# 유한주의와 철학적 해석1)

박정일 (서울대 강사, 연세철학연구소 연구원)

【요약문】 괴델의 불완전성 정리와 그것의 역사적 배경을 이루었던 힐베르트의 프로그램이 어떤 관계에 놓이느냐 하는 쟁점은 전자가 후자를 논박하느냐 하는 문제로 요약될 수 있다. 전자는 수리논리학에서의 한 정리이고 후자는 어떤 철학적 해석이 요구되는 요소를 지니고 있다. 따라서 전자는 '그 자체만으로는' 후자를 논박할 수 없으며, 어떤 철학적 해석이 부여될 때에만 그런 일은 가능할 수 있다. 후자가 지니고 있는 철학적 요소 중에서 가장 중요한 것은 힐베르트의 "유한주의"의 개념이다. 이 개념에 대해서 어떤 철학적 해석이 부여되느냐에 따라, 전자는 후자를 논박할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다. 특히, 힐베르트의 "유한주의"에 대한 철학적 해석은 괴델의 "특수한 유한주의적" 해석과 겐첸의 "구성주의적 해석"으로 대변할 수 있으며, 각각 논박설과 반논박설의 근거를 제공하고 있다. 결국, 문제는 그러한 철학적 해석들이 힐베르트의 사유에 비추어 얼마나 정당한가 하는 점이다. 이 글에서 나는 겐첸의 해석이 괴델의 해석에 대해 대등하게 경합적일 뿐만 아니라, 어떤 점에서는 힐베르트의 사유에 비추어 더 정당하다는 것을 보이고자 한다.

【주요어】 힐베르트 프로그램, 불완전성 정리, 유한주의, 특수한 유한주의, 구성주의적 해석

## 1. 들어가는 말

우리는 괴델의 불완전성 정리(이하, GIT로 약칭함)가 수리논리학에 관한 한, 20세기의 최대의 획기적 사건이었다고 말하는 데 주저하지 않을 것이다. 반면에, GIT와 그것의 역사적 배경을 이루었던 힐베르트의 프로그

---

1) 이 글은 제13회 한국철학자연합대회 2000에서 발표된 것을 약간 수정한 것이다. 이 자리를 빌려 개인적으로 그 발표문에 대해 중요한 몇몇 지적과 논평을 해준 박준용 박사에게 깊이 감사 드린다.

램(이하, HP로 약칭함)이 어떤 관계에 놓이느냐 하는 것은 현재 논란의 여지가 충분할 뿐만 아니라 그 논쟁이 진행되고 있는 쟁점에 속한다. 우리가 이미 누차 들어왔던 소박한 통설적 견해에 따르면, GIT는 HP를 논박했고 폐기시켜 버렸다. 반면에, 우리는 이러한 통설적 견해가 옳지 않다는 것을 보여주는 주요한 몇몇 징후를 확인할 수 있다. 간단히 말하자면, GIT의 발표 후의 힐베르트의 여러 학문적 노력, 괴델의 1931년 논문에서의 언급[2], 겐첸의 산술의 무모순성 증명, 그리고 최근의 연구동향 등이 그것이다.[3]

그러나 그러한 소박한 통설적 견해를 탈피한다 하더라도, GIT와 HP의 관계에 대한 **세련된** 형태의 논박설과 폐기설은 여전히 주장될 수 있는데, 크라이젤(G. Kreisel), 스모린스키(C. Smorynski), 지라르(J. Y. Girard) 등은 그러한 입장을 취하고 있으며, 뎉레프슨(M. Detlefsen), 타케우티(G. Takeuti) 등은 그 반대의 입장을 취하고 있다. 이제 어느 쪽 진영의 주장이 옳으냐 하는 점을 판단하기 위해서는 우리에게는 더 신중한 고찰이 필요할 것이다.

GIT와 HP의 관계를 규명하기 위해서는 무엇보다도 그 각각의(특히, HP의) 개념의 성격을 먼저 검토하거나 규정하는 것이 필요하다. GIT는 수리논리학의 한 정리이다. 반면에 HP는 보다 더 복잡하고 포괄적인 성격을 지니고 있다. 최근에 최병일 박사는 마예어(U. Majer)와 더불어, HP가 "철학적으로 인식론적 계획"(최병일[1997], 109쪽)이라고 주장한다. 만일 이 주장이 옳다면, 우리는 자연스럽게 다음의 의문을 떠올리게 될 것이다: 그렇다면 어떻게 GIT가 HP를 논박할 수 있는가? 즉: 과연 어떤 한 수리논리학적 정리가 철학적 인식론적 계획을 논박한다는 것은 가능한가? 반면에, 시이그(W. Sieg)는 힐베르트가 "그의 프로그램을 통하여 수학에서의 기초론적 물음들을 일반 철학으로부터 분리시키려고 했다"(Sieg[1984],

2) Gödel[1931], p.615: "나는 정리 XI(와 그에 상응하는 M과 A에 대한 결과)가 힐베르트의 형식주의적 관점과 모순되지 않는다는 것을 분명하게 말하고자 한다."

3) 참조: 박정일[1999], 249-250쪽.

p.173)라고 말한다. 이러한 주장에 대해서도 우리는 다음과 같은 의문을 자연스럽게 떠올리게 될 것이다: 그렇다면, 힐베르트의 프로그램은 전혀 비철학적인 것인가? 따라서, 논박설의 주장은 힐베르트가 GIT의 부정을 추측했거나 주장했다는 것에 상당하는가?

요컨대, 만일 최병일 박사의 주장이 옳다면, 그 극단적인 경우에, 아마도 반논박설은 사소하게 참일 것이다. 왜냐하면 대체로 어떤 수학적, 수리논리학적 정리도 어떤 철학적 주장이나 인식론적 주장(계획)을 논박할 수 없을 것이기 때문이다. 반면에, 만일 시이그의 주장이 옳다면, 그 극단적인 경우에, GIT와 HP의 관계에 대한 모든 논의는 장황한 것으로 되어 버릴 것이며, 논박설이 옳다면 이는 그저 사소하게 옳을 것이다.

그러나 사실상, GIT와 HP의 관계에 대한 논의와 그에 따른 논박설-반논박설의 주장은 사소하게 제기되지 않는다. 따라서, 우리는 HP가 철학적인 계획이라고 주장하든 아니면 비철학적인 계획이라고 주장하든, 그 극단적인 형태를 지양해야 한다.

한편, 우리는 HP가 어떤 철학적인 요소를 지니고 있다는 것을 확인할 수 있다. 즉, GIT와 HP는 둘 다 어떤 형식체계에 대한 것이라는 점에서 메타수학적 성격을 지니고 있지만, HP는 그 밖의 다른 요소를, 특히 어떤 철학적 해석이 요구되는 요소를 지니고 있는 것이다. 이제, 어떤 특수한 경우가 아니라면, 어떤 수리논리학적 정리도 **그 자체만으로는** 어떤 철학적 계획이나 교설을 논박할 수 없을 것이라는 점을 주목하자. 예컨대, 무한공리나 환원가능성 공리는 그것 자체로는 러셀의 논리주의를 논박하지 않는다. 오히려, 그것이 가능하다면, 어떤 철학적 해석이 부여된 무한공리나 환원가능성 공리가 그럴 수 있다. 이는 유클리드 기하학의 어떤 공리나 정리도 그 자체만으로는 어떤 자연과학의 이론(예컨대, 상대성 이론)도 반박하지 않는 것과 같다. 마찬가지로, 엄밀하게 말하면, GIT는 **그 자체만으로는** HP를 논박할 수 없다. 오히려, 만일 전자가 후자를 논박한다면, 어떤 철학적 해석이 부여된 GIT가 그럴 수 있을 뿐이다.

HP가 지니고 있는 철학적 요소 중에서 중요한 것은 힐베르트의 "유한주의", "메타수학", "형식화" 등의 개념이며, 특히 "유한주의"의 개념은 가

장 중요하다. 이 개념(들)에 대해서 어떤 철학적 해석이 부여되느냐에 따라, GIT는 HP를 논박할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다. 특히, 힐베르트의 "유한주의"에 대한 철학적 해석은 괴델의 "특수한 유한주의적" 해석과 겐첸의 "구성주의적 해석"으로 대변할 수 있는데, 전자의 시각을 따른다면 논박설이 성립하며(또는 그 가능성은 매우 높을 것이며), 후자의 시각을 따르면 반논박설이 성립한다(또는 그 가능성은 매우 높을 것이다). 이러한 입장 차이는 특히 힐베르트의 "유한주의"가 첫째, 초한 귀납법에 적용 가능하냐 하는 문제(3절)와 둘째, 존재 양화 문장에 적용 가능하냐 하는 문제(4절)에서 현저하게 나타난다.

결국, 문제는 그러한 철학적 해석들이 힐베르트의 사유에 비추어 얼마나 정당한가 하는 점이다. 이 글에서 나는 겐첸의 해석이 괴델의 해석에 대해 대등하게 경합적일 뿐만 아니라, 어떤 점에서는 힐베르트의 사유에 비추어 더 정당하다는 것을 보이고자 한다.

## 2. 힐베르트 프로그램과 유한주의[4)]

HP의 배경을 이루었던 19세기말에서 20세기초의 수학사적 상황은 단적으로 격동의 시대라고 해도 과언이 아닐 것이다. 비유클리드 기하학의 수용과 정상화, 새로운 논리학의 출현, 해석학에서의 엄밀화 작업의 진전, 그리고 수학의 새로운 기초적 토대로서의 집합론의 발흥으로 요약될 수 있는 19세기말까지의 수학사적 상황은 그 끝 무렵에 수학에서의 "역설"의 발견과 더불어 발발한 소위 '수학의 위기'와 함께 새로운 단계로 접어들게 되었다.[5)]

힐베르트는 이러한 상황에서 한편으로는 칸토르의 집합론에 대해 크게 감명 받았고, 또 다른 한편으로는 어떤 체계적인 방법으로 "수학의 위기"

4) 이 절은 박정일[1999]의 V절과 다소 중복되는 것으로, 논의 전개상 불가피하다고 판단했기에 첨가되었다.

5) 참조: 모리스 클라인[1984], 204-256쪽.

를 극복하고자 하였다. 그리하여 그는 수학에서 역설이 발생할 우려나 "수학적 추론의 확실성에 대한 일반적 의문을 완전히 일거에 해소하는 것을 목표로 삼는"(Hilbert[1923a], p.178) 어떤 혁신적이고 일견 결정적인 계획을 착안하고 제안하였다. 그 계획이란 간략하게 말하자면, 실제의 수학을 형식화하고서 그것에 대해서 어떤 방법---유한주의자 방법---으로 그 무모순성을 증명하자는 것인데, 보통 "힐베르트의 프로그램"이라고 일컬어진다. 이제 그의 언급을 살펴보자:

> 나의 증명이론의 근본적인 생각은 다음과 같다:
> 지금까지의 의미에서 수학을 구성하는 모든 것은 엄밀하게 형식화되며, 그리하여 본래의 수학 또는 더 좁은 의미의 수학은 논리식들의 명세서(Bestande)가 된다. 이 논리식들은 일상적인 기호들 외에도 논리적 기호들, 특히 "따라나오다" 대신에 (→) 가, "아니다" 대신에 (~)가 그 안에 나온다는 점에 의해서 그저 수학의 일상적인 논리식들과 구분된다. (...)
> 본래의 그렇게 형식화된 수학에 어느 정도 새로운 수학, 메타수학이 덧붙여지는데, 이것은 전자를 보증(Sicherung)하기 위하여 필요하며, 그 안에서는—본래의 수학의·순수한 형식적 추론방법에 대조해서—내용적인 추론이 사용되지만 이는 단지 공리들의 무모순성의 증명을 위한 것이다.(Hilbert[1931], p.192)

힐베르트는 본래의 수학(eigentliche Mathematik) 또는 (좁은 의미의) 실제 수학을 '형식화'하고, 이 형식화된 결과(즉, 형식체계)에 대한 사유로서 "증명이론"을 제안하고 있는데, 여기에서 가장 중요한 것은 무모순성 증명이다. 그에 따르면, '증명이론'은 실제 수학에서 이루어지는 "증명 그 자체를 우리의 탐구의 대상으로 삼는"(Hilbert[1922], p.169) 이론이다. 뿐만 아니라, 힐베르트는 여러 곳에서 그러한 무모순성 증명이 "유한주의자 관점"에서, 또는 "유한적 방법"에 의해서 수행되어야 한다고 역설한다. 그여 이제 우리는 HP를 다음과 같이 규정할 수 있다:

힐베르트의 프로그램(HP): 우리는 실제로 수행되는 수학(의 전체나 부분)을 형식화하여 그 형식체계가 무모순이라는 것을 유한주의자 관점에

서 증명할 수 있다. 특히 이렇게 함으로써 우리는 산술의 무모순성을(더 나아가 실제 수학의 무모순성을) 증명할 수 있으며, 칸토르의 집합론의 초한 개념을 정당화할 수 있다.

이제 가장 중요한 것은 힐베르트의 유한주의자 관점(또는 유한주의의 개념)이 무엇이냐 하는 점이다. 먼저 힐베르트 자신의 언급을 살펴보기로 하자.

> 수론과 대수의 단초(Anfang)에 대해 [여기에서] 수행되고 있는 고찰로부터 우리는 직접적으로 내용적인(inhaltlich) 추론들을, 직관적으로 표상된 (vorgestellt) 대상들에 대한 사고실험에서 생겨나고 그 적용과 사용에서 공리적 가정들이 없는 추론들을 확인할 수 있다. 이런 종류의 추론을 우리는 그것에 대해 간결한 표현을 부여하기 위해서 '유한주의자'[finit, 유한적; 유한주의][6] 추론이라고 부를 것이며, 또한 이러한 추론의 근저에 놓이는 방법적 태도를 유한주의자 태도 또는 유한주의자 관점이라고 명명하겠다. 동일한 의미에서 문제가 되는 생각과 주장과 정의가 **대상들의 원리적인 파악가능성**과 이와 더불어 **절차들의 원리적인 수행가능성**의 한계 내에서 진행되고 그리하여 구체적 고찰의 영역 내에서 수행되는 것에 모두 '유한주의자'라는 단어로 표현함으로써, 유한적인 개념형성과 주장들에 관해 말하겠다.(Hilbert and Bernays [1934], p.32; 고딕체는 필자)

이 인용문은 "유한주의"의 개념에 대한 명시적 설명으로서 최초로 제시된 것이며, GIT 발표 이후에 씌어진 것이다. 물론, 이러한 힐베르트의 설명이 충분히 명료한 것은 아니다. 그러나 그렇다 하더라도, 우리는 다음과 같이 힐베르트의 '유한주의'의 세 가지 측면을 이끌어낼 수 있다.

첫째, 우리는 힐베르트가 유한주의의 한 측면으로서 "대상들의 원리적인 파악가능성"을 제시하고 있다는 것을 알 수 있다. 우리는 이러한 '유한주의'를 "대상-유한주의"라고 부를 수 있다.[7] 대상-유한주의에 따르면, 어

---

6) 힐베르트의 "finit"은 그 자신이 새롭게 만든 독일어 단어이다. 이는 "finitary", "finitist", 또는 "finitistic"으로 영역된다. 이 글에서는 그 맥락에 따라 "유한적", "유한주의", "유한주의자"로 옮기고 있다.

7) 이 "대상-유한주의"라는 용어는 원래 박정일[1999]에서 "개념-유한

떤 것이 (힐베르트의) '유한적'이라는 수식어가 부가될 수 있으려면, 그것은 유한한 대상만을 지칭하거나 또는 오직 유한-개념만을 포함해야 한다. 따라서 가령, 어떤 명제나 이론, 또는 체계가 어떤 초한 개념(또는 이와 같은 추상적 개념)을 포함하고 있다면, 그것은 모두 유한적이지 않다(물론 여기에는 무한한 절차가 허용되지 않는다). 이 점을 힐베르트는 "무한하게 작은 것들과 무한하게 큰 것들은 그것들에 대한 명제들을 유한한 크기간의 관계들에[대한 명제들]로 환원함으로써 제거되었다"(Hilbert [1925], p.370)라고 말함으로써 표현하고 있다. 또한, "유한적 대상", "유한적 토대"(Hilbert[1923a], p.181-2), "유한적 논리학"(Hilbert[1923a], p181) 등은 그 논의의 맥락에서 보면 대상-유한주의의 의미로 사용되고 있다고 보인다.

둘째, 우리는 힐베르트가 "유한주의"의 또 다른 측면으로서 "절차들의 원리적인 수행가능성"을 제시하고 있다는 것을 알 수 있다. 우리는 이러한 유한주의를 "절차-유한주의"라고 부를 수 있다. 절차-유한주의에 따르면, 어떤 것이든 유한한 절차들에 의해서 표현되거나 정당화될 수 있다면 그것은 유한적이다. 따라서 극단적으로는 어떤 초한 개념이 포함될지라도 그 절차가 유한하고 우리가 그것을 파악할 수 있다면 그것은 유한적이다. 힐베르트는 이 점을 다음과 같이 표현하고 있다: "무한한 것들을 사용하는 추론의 양상들을 유한한 절차들에 의해서 대치하라."(Hilbert[1925], p.370)

셋째, 만일 대상-유한주의와 절차-유한주의라는 관점에서 위에서 인용된 힐베르트의 언급을 살펴보면, 우리는 그 유한주의의 개념이 그 둘에 모두 개입하고 있다는 것을 알 수 있다. 즉, "대상들의 원리적인 파악가능성"과 "절차들의 원리적인 수행가능성"이라는 힐베르트의 언급은 비록 모호할지라도 대상-유한주의와 절차-유한주의를 둘 다 망라하는 것으로 보인다. 우리는 이러한 유한주의의 측면을 "구성-유한주의"라고 부를 수 있다. 이제 문제는 구성-유한주의가 대상-유한주의, 그리고 절차-유한주의와 어

---

주의"라고 명명되었던 것이다. 필자는 정인교 교수의 지적과 제안을 받아들여, 이 용어를 채용하고 있다.

떤 관계를 지니고 있느냐(또는 어떤 관계를 지니고 있다고 규정해야 하느냐) 하는 점이다.

유한 개념과 유한한 절차만이 허용되는 영역에서는 대상-유한주의와 절차-유한주의는 서로 일치한다. 그러나 초한 개념이 포함되는 영역에서는 그 둘은 서로 일치하지 않는다. 따라서 대상-유한주의와 절차-유한주의는 어떤 경우 양립 불가능하다. 그러나 우리는 어떤 초한 개념이 포함된다 하더라도 그것이 원초적인 어떤 단순한 개념으로부터 유한한 절차에 의해서 **구성**되거나 또는 그렇다고 **해석**되는 한에서 유한적이라고 간주할 수 없을까? 이러한 가능성이 성립할 수 있다는 것은 무엇보다도 힐베르트가 결국 브라우어의 구성주의를 거부하지 않았다는 점으로부터 알 수 있다.[8)]

그러나 과연 힐베르트가 "절차-유한주의"의 개념을 명시적으로 규정하고 의도했느냐 하는 점은 여전히 논란의 여지가 있다. 반면에 분명한 것은, 힐베르트의 언급들 중에는 "대상-유한주의"만으로는 해명하기 어려운 것들이 있다는 점이다. 예컨대, 힐베르트가 「논리학과 산술의 기초」[1904]와 「수학의 기초」[1923a, 1923b]에서 제시한 무모순성 증명에는 각각 무한집합과 초한 함수 τ가 사용되고 있다. 그러나, 힐베르트는 당연히 그 무모순성 증명을 유한적이라고 간주할 것이다. 또한 힐베르트는 「수학적 문제」[1901]에서 "유한한 수의 논리적 추론을 적용함으로써 결코 모순에 이를 수 없다는"(Hilbert[1901], p.301) 것이 증명되어야 한다고 말한다. 더구나 그는 「수학의 논리적 기초」[1923a]에서 "우리의 사유는 유한적이다; 우리가 사유할 때에는 유한적 절차가 일어난다"(Hilbert[1923a], p.187)라고 말한다. 당연하게도 그는 우리가 사유할 때 어떤 초한 개념이나 그것을 의도하는 기호가 사용될 수 있다고 생각할 것이므로, 이러한 언급도 "대상-유한주의"만으로는 해명하기가 어렵다.

따라서 힐베르트가 "절차-유한주의"를 명시적으로 의도했느냐 하는 점

---

8) 가령, 힐베르트는 「수학의 새로운 기초」[1922, p.160]에서 "공리론(Axiomatik)을 추구함에 있어서 거기에 포함되는 방법은, 나는 이렇게 믿고 있는데, 구성적 경향에—그것이 자연스러운 한에서—완전히 들어맞는다"라고 말한다.

은 논란의 여지가 있겠지만, 그렇다 하더라도 "절차-유한주의"를 상정하는 것은 유익하다. 즉, 그렇게 함으로써 우리는 "대상-유한주의"만으로는 해명할 수 없는 힐베르트의 사유의 다른 측면과, 또 해명하기 어렵다는 바로 그 사실을 효과적으로 부각시킬 수 있고, 이와 더불어 "구성-유한주의"의 중요성을 확인하게 되는 것이다.[9)]

## 3. 특수한 유한주의와 구성주의적 해석

힐베르트의 "유한주의"의 개념이 초한 귀납법에 적용될 수 있는 것이냐 하는 문제는 논박설과 반논박설 중 어느 쪽이 옳으냐 하는 점과, 특히 겐첸의 산술의 무모순성 증명이 HP와 어떤 관계를 맺고 있느냐 하는 것을 규정하는 데 결정적인 영향을 끼친다. 그러나 과연 '유한주의자 관점'은 초한 귀납법과 상통할 수 있는가?[10)]

먼저 괴델은 초한 귀납법(특히, $\varepsilon_0$-초한 귀납법)이 힐베르트의 "유한주의"와 상충한다는 입장을 취한다.[11)] 괴델은 "유한주의 수학이 구체적 직

9) 필자가 아는 한, 어느 누구도 힐베르트가 "절차-유한주의"를 명시적으로 의도했다고 주장하지 않았다. 필자 또한 그러한 주장은 불필요하다고 생각한다. 마찬가지로 필자는 힐베르트가 오직 "대상-유한주의"만을 명시적으로 의도했다고도 생각하지 않는다. 위의 인용문에서 알 수 있듯이, 그가 의도하는 것은 오히려 "구성-유한주의"라고 보인다. 따라서 "대상-절차-구성 유한주의"의 구분은 힐베르트가 명시적으로 의도했느냐 하는 점과는 무관하다. 오히려 이러한 구분은 힐베르트의 사유에 대해 효과적으로 접근하기 위해 상정된 것일 뿐이다.

10) 이 문제와 관련해서, 힐베르트의 '유한주의'의 개념은 GIT를 전후해서 어떤 변화를 겪었다고 보인다. 참조: Bernays[1935], p.216; Bernays[1967], p.502; Bernays[1967], p.502; 콘스탄스 리드[1989], 249-250쪽.

11) 1931년 논문에서 괴델은 자신의 불완전성 정리가 힐베르트의 유한주의자 관점과 모순을 일으키지 않는다고 언급하였다. 그러나 그는 1958년 이후에는 그러한 생각을 거부한다. 다시 말해서 그는 GIT가

관의 수학으로 정의된다"(Gödel[1972], p.272)고 간주한다. 그는 '구체적 직관'과 '추상적 개념'을 대조시키는데, 그에 따르면, 전자는 그 내용으로서 "(기호들의 조합들과 같은) 구체적 대상들의 속성들이나 관계들을 지니고 있는" 것이지만, 반면에 후자는 "본질적으로 이계 또는 더 높은 등급의 개념들을 의미"하고, 또 그 내용으로서 "사유 구조들이나 사유 내용들(예컨대, 증명들, 유의미한 명제들, 등)을 지닌다".(Gödel[1972], pp.272-3)

한편, 괴델은 겐첸의 $\varepsilon_0$-초한 귀납법에 의한 산술의 무모순성 증명을 주목하면서, "$\varepsilon_0$에 대한 회귀는 만일 수론의 무모순성이 유한적으로 증명될 수 있다면 마찬가지로 그럴 수 있을 것이다"(Gödel[1972], p.273)라고 말한다. 반면에, 괴델은 $\varepsilon_0$-초한 귀납법이나 $\varepsilon_0$-회귀가 타당하냐의 여부가 가령 $\omega^2$의 경우와는 달리 "직접적으로 명증적인 것"으로 될 수 없다고 주장한다. 즉, "우리는 감소하는 수열(decreasing sequences)에 대해서 존재하는 다양한 구조적 가능성들을 한 눈에 파악할 수 없고", 그리하여, "그러한 모든 수열이 종결된다는 것에 대한 어떤 직접적인 구체적 지식도 존재하지 않는다"(Gödel[1972], p.273)는 것이다. 그러면서 그는 $\varepsilon_0$-초한 귀납법이나 $\varepsilon_0$-회귀의 타당성을 확립하는 데에는 예컨대, "접근가능성"에 기초한 추상적 지식이 필요하다고 주장한다. 결국 괴델은 수론의 무모순성이 "유한적 방법으로"는 증명될 수 없다는 것을 주장하고 있는 것이다.

괴델은 이 상황을 다음과 같이 요약하고 있다:

> 어쨌든, 베르나이스는 그의 *1935,* 각주 1에서 유한주의 수학의 개념에서 두 가지 부분들을 구분하도록 가르치고 있다. 즉: 첫째, 구성주의적 요소(constructivistic element)인데, 이는 수학적 대상들이나 사실들이 오직 제시될 수 있거나 구성이나 증명에서 획득될 수 있다는 의미에서만 그것들을 받아들인다는 점에서 성립하며, 둘째, 특수하게 유한주의적 요소(specifically finitistic element)인데, 이는 문제가 되는 그 대상들과 사실들이 구체적인 수

HP를 논박하지 않는다는 원래의 견해를 나중에 번복한 것이다.(참조: 박정일[2000], 84-7쪽) 한편, 1931년 당시에 괴델이 힐베르트의 '유한주의'의 개념을 어떻게 파악했느냐 하는 점은 분명하지 않다. 이와 대조해서, 1958년 이후에는 [1958]과 [1972]에서 그 개념에 대한 더 분명한 입장이 개진되고 있다.

학적 직관에서 주어져야 한다는 것을 더 요구한다. 이 말은, 그 대상들에 관한 한, 그것들이 그 본성이 상등성이나 차이를 제외하고는 관계가 없는 요소들의 유한한 시공간적 조합들이어야 한다는 것을 의미한다.(Gödel[1972], p.274)

괴델은 곧 이어서 "포기되어야만 하는 것은 두 번째 요구 조건이다"(Gödel[1972], p.274)라고 말한다. 요약하자면, 괴델은 그가 부르는 바 "특수한 유한주의적 요소"로서의 유한주의 수학의 개념을 견지한다면, 첫째, 겐첸의 결과에 따라 그러한 유한적 방법으로는 수론의 무모순성을 증명할 수 없고(따라서 겐첸의 증명 방법은 그러한 유한적 방법이 아니며), 둘째, 힐베르트의 프로그램은 자신의 정리에 의해서 논박되므로, 유한주의 수학의 무모순성을 증명하거나 그 불충분성을 보이기 위해서는 그러한 유한주의의 개념은 포기되어야 한다고 주장한다.

따라서 괴델은 힐베르트의 유한주의의 개념을 오직 대상-유한주의만으로 파악하고 있다. 이는 그가 "특수한 유한주의적 요소"라고 부른 것으로서, 문제가 되는 대상들과 사실들이 그 유한한 시공간적 조합에 관한 한 "구체적인 수학적 직관에서" 주어져야 한다는 것을 뜻한다.[12] 반면에 괴델이 파악하는 바, 예컨대, $\varepsilon_0$-초한 귀납법의 타당성을 보이는 데에는 구체적 직관이나 구체적 지식 외에도 추상적인 지식이 요구되며, 이 점이 곧 힐베르트의 유한주의의 한계라고 괴델은 보고 있는 것이다.

반면에, 겐첸은 초한 귀납법이 힐베르트의 "유한주의"와 상충하지 않는다는 입장을 취하고 있다. 그는 먼저 "수학에서의 무한의 본성에 대한 해석"을 두 가지로 구분하고, 각각을 무한에 대한 '실무한주의자(actualist; an sich)' 해석과 '구성주의자(구성주의적; constructivist; konstruktiv)' 해석이라고 부른다.(Gentzen[1936-7], p.224) 전자는 완결된 총체로서의 무한(즉, 실무한)을 받아들이는 해석이고, 후자는 오직 가능무한만을 허용하는 해석이다. 겐첸에 따르면,

12) 특히, 괴델은 힐베르트의 "구체적 직관"을 "불연속적인 유한한 수의 대상들의 조합들에 한정된 칸트의 시-공간 직관"(Gödel[1972], p.272)으로 간주한다.

> 만일 우리가 가능한 한 일반적인 원리로 구성주의자 견해의 본질을 표현하고자 한다면, 우리는 그것을 다음과 같이 정식화하게 될 것이다: '무한한 것은 결코 완성된(completed) 것으로서 간주되어서는 안되며, 오히려 계속해서 구성적으로 형성될 수 있는, 되어가는(becoming) 것으로서 간주되어야 한다.[13]

겐첸은 가능무한을 신뢰 가능한 것으로 받아들이고, 이제 이러한 입장에서 실무한의 사용을 어떻게 정당화할 것이냐 하는 것을 문제삼는다. 이때 물론 겐첸은 실무한과 같은 것이 실제로 존재한다고는 생각하지 않는다. 겐첸에게 실무한은 하나의 "허구적 대상(leerer Schein)"(Gentzen[1936-7], p.229)에 불과하며, 의미 없는 것일 뿐이다. 더 나아가 그는 "**구성주의자 추론들에 의해서 실무한주의자 해석의 무모순성을 증명하는 것**"(Gentzen[1936-7], p.228)이 곧 힐베르트 프로그램의 목적이었다고 여긴다. 그리하여,

> 우리는 무한이 어떤 한 구성적 의미에서만 적용되는 증명기술들을 사용할 수 있어야 하며, 무한에 대한 실재론자(actualist: 실무한주의자)의 해석에 기초해 있고 그리하여 의심스러운 성격을 지니는 모든 것들을 엄격하게 회피해야 한다. 이 제한은 힐베르트가 '유한주의자 관점'이라고 부르는 것과 **대등한 것**이다. 그렇지만, 무모순성 증명에 관한 한, 원래 힐베르트에 의해 착상되었고 그가 '유한주의자 증명기술'을 형성하는 것으로 생각했던 것보다 뭔가 더 강한 방법들이 요구된다고 보인다.(Gentzen[1938], p.237; 고딕체는 필자)

결론적으로, 겐첸은 자신의 "무한에 관한 구성주의적 해석"이 힐베르트의 "유한주의자 관점"과 대등한 것이라고 간주하고 있는 것이다. 그렇다면 어떻게 초한 귀납법이 구성주의적으로 해석될 수 있는가? 또한, 자연수와 마찬가지로, 실제로 초한 서수들도 구성적으로 형성될 수 있는가?

겐첸은 자신의 산술의 무모순성 증명에서 사용된 "'초한 서수들'의 개념은 (...) 엄격하게 구성적으로 형성될 수 있고, 논란의 여지가 있는 실무한주의자의 관점들과 공통된 어떤 것도 지니지 않는다"(Gentzen[1936-7], p.230)라고 말한다. 그는 초한 서수가 구성되는 과정—1, 2, 3, ..., $\omega$, $\omega$ +

---

13) Gentzen[1936-7], p.225. 또한 참조: Gentzen[1936], p.162.

1, $\omega + 2$, $\omega + 3$, ..., $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 2 + 1$, $\omega \cdot 2 + 2$, $\omega \cdot 2 + 3$, ..., $\omega^2$, $\omega^2 + 1$, $\omega^2 + 2$, ...,$\omega^3$, $\omega^4$, ..., $\omega^\omega$, ..., $\varepsilon_0$, ...—에 대해서, 여기에는 기본적으로 오직 다음의 두 가지 연산(operation)만 포함되어 있다고 주장한다:

> (1) 이미 존재하는 수에 대해서, 우리는 그것의 다음 수를 형성할 수 있다(1을 더함).
> (2) 수들의 무한한 열에 대해서, 우리는 그 전체 수열 다음에 나오는 어떤 한 새로운 수를 형성할 수 있다(극한의 형성).(Gentzen[1936-7], p.230)

그러나 혹자는 당연하게도 이 지점에서, 위의 초한 서수의 구성 과정이 비-구성적이라고 주장할 수도 있을 것이다. 왜냐하면, "이미 $\omega$의 형성에 자연수들의 완결된 수열이라는 실무한의 개념이 개입되어 있다"(Gentzen [1936-7], p.230)고 볼 수 있기 때문이다. 겐첸은 이러한 가능한 의문과 염려가 근거 없는 것이라고 주장하면서 다음과 같이 말한다:

> 여기에서 무한의 개념은 예를 들어 다음과 같이 말함으로써 가능 무한적으로 명확하게 해석될 수 있다: 아무리 멀리 우리가 새로운 자연수들을 구성적으로 형성하는 데로 나아갈지라도, 수 $\omega$는 그 어떤 자연수 n에 대해서도 $n < \omega$라는 순서관계에 놓인다. 그리고 다른 서수들의 형성에서 나타나는 무한 수열들도 정확하게 동일한 방식으로 해석되어야 한다.(Gentzen[1936-7], p.230-1)

따라서 그는 위의 초한 서수의 구성 과정에서 등장하는 무한 개념도 가능 무한의 관점에서 해석 가능하다고 주장하고 있는 것이다. 그리하여 겐첸의 입장에서는, 우리가 "$\omega^2$"을 언급할지라도 반드시 그 상황에서 실무한주의자들의 해석을 따를 필요는 없는 것이며, 오히려 가능무한의 관점에서의 해석, 즉 구성주의적 해석이 가능한 것이다.

초한 서수의 구성 과정이 구성주의적으로 해석될 수 있다는 견해를 받아들이면, 이제 초한 귀납법이 구성주의적이라는 점은 지척에 있다. 겐첸에 따르면, 초한 귀납법은 "자연수들로부터 초한 서수들에로 완전 귀납의

규칙을 확장시킨 것에 불과"(Gentzen[1936-7], p.231)하므로, 우리는 완전 귀납법으로부터 P(1), P(2), P(3), ...을 확신할 수 있는 것과 마찬가지로, P($\omega$), P($\omega$ + 1), P($\omega$ + 2), ...를 확신할 수 있다

요약하자면, 괴델과 겐첸은 각각 힐베르트의 "유한주의"에 대해서 대상-유한주의의 측면과 구성-유한주의의 측면을 주목하고 있으며, 이를 각각 "특수한 유한주의"와 "구성주의적 해석"이라고 부르고 있다. 이제 우리는 바로 이 지점에서 힐베르트의 프로그램과 유한주의의 개념, 괴델의 불완전성 정리, 겐첸의 산술의 무모순성 증명과 $\varepsilon_0$-초한귀납법 등의 주제가 응집되면서 얽혀들고 있는 것을 보게 된다. 만일 괴델과 같이, 힐베르트의 유한주의를 오직 "특수한 유한주의"(또는 대상-유한주의)로만 파악한다면, 겐첸의 $\varepsilon_0$-초한귀납법과 산술의 무모순성 증명은 유한적인 것이 아니며, 또 GIT가 HP를 논박한다는 것은 설득력 있다. 반면에, 겐첸과 같이, 힐베르트의 유한주의가 "무한에 대한 구성주의적 해석"에 기초해 있는 것으로서 "무한에 대한 실무한주의자의 해석을 엄격하게 회피"하는 것에 있다면, 겐첸의 $\varepsilon_0$-초한 귀납법과 산술의 무모순성 증명은 유한적인 것이고, 또 GIT는 HP를 논박하지 않는 것이다.

## 4. 실제 명제와 이상적 명제

힐베르트는 "1 + 5 = 5 + 1"과 같은 명제를 실제 명제(real proposition)라고 부르고, "x + y = y + x"와 같은 명제를 이상적 명제(ideal proposition)라고 부른다. 힐베르트에 따르면, 전자는 어떤 내용을 담고 있고, 어떤 내용적인 것을 직접 전달한다. 반면에, 후자는 어떤 내용적인 것을 직접 전달하지 않고, 또 그것을 구성하는 기호들은 그 자체로는 아무 것도 의미하지 않지만, 우리는 그 명제로부터 "사실상 다른 것들을 도출할 수 있고, 그것들을 유한 명제들을 전달하는 것으로 다룸으로써 그 것들에 어떤 의미를 부여한다."(Hilbert[1925], p.380)

한편, 힐베르트는 "a + 1 = 1 + a"(이 때 'a'는 내용을 전달하기 위한

기호이고, 어떤 특정한 수도 대입될 수 있다)와 같은 보편 언명을 문제성 있는 것으로 간주한다. 그에 따르면, 이와 같은 언명은 무한히 많은 특정 명제들의 연언으로 해석될 수 없으며, "유한주의자의 관점에서는 부정될 수 없고, 어떤 숫자(Zahlzeichen: 수기호)가 주어질 때 어떤 것을 주장하게 되는 가언적 판단으로만 해석될 수 있다."(Hilbert[1925], p.378)

그런데 힐베르트의 이러한 언급들은 한편으로는 명쾌해 보이지만, 다른 한편으로는 당혹스러운 것이기도 하다. 문제는 다음과 같다: "a에 임의의 특정한 수가 대입될 수 있을 때, a + 1 = 1 + a"와 같은 보편 언명은 실제 명제인가 아니면 이상적 명제인가? 또한, "'a + 1 = 1 + a'를 만족하는 어떤 수 a가 존재한다"는 어떠한가?

요컨대 문제는 힐베르트가 모든 명제에 대해서 실제 명제와 이상적 명제를 어떻게 구분하고 있느냐, 또는 그것들의 정확한 경계선을 무엇으로 간주하고 있느냐 하는 점이다. "1 + 5 = 5 + 1"과 같이 숫자들만 등장하는 등식들과 이것들이 진리함수적 연결사(또는 그 일상언어적 표현)로 연결된 것들이 실제 명제로 간주되리라는 점은 분명하다.[14] 문제는 보편 양화사와 존재 양화사가 등장하는 명제들(과 그것들에 대한 일상언어적 표현들)인데, 스모린스키, 크라이젤, 지라르, 피퍼만(S, Feferman), 그리고 프라비츠(D. Prawitz) 등, 괴델의 관점을 따르고 있는 학자들은 거의 예외 없이 힐베르트가 보편 양화 명제를 실제 명제로, 또 유한적 명제로 파악했지만, 존재 양화 명제는 그렇지 않았다고 간주한다. 예컨대, 프라비츠에 따르면,

> 비록 존재 판단 '속성 P를 지니는 어떤 한 자연수가 존재한다'를 '우리는 속성 P를 지니는 어떤 한 자연수를 발견했다'를 뜻하는 것으로 유사하게 유한적으로 해석하는 것이 겐첸이 언급한 바와 같이 가능할지라도, 힐베르트는 존재 문장들을 이상적인 문장들로 간주했고, 그리하여 마찬가지로 보편 문장들의 부정문이나 보편 문장을 전건으로 지니는 함언의 형식을 지니는 문장들에 대해서도 그렇게 하였다. A에 양화사가 없을 때 항상 어떤 한 문장 $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$은 A'이 양화사를 지니지 않을 때 동치 문장 $\forall x A'(x)$로

---

14) 참조: Hilbert[1927], p.470.

> 대치될 수 있기 때문에, 우리는 요컨대, 실제 문장들은 결정 가능한 문장들을 포함하고 또 각각의 [대입]에 A(t)가 결정 가능할 때 $\forall$xA(x)의 형식들의 문장들을 포함한다고 말할 수 있다; 그 나머지는 이상적인 것이라고 간주된다.(Prawitz[1981], p.256)

그러나 우리에게 가장 먼저 떠오르는 의문은 매우 상식적인 것으로서, 과연 힐베르트가 그렇게 생각했을 것이냐 하는 점이다. 왜냐하면 상식적으로 우리는 보편 양화 문장과 존재 양화 문장이 그 말하는 바는 물론 각각 다르지만 그래도 그 성격은 일반 명제라는 점에서 유사한 측면을 공유하고 있다고 생각할 것이기 때문이다.

그런데 우리는 이러한 상식적 의문과 조응하는 힐베르트의 언급을 확인할 수 있다:

> 우리가 방금 내세웠던 동치문들을 고려해 보자. 무한한 수의 대상들에 대해서 보편 판단 (x)A(x)의 부정은 어떤 정확한 내용도 전혀 지니지 않는다; **마찬가지로 존재 판단 ($\exists$x)A(x)의 부정도 그러하다**. 확실하게도, 이들 부정은 어떤 상황에서는 의미가 있는데, 즉, 그 언명 (x)A(x)가 어떤 한 반례에 의해 논박되는 경우, 또는 (x)A(x)나 ($\exists$x)A(x)라는 가정으로부터 어떤 한 모순이 도출되는 경우가 그것이다. 그러나 이 경우들은 서로 모순되지 않는다; 왜냐하면 만일 A(x)가 모든 x에 대해 성립하는 것이 아니라면, 그렇다하더라도 우리는 속성 A-아님(not-A)을 지니는 어떤 한 대상이 실제로 존재한다는 것을 알지 못하기 때문이다; 더구나 우리는 단순히 다음과 같이 말할 수도 없다: (x)A(x)(또는 ($\exists$x)A(x))가 성립하거나 아니면 이들 주장은 실제로 어떤 한 모순에 이르게 된다. 유한한 총체들에 대해서는 '존재한다'(es gibt)와 '제시된다'(es liegt vor)는 동의적이다; 무한한 총체들에 대해서는, 오직 후자의 개념만이 그 자체로 명확할 뿐이다.(Hilbert[1923b], p.1140; 고딕체는 필자)

분명하게도 1923년에 발표된 이 인용문에서 힐베르트는 보편 명제뿐만 아니라 **존재 명제**에 대해서도 어떤 경우에는(즉, 무한한 수의 대상들에 관한 명제인 경우에는) 그 부정이 전혀 "어떤 정확한 내용도 지니지 않는다"고 명시적으로 말하고 있다. 더구나 그는 "어떤 상황에서는" 존재 명제의 부정뿐만 아니라 **보편 명제의 부정**도 의미가 있다고 간주하고 있다. 따라서 우리는 보편 언명은 실제 명제이고 반면에 존재 언명은 이상적 명

제라고 힐베르트가 간주했다는 견해에 대해, 우리의 의심이 정당할 수 있다는 가능성을 얻는다.[15] 뿐만 아니라, 위의 인용문의 마지막 문장에서 힐베르트는 무한에 관한 한, 가능 무한만이 명확한 의미를 지니며, 실무한은 전혀 어떤 의미도 지니지 않는다는 점을 강조하고 있다. 힐베르트의 이러한 언급은 대단히 중요한데, 왜냐하면 바로 이것이 그가 무한을 바라보는 기본적인 관점이며, 또 이러한 관점이 겐첸의 그것과 부합한다고 여겨지기 때문이다.

이제 위의 인용문에서 힐베르트가 두 가지 종류의 부정을 염두에 두고 있다는 점을 주목하자. 즉, 그는 보편언명의 경우 "(x)A(x)가 한 반례에 의해 논박되는 경우"와 "(x)A(x)라는 가정으로부터 어떤 한 모순이 도출되는 경우"를 나누고 있다. 이러한 구분은 1934년 출판된 『수학의 기초』 제 1 권에서 보다 더 구체적으로 서술되어 있는데, 여기에서 힐베르트는 전자의 경우의 부정을 "강한 부정"(verschärfte Negation)이라고 부르고 있고, 후자를 "모순적 반대"(kontradiktorische Gegenteil)라고 부르고 있다.

힐베르트는 『수학의 기초』 제 1 권[1934]에서 보편 언명과 존재 언명에 대해서 "유한적 의미의 부정"을 문제삼는다. 힐베르트는 보편 언명의 모순적 반대는 어떤 유한적 의미도 지니고 있지 않지만, 그것의 강한 부정

15) 그런데 이 인용문에는 어떤 문제가 있다. 힐베르트는 [1922]와 [1925]에서 내용을 전달하기 위한 기호(예컨대, a, b, ...)와 형식적 기호(예컨대, x, y, ...)를 구분했다. 그러나 이 논문[1923a, 1923b]에서는 오직 형식적 기호만 나올 뿐이다. 따라서, [1925]의 시각에 따른다면, 힐베르트는 (x)A(x)와 (∃x)A(x)뿐만 아니라 그 부정들도 모두 형식적 대상이고 이상적 대상이므로 의미가 없다고 말해야 할 것이다. 그렇게 되면 위의 인용문은 대부분 오류이고 설득력 없는 것이 되어 버린다. 반면에, 우리는 힐베르트가 위의 인용문에서 표현 "(x)A(x)"와 "(∃x)A(x)"를 통해 의도한 것은 결국 내용을 지니는 기호로 표현된 보편언명과 존재언명이라고 말할 수 있다. 오직 이렇게 파악될 때에만, 위의 인용문은 힐베르트가 "문제성 있는" 보편 언명을 다루는 관점과 부합할 것이며, 또 위의 인용문을 사소하게 거짓인 것으로 전락시키지 않을 것이다.

은 어떤 유한적 의미를 지닐 수 있다고 본다. 또한 그는 존재 언명의 부정에 대해서 다음과 같이 말한다:

> 먼저 존재 언명[의 부정]에 대해서 고찰해 보기로 하자. 속성 A(n)의 어떤 한 숫자 n이 존재하지 않는다는 것은, 대충 말하자면, 우리에게는 이 속성의 어떤 한 숫자(Ziffer)가 진술을 이루지 않는다는 파악으로 여겨질 수 있다. 그러나 그러한 파악은 그것이 우연적인 인식상황과 관련 있기 때문에 어떤 객관적인 의미도 지니지 않는다. 그러나 인식상황과 독립해서 속성 A(n)의 어떤 한 숫자 n의 비존재가 주장되어야 한다면, 그것은 어떤 한 숫자 n이 속성 A(n)을 지닐 수 없다는 것을 말하는 불가능성 판단을 통해서만 유한적 의미에서 제기될 수 있다.
>
> 따라서 우리는 [존재 언명의] 강한 부정에로 도달하게 된다. 그러나 이것은 "속성 A(n)의 어떤 한 숫자 n이 존재한다"라는 존재 주장, 즉 (부분판단으로서) 그 속성의 이미 알려진 한 숫자나 또는 그러한 숫자를 획득하기 위해서 우리가 지니고 있는 어떤 한 절차를 지시하는 존재 주장의 정확한 모순적 반대는 아니다.(Hilbert and Bernays[1934], p.33; 대괄호와 고딕체는 필자)

즉, 그는 존재 언명의 모순적 반대 또한 어떤 유한적, 객관적 의미도 지니지 않지만, 그 강한 부정을 생각할 수 있다고 주장하고 있는 것이다. 힐베르트에 따르면, 한 존재 언명과 그것의 강한 부정은 "두 가지 상이한 인식가능성에 상응하는데, 즉 한편으로는 어떤 한 주어진 속성의 어떤 한 숫자에 대한 발견의 인식가능성과, 다른 한편으로는 숫자들에 대한 보편 법칙에서의 통찰의 인식가능성이 그것이다."(Hilbert and Bernays[1934], p.33)

따라서 우리는 힐베르트가 보편 언명과 존재 언명의 어떤 차이를 강조하기 보다 오히려 그것들이 공유하는 성격에 더 주목한다는 것을 확인할 수 있다. 그리하여 우리는 이제 실제 명제와 이상적 명제의 경계선을 힐베르트가 보편 언명과 존재 언명 사이에서 찾았다는 견해가 문제가 있다는 쪽으로 기울게 된다. 그렇다면 그러한 견해를 가능하게 했던 근거란 무엇인가?

아마도 프라비츠와 스모린스키 등이 문헌적 증거로 내세우게 될 힐베르트의 언급은 다음과 같다:

> 마찬가지로 우리는 어떤 한 보편 언명, 즉, 임의의 숫자들에로 확장된 언명을 부정할 때 어떤 한 초한 명제와 만나게 된다. 따라서, 예를 들어, 만일 a가 한 숫자라면, 우리는 항상
>
> $$a + 1 = 1 + a$$
>
> 를 얻어야 한다는 명제는 유한주의자 관점으로부터는 부정될 수 없다.(Hilbert[1925], p.378)

분명하게도 힐베르트는 위의 보편 언명을 부정하면 초한 명제에로 이르게 된다고 말하고 있다. 이때 그 초한 명제는 존재 양화 문장일 것이므로, 그 초한 명제가 실제 명제가 될 수 없다면, 우리는 보편 언명은 실제 명제이고, 존재 언명은 이상적 명제라고 결론 내릴 수 있는 가능성을 얻는다. 그러나 문제는 위의 인용문에서의 "부정"이 어떤 것이냐 하는 점이다. 그것은 결국 "모순적 반대"일 수밖에 없는데, 왜냐하면 그 "강한 부정"은 힐베르트에 따르면 유한적으로 의미 있기 때문이다. 그런데 이 두 가지는 모두 그 외적인 형식으로 보면, 존재 명제로 표현된다. 그럼에도 불구하고 하나는 유한적으로 의미가 있지만, 다른 하나는 그렇지 않은 것이다.

따라서, 나는 힐베르트의 실제 명제와 이상적 명제(또는 유한적 명제와 비유한적 명제)의 구분의 경계선을 보편 명제와 존재 명제 사이에 두는 것은 힐베르트의 몇몇 중요한 언급과 상충하며, 또 중요한 어떤 언급들을 간과하는 처사라고 생각한다. 힐베르트의 그러한 구분의 기준은 명제들이 지니는 외적인 형식에 놓여 있지 않다. 보편 명제뿐만 아니라 존재 명제도 실제 명제일 수 있다. 그러나 그렇다면 어떻게 그럴 수 있는가?

겐첸의 구성주의적 해석에 따르면, 그러한 구분의 기준은 실무한에의 개입 여부, 또는 가능무한적 해석이냐 아니면 실무한적 해석이냐 하는 점에 있다. 겐첸은 보편 명제뿐만 아니라 존재 명제에 대해서도 "유한주의자 해석"을 부여할 수 있다고 주장하는데, 이 용어는 "구성주의적 해석"이라는 말과 동일하게 사용되고 있다. 그는 보편 명제의 의미를 유한주의적으로 해석하는 방법에 대해 다음과 같이 말한다:

> 그러한 명제들[보편 명제; 겐첸은 $\forall x(x = x)$를 그 예로 들고 있다—필자]은 의심의 여지없이 유의미하고 참이라고 간주될 것이다. 결국, 우리는 완결된

> 무한한 개수의 개별 명제들이라는 생각을 이 ∀와 결합시킬 필요는 없으며, 오히려 그것의 의미를 다음과 같이 '유한주의적으로' 해석할 수 있다: '만일 1로 시작해서, 우리가 x에 대해 연속적으로 자연수들을 대입시킨다면, 수들의 형성에서 아무리 우리가 멀리 나아간다 할지라도, 어떤 참 명제가 각각의 경우에 결과된다.'(Gentzen[1936], p.163)

마찬가지로, 겐첸은 존재 명제(또는 존재 양화 논리식)에 대해서도 다음과 같은 유한주의 해석을 제시한다.

> 우리는 ∃xF(x)의 형식을 지니는 명제에 대해서 어떤 의미를 허용해야 하는가? 속성 F를 지니는 어떤 한 수가 무한한 수열 어딘가에 존재한다는 실무한주의자(actualist) 해석은 우리에게는 의미가 없는 것이다. 반면에, 만일 어떤 확정적인 수 n에 대해서 명제 F(n)이 유의미하고 타당하다고 인정되었다면, 우리는 "∃xF(x)"라고 결론 내릴 수 있기를 바란다. 이 점에 대해서는 어떤 반대도 없다; 이제 명제 ∃xF(x)는, 우리가 속성 F를 지니는 어떤 한 수 n을 발견했다는 것—비록 이 수 자체가 더 이상 언급되지 않을지라도—을 그저 나타낸다는 점에서, 단지 명제 F(n)의 한 약화(weakening)(힐베르트에게는 '부분명제'(Partialaussage), 바일에게는 '판단의 추상'(Urteilsabstrakt))를 구성한다. 따라서, ∃xF(x)는 이러한 방식으로 유한주의자 의미를 획득한다.(Gentzen[1936], pp.164-5)

요컨대, 힐베르트에게 보편 명제 "a에 임의의 특정한 수가 대입될 수 있을 때, a+1 = 1+a"는 가능 무한적으로 이해되는 한에서 유의미한 실제 명제이다. 그러나 그것의 부정(즉 "모순적 반대")은 "실무한"을 염두에 두어야 한다. 그런 까닭에 그 부정은 유한주의자 관점에서는 의미를 상실한다(물론 그것의 "강한 부정"은 그렇지 않다). 또한 만일 그것이 형식화되고, 그리하여 (x)(x+1 = 1+x)가 실무한적으로 이해되면 그것은 (유한적) 의미를 상실하며, 이상적 명제이다. 이 점은 존재 명제에 대해서도 마찬가지이다. 존재 명제 "'a+1 = 1+a'를 만족하는 어떤 수 a가 존재한다"는 가능무한적으로 이해되는 한에서 유의미한 실제 명제이다. 그러나 그런 한에서 그것은 부정(즉, "모순적 반대")될 수 없다. 왜냐하면, 그 부정 문장은 "실무한"을 전제해야 하기 때문이다(물론 그 "강한 부정"은 그렇지 않다). 비록 그 부정 문장이 보편 양화 문장의 형식으로 되어 있을지라도 말이다.

## 5. 맺는 말

우리는 지금까지 힐베르트의 "유한주의"에 대한 철학적 해석의 몇 가지 가능성을 논구했다. 먼저 우리는 힐베르트의 언급을 바탕으로 그것의 여러 측면을 조명했다. 그리하여 나는 "유한주의"의 개념의 다의성을 "대상-유한주의", "절차-유한주의", "구성-유한주의"로 분석하였다. 그러나 나는 이를 통하여, 힐베르트가 (이 글에서 규정된 바) 그 각각을 명시적으로 규정하고 제시했다고 주장하고자 한 것은 아니었다. 오히려, 내가 의도했고 궁극적으로 강조하고자 했던 것은 힐베르트의 "유한주의"의 개념이 다의적이고 모호했다는 바로 그 사실이다.

사실상, 힐베르트의 "유한주의"의 개념이 모호했고, 그리하여 원래의 "힐베르트 프로그램"의 개념이 모호했다는 것은 진부한 얘기이며, 힐베르트의 프로그램에 대해 논의하는 학자라면 항상 거론하는 것이기도 하다.[16] 이를 우리가 "원래의 HP의 모호성 논제"라고 부른다면, 이 논제는 우리로 하여금 HP로 얽힌 사태를 보다 더 투명하게 바라보는 데 기여할 것이다. 무엇보다도, 우리는 "유한주의"에 대한 철학적 해석의 중요성을 인식하게 되며, 그리하여 괴델의 "특수한 유한주의"적 해석과 겐첸의 "구성주의적 해석"의 의의를 보게 된다. 뿐만 아니라, 우리는 그 모호성의 성격이 구체적으로 어떠하냐 하는 점을 문제 삼을 수 있다. 또한, 그 논제를 통해서, 모호한 계획의 어떤 실행 방법을 엄밀하게 선별했느냐의 여부에 따라 "세련된 논박설"과 "소박한 논박설"을 구분할 수 있다.

그런데, "유한주의"의 모호성은 그 개념이 힐베르트 자신에 의해서 명료하게 규정되지 않았다는 사실, 또 그러한 상태에서 산발적으로 다의적으로 사용되었다는 사실에만 기인하는 것은 아니다. 오히려, 여기에는 힐베르트 자신의 어떤 적극적인 이유도 있었다고 보인다. 힐베르트가 자신의 주저

16) 참조: Gödel[1972], p.273; Gentzen[1936], p.194; Smorynski[1977], p.823; Kreisel[1958], p.210, p.225; Simpson[1988], pp.351-2.

『수학의 기초』 제 2 권[1939]에서 언급한 것을 살펴보자.

> 이 물음은 물론 (...) 정확하지 않다. 왜냐하면 우리는 "유한적(finit)"이라는 표현을 정확하게 경계 지워진 용어로서 도입했다기 보다는, 오히려 다만 우리로 하여금 어떤 개념형성과 추론의 방법들을 명확하게 유한적인 것으로, 그리고 어떤 다른 것을 명확하게 비유한적인 것으로 인식하는 것을 가능하게 하는, 하지만 그럼에도 불구하고 유한적 방법의 요구조건들을 만족하는 것과 그렇지 않는 것들간의 어떤 엄밀한 경계선도 주어지지 않은, **방법적 지침을 지시하는 것으로서**(als Bezeichnung einer methodischen Richtlinie) 도입되었기 때문이다.(Hilbert and Bernays[1939], pp.347-348; 고딕체는 필자)

힐베르트의 지적과 같이, "유한적(유한주의)"이라는 표현이 미리부터 엄밀하게 규정된 개념이 아니라 오히려 "**방법적 지침을 지시하는**" 개념으로서 도입된 것이라면, 그런 한에서 그 개념은 이중적인 성격을 지니게 될 것이다. 즉 한편으로 그것은 수리논리학이나 메타수학을 실제로 수행하는 과정에서는 메타수학적인 개념으로 작용할 것이며, 다른 한편으로는 여전히 어떤 철학적 해석이 요구된다는 점에서 철학적인 개념으로 작용할 것이다.

우리는 그러한 철학적 해석의 견지에서, 괴델의 "특수한 유한주의"적 해석이 대상-유한주의의 측면을, 그리고 겐첸의 구성주의적 해석이 구성-유한주의의 측면을 대변하고 있다는 점을 확인하였다. 그것들은 철학적 해석이라는 견지에서는 서로 동등하게 경합적이다. 뿐만 아니라, 나는 후자가 전자보다 어떤 점에서는 더 정당한 해석이라는 것을 보이고자 하였는데, 요약하자면, 힐베르트의 사유는 "대상-유한주의"만으로는 해명하기 어려운 부분을 포함하고 있으며(특히 "대상-유한주의"의 입장은 힐베르트의 중요한 몇몇 언급과 상충하거나 그런 언급들을 간과한다고 여겨지며), 그러한 부분에 대해서 겐첸의 구성주의적 해석이 더 적절하다는 것이다.[17]

---

17) 참조: Takeuti, G.[1987], p.101. 여기에서 타케우티는 "유한주의"를 "순수한 유한주의"와 "힐베르트-겐첸 유한주의"로 구분하고서, 후자를 옹호하고 있다. 이때, 전자는 대상-유한주의에 가깝고, 후자는 구성-유한주의에 가깝다.

이 점을 보이는 것은, 사실상, HP의 (부분적) 실현가능성과 반논박설을 적극적으로 옹호하는 것이기도 하다.

## 참고문헌

모리스 클라인[1984], 『수학의 확실성』(Kline, M.[1980], *Mathematics: The Loss of Certainty*), 박세희 옮김, 민음사.

박정일[1999], 「힐베르트의 프로그램에 관하여 I」, 『철학』, 1999년 여름, 한국철학회, 249-278쪽.

-----[2000], 「힐베르트 프로그램과 구성주의적 해석」, 박사학위논문, 서울대학교.

최병일[1997], 「역수학 계획에서 힐버트 계획으로: 힐버트의 실증주의적 수리 철학」, 『논리 연구』, 제 1 집, 한국논리학회, 1997, 95-115쪽.

콘스탄스 리드[1989], 『힐버트: 수학과 삶』(Reid, C.[1969], *Hilbert*), 이일해 옮김, 민음사.

Barwise, J.[1977], (ed.) *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland Publishing Co., New York.

Benacerraf, P. and Putnam, H.[1983], ed., *Philosophy of Mathematics*, Cambridge U. P..

Bernays, P.[1935], "Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik", in Hilbert[1935], pp.196-216.

---------[1967], "Hilbert", David, in *Encyclopedia of Philosophy*, ed. P. Edwards, vol. 3, Macmillan and Free Press, New York, pp. 496-504.

Ewald, W. B.[1996], *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, vol. 2, Clarendon Press, Oxford.

Feferman, S.[1998], *In the Light of Logic*, Oxford U. P., Oxford.

Gentzen, G.[1936], "The Consistency of Elementary Number Theory", in Szabo[1969], pp.132-201.

----------[1936-37], "The Concept of Infinity in Mathematics", in

Szabo[1969], pp. 223-233.

----------[1938], "The present state of research into the foundations of mathematics", in Szabo[1969] pp.234-251.

Girard, J. Y.[1987], *Proof Theory and Logical Complexity,* vol. I, Bibliopolis.

Gödel, K.[1931], "On formally undecidable propositions of Principia mathematica and related systems I", in van Heijenoort [1967], pp.595-617.

--------[1958], "On a hitherto unutilized extension of the finitary standpoint", in Gödel[1990], pp.241-251.

--------[1972], "On an extension of finitary mathematics which has not yet been used", in Gödel[1990], pp.271-280.

--------[1990], *Collected Works,* vol. II, Oxford U. P..

Hilbert, D. [1901], "Mathematische Probleme", pp.290-329, in Hilbert [1935].

--------[1904], "On the foundations of logic and arithmetic", pp.129-138, in van Heijenoort[1967].

--------[1922], "Neubegründung der Mathematik", in Hilbert, [1935], pp. 157-177.

--------[1923a], "Die logische Grundlagen der Mathematik", in Hilbert[1935], pp.178-191.

--------[1923b], "Foundations of Mathematics", in Ewald[1996], pp. 1134-1148.

--------[1925], "On the Infinite", pp. 369-392, in van Heijenoort [1967].

--------[1927], "The foundations of Mathematics", in van Heijenoort[1967], pp.464-479.

--------[1931], "Die Grundlegung der elementare Zahlenlehre", [Hilbert, 1935], pp.192-195.

--------[1935], *Gesammelte Abhandlungen,* reprinted, 1965, Chelsea Pb. Co., New York.

Hilbert, D. and Bernays, P.[1934], *Grundlagen der Mathematik,* vol. I, Berlin: Springer.

----------------------[1939], *Grundlagen der Mathematik,* vol. II, Berlin: Springer.

Kreisel, G.[1958], "Hilbert's programme", Benacerraf and Putnam [1983].

Prawitz, D.[1981], "Philosophical aspects of proof theory", in *Contemporary Philosophy,* vol.1, pp.235-277, ed. Guttorm Fløistad, Martinus Nijhoff Publishers, Hague.

Sieg, W.[1984], "Foundation for Analysis and Proof Theory", *Synthese* 60, pp.159-200.

Simpson, S. G.[1988], "Partial Realization of Hilbert's Program", *The Journal of Symbolic Logic,* vol. 53, number 2, June 1988, pp.349-363.

Smorynski, C.[1977], "The Incompleteness Theorems", in Barwise [1977], pp.821-865.

Szabo, M. E.[1969], (ed.) *The Collected Papers of Gerhard Gentzen,* North-Holland Pb. Co..

Takeuti, G.[1987], *Proof Theory,* North-Holland, Pb. Co., 2nd. ed..

van Heijenoort, J.[1967], ed., *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931,* Cambridge: Harvard U. P..