)) \in Y^n \times Y \ \& \ {}^{\forall}(x, T^c_X(x)) \in X^n \times X)$

[정의3.4] 진리연산 제약(truth-operation restriction)
$T^c_Y: Y^n \rightarrow Y$, $X \subset Y (X^n \subset Y^n)$라고 하자. 이때 다음을 만족하는 연산 $T^c_Y|_X: X^n \rightarrow X$를 T^c_Y의 X로의 진리연산 제약이라고 한다:
$(x, T^c_Y(x)) = (x, T^c_Y|_X(x)), \ {}^{\forall}(x, T^c_Y|_X(x)) \in X^n \times X, \ \ x = (x_1, \cdots, x_n)$

---

26) 이하 진리함수와 관련된 기본적인 기호법은 마찬가지임.

의미론적 확장은 진리치 확장과 진리연산 확장을 만족하는 확장에 해당한다. A에 대한 B로의 확장은 다음으로 정의될 수 있다.

[정의3.5] 의미론적 확장

체계 B는 체계 A의 의미론적 확장이다. iff

체계 B(=<(P, v_Y(P)), $T^c{}_Y$>)는 체계 A(=<(P, v_X(P)), $T^c{}_X$>)에 대하여 다음 두 조건을 만족한다:

I. 체계 B의 진리치 함수 v_Y는 체계 A의 진리치 함수 v_X의 진리치 확장이다.

II. 체계 B의 진리연산 $T^c{}_Y$는 체계 A의 진리연산 $T^c{}_X$의 진리연산 확장이다.

역으로 진리치 제약과 진리연산 제약을 통해 의미론적 제약을 다음으로 정의할 수 있다.

[정의3.6] 의미론적 제약

체계 A는 체계 B의 의미론적 제약이다. iff

체계 A(=<(P, v_X(P)), $T^c{}_X$>)는 체계 B(=<(P, v_Y(P)), $T^c{}_Y$>)에 대하여 다음 두 조건을 만족한다:

I. 체계 A의 진리치 함수 $v_X(=v_Y|_X)$는 체계 B의 진리치 함수 v_Y의 X로의 진리치 제약이다.

II. 체계 A의 진리연산 $T^c{}_X(=T^c{}_Y|_X)$는 체계 B의 진리연산 $T^c{}_Y$의 X 로의 진리연산 제약이다.

4. 의미론적 확장: 확장, 비확장 사례들

4.1. 몇 가지 확장 사례들

앞장에서 정의한 방식에 따라 체계 B가 체계 A의 의미론적 확장이라면, 거꾸로 체계 A는 체계 B의 의미론적 제약으로 간주될 수 있다. 즉 체계 A, B 사이 확장과 제약 관계는 어느 체계를 기준으로 볼 것인가 이상의 차이가 없다. 따라서 여기서 따로 검토하지 않은 의미론적 제약 정의를 사용해서도 의미론적 확장을 검토할 수 있다. 우리에게 알려진 대부분의 다치 논리 의미해석은 2치 논리의 확장으로 간주될 수 있다. 여기서는 3치와 무한 다치의 특수한 논리체계를 들어 그것이 2치 고전 명제논리 Pc의 확장일 수 있단 점을 증명해 보이기로 하겠다. 주의할 것은 각각의 의미 해석체계를 다룰 때 그것을 주어진 해석에서 타당한 적형식들의 집합으로 제한하지 않는다는 점이다.[27] 따라서 의미해석에 있어 동어반복 정의와 그에 준한 논리식들의 타당성 평가는 논의 목적과 무관하기 때문에 생략한다.[28]

---

27) 엄밀히 말해서 이 글에서 다루려고 하는 의미 해석체계와 그것을 타당한 적형식들의 집합으로 한정한 논리체계는 일치하지 않는다. 후자($\{A \mid {}^{\forall}v,\ v(A)=1\}$)는 단지 전자의 부분집합일 뿐이다. (필자가 의미해석 체계를 타당한 적형식들의 집합으로 한정하지 않는 이유에 대해선 2장 구문론적 확장의 한계 논의를 참조할 것.) 타당한 식들의 범위로 따지자면 2치 논리의 의미론적 확장으로 간주될 수 있는 다치 논리는 그것의 종속체계이다.

28) 널리 알려진 고전 명제계산을 위한 형성규칙과 형식 의미론도 생략한다. (여기서 다룰 2치와 다치의 명제계산 모두 같은 형식언어로 표현될 수 있다. 즉 $L(\neg, \wedge, \vee, \supset, p_1, p_2, \cdots, p_n)$을 귀납적으로 정의된 적형식들의 집합으로 간주할 수 있다.) 형성규칙에 따른 구성도 마찬가지이므로 생략한다.

4.11. 루카치비츠 3치 명제논리 P_{L3}의 형식 의미해석

루카치비츠 3치 명제계산 P_{L3}은 진리값을 0, 1/2, 1로 하여 의미해석이 이루어진다. 우선 P_{L3}의 진리치 함수는 다음에 해당한다:

(1) v_3 : $P \rightarrow \{0, 1/2, 1\}$, $\forall p_i \in P (1 \leq i \leq n)$ (0:거짓, 1/2:미결정, 1:참)

그리고 그것은 다음의 진리연산표에 의해 L($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, p_1, p_2, …, p_n)의 모든 적형식들로 귀납적으로 확장될 수 있다.[29]

[정의4.1] 진리연산

P_{L3}의 형식 의미해석을 위한 논리상항들의 사용(진리연산)은 다음의 표로 정의된다.[30]

A	¬A	B				B				B			
		A∧B	1	1/2	0	A∨B	1	1/2	0	A⊃B	1	1/2	0
1	0	A 1	1	1/2	0	A 1	1	1	1	A 1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	0	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1	1	1/2
0	1	0	0	0	0	0	1	1/2	0	0	1	1	0

4.12. 표준 퍼지 명제논리 P_{FP}의 형식 의미해석

29) 필자는 이러한 의미 해석체계를 <(P, v_X(P)), T^c_X>(<(P, v_3(P)), T^c_3>) 형식으로 표현하였다. T^c_X는 x치에서 위의 네 논리상항의 진리연산을 대표한다.

30) 루카치비츠 무한 다치 문맥에서 주어진 진리표는 다음의 일반적인 연산 정의를 3치로 제약한 경우에 해당한다:

1. 부정 $\neg A$: $1 - v(A)$
2. 논리곱 $A \wedge B$: $\min[v(A), v(B)]$
3. 논리합 $A \vee B$: $\max[v(A), v(B)]$
4. 실질 함축 $A \supset B$: $v(A \supset B) = \begin{cases} 1, & v(A) \leq v(B) \\ 1 - v(A) + v(B), & v(A) > v(B) \end{cases}$

표준 퍼지 명제계산 P_{FP}는 진리값을 [0, 1]의 폐구간으로 하여 의미해석이 이루어진다. 우선 P_{FP}의 진리치 함수는 다음에 해당한다:

(2) $v_{[0,1]} : P \rightarrow [0, 1], \quad \forall p_i \in P \ (1 \leq i \leq n)$

그리고 그것은 다음의 진리연산표에 의해 L(¬, ∧, ∨, ⊃, p_1, p_2, …, p_n)의 모든 적형식들로 귀납적으로 확장될 수 있다.

[정의4.2] 진리연산

P_{FP}의 형식 의미해석을 위한 논리상항들의 사용(진리연산)은 다음의 표로 정의된다.

1. 부정 $\neg A$: $1 - v(A)$
2. 논리곱 $A \wedge B$: $\min[v(A), v(B)]$
3. 논리합 $A \vee B$: $\max[v(A), v(B)]$
4. 실질 함축 $A \supset B$: $\max[1-v(A), v(A) \wedge v(B)]$

4.13. 확장 증명

[정리4.3] P_{L3}은 P_C의 의미론적 확장이다.

<증명>

I. v_3은 v_2의 진리치 확장이다.

P_C의 진리치 함수는 v_2: $P \rightarrow \{0, 1\}$이고 (1)에 의해 $\{0, 1\} \subset \{0, 1/2, 1\}$이므로.

II. $T^{cPL}{}_3$은 $T^{cPC}{}_2$의 진리연산 확장이다.

$T^{cPL}{}_3$: $\{0, 1/2, 1\}^n \rightarrow \{0, 1/2, 1\}$, $T^{cPC}{}_2$: $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$의 각각의 진리연산에 있어서[31]

(i) $\neg$: $(v_3(A), \neg_{T3}(A)) = (v_2(A), \neg_{T2}(A))$, $^{\forall}v_3(A) \in \{0, 1\}^n$ in

31) $T^{cPL}{}_{\neg 3}$을 $\neg_{T3}$으로, $T^{cPC}{}_{\neg 2}$를 $\neg_{T2}$로 생략. 나머지 연산도 마찬가지임. 이하 증명에서도 마찬가지임.

{0, 1/2, 1}^{n} (즉 $v_3(A)=1(=v_2(A))$일 때 $\neg_{T3}(A)=0=\neg_{T2}(A)$이고, $v_3(A)=0(=v_2(A))$일 때 $\neg_{T3}(A)=1=\neg_{T2}(A)$이다.)

(ii) ∧, ∨, ⊃은 (i)과 마찬가지 방식으로. (진리표 참조) ■

[정리4.4] P_{FP}는 P_C의 의미론적 확장이다.

<증명>

I. $v_{[0,1]}$은 v_2의 진리치 확장이다.

P_C의 진리치 함수는 v_2: P→{0, 1}이고 (2)에 의해 {0, 1}⊂[0, 1]이므로.

II. $T^{cPFP}{}_{[0,1]}$은 $T^{cPC}{}_2$의 진리연산 확장이다.

$T^{cPFP}{}_{[0,1]}$: $[0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, $T^{cPC}{}_2$: $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$의 각각의 진리연산에 있어서

(i) ¬ : $(v_{[0,1]}(A), \neg_{T[0,1]}(A)) = (v_2(A), \neg_{T2}(A))$, $^\forall v_{[0,1]}(A) \in \{0, 1\}^n$ in $[0, 1]^n$(즉 $v_{[0,1]}(A)=1(=v_2(A))$일 때 $\neg_{T[0,1]}(A)=0=\neg_{T2}(A)$이고, $v_{[0,1]}(A)=0(=v_2(A))$일 때 $\neg_{T[0,1]}(A)=1=\neg_{T2}(A)$이다.)

(ii) ∧, ∨, ⊃은 (i)과 마찬가지 방식으로. (표 참조) ■

4.2. 몇 가지 비확장 사례들

여기선 포스트의 m치 명제계산이 고전 명제계산의 의미론적 확장일 수 없단 것과 앞장에서 논한 표준 퍼지 명제계산이 루카치비츠 3치 명제계산의 확장일 수 없단 것을 진리연산을 만족하지 않는 반례를 들어 증명하기로 하겠다.[32]

4.21. 포스트 m치 명제논리 P_{Pm}의 형식 의미해석[33]

32) 이 또한 의미론적 제약을 통해 마찬가지로 증명될 수 있다.

33) 여기선 논의의 일관성을 기하기 위해 1, 0을 각각 극대, 극소값으로 한 m치 논리형식을 취한다.

포스트 m치 명제계산 P_{Pm}은 진리값을 0, 1/m-1, …, m-2/m-1, 1로 하여 의미해석이 이루어진다. 우선 P_{Pm}의 진리치 함수는 다음에 해당한다:

(3) $v_m : P \rightarrow \{0, 1/m\text{-}1, \cdots, 1\}$, $\forall p_i \in P$ $(1 \leq i \leq n)$ & $2 \leq m < \aleph_0$

그리고 그것은 다음의 진리연산표에 의해 L(¬, ∧, ∨, ⊃, p_1, p_2, …, p_n)의 모든 적형식들로 귀납적으로 확장될 수 있다.

[정의4.5] 진리연산

P_{Pm}의 형식 의미해석을 위한 논리상항들의 사용(진리연산)은 다음의 표로 정의된다.

1. 부정 $\neg A_i$: $v(A_{i-1}$[34]$)$
2. 논리곱 $A \wedge B$: $\min[v(A), v(B)]$
3. 논리합 $A \vee B$: $\max[v(A), v(B)]$
4. 실질 함축 $A \supset B$: $\min[1, 1\text{-}v(A)+v(B)]$

4.22. 비확장 증명

[정리4.6] P_{Pm}은 P_C의 의미론적 확장이 아니다.

<증명> P_{Pm}은 P_C에 대하여 의미론적 확장조건 II를 만족하지 않는다: ($T^{cPP}{}_m$은 $T^{cPC}{}_2$의 진리연산 확장이 아니다.)

<반례> $T^{cPP}{}_5$: $\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}^n \rightarrow \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$, $T^{cPC}{}_2$: $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$의 ¬ 진리연산에 있어서

34) i-1은 (1,2,3)에 대한 (3,1,2)처럼 A_i의 진리값(예: $v_3(A)=1/2=v_3(A_2)$)에 대한 m치 진리치의 (역 방향) 회전 순열(rotation permutation)을 나타낸다. 가령 5치에서 $v_5(A)=0(=v_5(A_1))$일 때, $\neg v_5(A_1)$인 $v_5(A_{1-1})(=v_5(A_5))$의 값은 1이다.

$v_5(A)=1(=v_2(A))$일 때, $\neg_{T5}(A)=3/4 \neq \neg_{T2}(A)=0$이므로. ■

[정리4.7] P_{FP}는 P_{L3}의 의미론적 확장이 아니다.

<증명> P_{FP}는 P_{L3}에 대하여 의미론적 확장 조건II를 만족하지 않는다:($T^{cPFP}_{[0,1]}$은 $T^{cPL}{}_3$의 진리연산 확장이 아니다.)

<반례> $T^{cPFP}_{[0,1]}$: $[0,\ 1]^n \to [0,\ 1]$, $T^{cPL}{}_3$: $\{0,\ 1/2,\ 1\}^n \to \{0,\ 1/2,\ 1\}$의 ⊃ 진리연산에 있어서
$v_{[0,1]}(A)=1/2=(v_3(A))$, $v_{[0,1]}(B)=1=(v_3(B))$일 때,
$\supset_{T[0,1]}(A,B)=1/2 \neq \supset_{T3}(A,B)=1$이므로. ■

5. 맺는 말: 남은 과제들

지금까지 필자는 기술적 맥락에서 의미론적 확장을 정의하고 그것의 정당성을 몇 가지 확장, 비확장 사례 증명을 갖고 보였다. 서두에서 밝혔듯이 이러한 구상은 2치를 포함한 형식화된 다치 논리체계들 간의 관계를 검토하기 위한 작업의 일환이다. 그리고 그러한 작업의 일관성을 기하기 위해 형식화된 체계의 계산을 염두에 둔 논리에 관한 구조주의적 관점에서 논의를 이끌어 왔다. 여기서는 확장 정의와 확장 정의에 따른 확장, 비확장 사례를 검토하는 과정에서 생각해 볼 남겨진 과제를 지적하고자 한다.

먼저 의미론적 확장 정의 문맥에서 크게 문제될 것은 의미론적 확장이 논리 외적인 영역으로 간주되는 수학 특히 (퍼지 해석학을 포함한) 해석학(analysis)의 도움으로 정의된다는 점이다. 이는 수학에 있어 논리적인 것과 논리 외적인 것을 가르려고 하는 이들 특히 논리학과 집합론에 있어

귀납 가정이나 연속체 가정 그리고 무한 공리, 선택 공리 등을 거부하는 유한주의자들에겐 받아들이기 어려운 면일 것이다. 그러나 고전 논리학과 집합론의 상당부분을 논리적인 것으로 간주하고자 하는 이들은 적어도 형식화된 계산의 일부인 한 논리체계 구상에 수학적인 요소를 배제할 수 없단 점을 인정할 것이다. 가령 의미해석을 위한 진리치 할당을 위해선 **함수가** 그리고 진리연산(논리상항의 사용) 정의를 위해선 **대수** 개념이 도입될 수밖에 없다. 특히 후자는 의미해석이나 증명이론의 바탕이 되는 논리 대수구조의 근간이 된다.[35] 그런 점에서 보면 논리체계 특히 의미 해석체계 구상에서 검토되어야 할 것은 사용된 대수나 함수 개념이 어느 선까지 용인될 수 있는가이지 그것을 배제할 수 있는가는 아니다.[36]

이와 관련하여 논의 내적 문맥에서 문제될 것이 의미론적 확장의 바탕이 되는 진리함수가 수학 특히 (퍼지) 해석학의 도움을 필요로 하고 그것을 수용한다고 할 때 그 수용 범위를 어느 선까지 인정할 것인지이다. 가령 진리치 함수와 진리연산 확장과 관련하여 고전적 문맥에서 볼 땐 함수의 정의역과 치역 그리고 그 둘의 관계 범위가 지나치게

---

35) 이에 관한 보다 자세한 논의를 위해선 졸고(1998), 119-50쪽을 참조할 것.

36) 가령 사용 범위를 고전 수학으로 한정할 경우 이 글에서 주장한 의미론적 확장은 성립할 수 없다. 그러나 그렇게 한정하는 것이 정당한가 하는 것은 이 글의 논의 전제를 넘어선 문제이다. 왜냐하면 그것은 2치 논리의 대안으로 간주되는 다치 논리를 논리로 인정할 것인지와 직접적으로 연관된 문제이기 때문이다. 그리고 수학적 요소를 배제할 수 없단 점을 감안할 때, 필자는 수학에서 논리적인 것과 논리 외적인 것을 가르는 것이 정도의 문제지 완전히 구별될 수 있는 것은 아니라고 생각한다.

넓다. 그로 인해 실제 논의가 실수, 거리 공간(metric space), 연속 함수 등을 전제로 구상될 수밖에 없었다. 전제된 수와 공간, 함수의 허용 범위는 의미론적 확장을 위한 진리함수 정의에서 사용하지 않은 퍼지 함수, 관계의 허용 여부와 함께 앞으로 좀더 분명히 해야 할 과제이다.

구체적인 확장, 비확장 증명과 관련해서 생각해 볼 것은 2치 논리에 대한 루카치비츠식 확장과 표준 퍼지논리식 확장이 상호 구별될 수 있다는 점이다.[37] 비확장 예([정리 4.7])에서 보듯 표준 퍼지논리는 루카치비츠식 다치 논리확장으로 간주하기 어렵다. 그 점은 진리연산에 있어 실질 함축 정의 차이에서 분명히 드러난다.[38] 후자의 함축은 포스트를 쫓아 유계합에 바탕을 둔 것이고, 전자의 함축은 논리합(또는 합집합 연산)에 바탕을 둔 것이다. (Zadeh (1987 / 1978), 531-32쪽 참조)[39]

이러한 차이는 진리연산의 허용 범위와 관련하여 문제를 야기한다. 즉 진리연산 정의에 관한 한 비상관 연산뿐 아니라 상관 연산이 도입돼도 무방하다고 할 경우, 두 방향 모두 적절한 다치 논리 확장으로 간주될 수 있다. 그러나 합과 교에 관한 논리상항 사용을 염두에 두고 진리연산이 그

---

37) 자데 경우 부가적 정의를 통해 비상관 연산이 상관 연산으로 정의될 수 있기 때문에 양자 구별에 큰 의미를 두지 않는다.(Zadeh(1987/1978), 531쪽 주) 그런 점에서 자데는 필자가 비판하는 스톤과 유사한 문제점을 안고 있다.(졸고(1998), 143-45쪽)

38) 연산에 있어 실질 함축 정의를 제외한 나머지 정의는 상호 일치한다.([정의4.2]와 주30 참조) 루카치비츠식 함축 정의가 아닌 이 글에서 정의한 함축 정의 도입 이유와 관련해선 Zadeh(1987/1973), 126-32쪽, (1987/1976b), 347-54쪽 참조.

39) 양자는 근본적으로 상관 연산과 비상관 연산이라는 차이점이 있다. 그러나 대부분 논리 대수 논의는 그 점에 크게 주목하고 있지 않다. 차이점의 중요성에 대해선 졸고(1998), 140-45쪽을 참조할 것.

것에 맞게 정의되어야 한다고 할 경우, 전자의 함축 정의는 그대로 받아들이기엔 문제가 있다. 왜냐하면 유계합만 갖고선 루카치비츠 논리도 포스트 논리처럼 2치 논리의 확장으로 간주되기 어려운 면이 있기 때문이다.[40] 즉 진리연산 내지 논리상항 사용 문맥에서 볼 때 루카치비츠식 다치 논리는 고전 명제논리에 대한 적절한 확장으로 간주하기 어렵다. 따라서 확장 문맥과 연관하여 진리연산을 어느 선까지 허용할 지에 대한 적절한 기준 마련도 필요하다.[41]

---

40) 치역의 범위에 따른 제한 조건(주30 실질 함축 참조)을 고려하지 않을 경우, 무한 다치를 2치로 제약했을 때 루카치비츠 무한 다치 논리가 2치의 진리연산 제약을 만족한다고 보기 어렵다. (실질 함축 진리표의 셋째 단계(v(A)=0, v(B)=1)는 무한 다치를 2치로 제약했을 때 진리함수적으로 계산할 수 없다. (∧(1, 1-0+1) = ∧(1, 2) = 1에서 2는 진리치 {0, 1} 범위에서 처리할 수 없는 값이다. 따라서 함축 진리값은 (1,0,1,1)이 아닌 (1,0, ,1)로 보아야 한다.) 그 점은 무한 다치계산 [0, 1] 자체에서도 마찬가지이다. (이는 상관 연산 유계합이 갖는 본질적 한계에 기인한다.) 물론 실제 함축 정의에선 부가적 조건에 의해 (1,0,1,1)을 만족한다.

41) 이는 임의의 다치 논리 해석체계의 인준과 직접적으로 연관된 과제이다. 필자의 입장에선 포스트 m치 논리는 (명제를 나타내는) 문장의 적절한 해석체계로 간주되기 어려워보인다. 순열 개념을 도입한 그의 '부정' 정의는 일상이나 수학적 문맥에서 사용되는 문장의 부정과 의미가 잘 맞지 않는다. 그 점은 구문론적 문맥에서도 일정 정도 확인될 수 있다. 가령 2치 명제논리에 대해 의미론적 확장 체계인 루카치비츠 m치 명제계산은 구문론적으론 2치 논리의 종속체계이나 그렇지 않은 포스트 m치 계산은 그것의 종속체계가 아니다.(Rose(1980), 125쪽)

【참고문헌】

양은석.(1999). 「퍼지 논리와 의미론적 확장」. 『연세철학』 제9호. 177-200쪽.

______(1998). 「논리-대수 구조에 관한 연구」. 『論理硏究』 제2집. 119-50쪽.

이광형 · 오길록.(1991). 『퍼지이론 및 응용 1권: 이론』. 서울: 홍릉 과학 출판사.

Bandemer, H. & Gottwald, S.(1995). *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic Fuzzy Method: with Applications.* Chichester: Johns Wiley & Sons.

Bandler, W. & Kohout, L. J.(1981). "Semantics of implication operators and fuzzy relational products". *Fuzzy Reasoning and It's Applications.* eds. H. E. Mamdani & B. R. Gains. New York: Academic Press.

Bourbaki, N.(1968). *Elements of Mathematics: Theory of Sets.* Paris: Hermanns.

Epstein, R. L.(1995). *The Semantic Foundations of Logic.* vol. 1. Oxford: Oxford Univ. Press.

Fraleigh, J. B.(1994). *A First Course in Abstract Algebra.* Messachusetts: Addison-Wesley Publishing Co..

Mundici, D.(1986). "Interpretation of AF*-Algebras in Lukasiewicz Sentential Calculus". *Journal of Functional Analysis, 65.* 15-63쪽.

Negoita, C. V. & Ralescu, D. A.(1975). *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis.* Basel: Birkhäuser Verlag.

Rescher, N.(1968). *Topics in Philosophical Logic.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Co..

Robbin, J. W.(1969). *Mathematical Logic.* New York: W. A. Benjamin INC.

Rose, A.(1980). "Many-Valued Logic". *Modern Logic - A Survey.* ed. E. Agazzi. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co.. 113-29쪽.

Turner, R.(1985). *Logics For Artificial Intelligence.* Chichester: Ellis Horwood Limited.

Zadeh, L. A.(1987). *Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers by L. A. Zadeh.* ed. R. R. Yager.(외) New York: John Willy & Sons.

____________.(1987/1973). "Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes". *Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers by L. A. Zadeh.* 105-46쪽.

____________.(1987/1976b). "The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning". *Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers by L. A. Zadeh.* 329-366쪽.

____________.(1987/1978). "PRUF - A Meaning Representation Language for Natural Languages". *Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers by L. A. Zadeh.* 499-568쪽.

Zimmermann, H. J.(1994) *Fuzzy Set Theory.* 2nd. ed. Boston: Kluwer Academic Publishers.