

## 불확실성을 갖는 단일입출력 시스템에 대한 TDC의 안정성/강인성 해석

### Stability/Robustness of TDC for SISO Systems with Significant Unmodelled Dynamics

이 정 완\*  
Lee, Jeong Wan

#### Abstract

Time Delay Control (TDC) method was proposed as a promising technique in the robust control area, where the plants have unknown dynamics with parameter variations and substantial disturbances are present. In this paper, based on the concepts of TDC, author propose a model reference control method for input/output model. The stability and robustness of the closed system has been analyzed for a class of linear time invariant (LTI) systems. Then, in a simulation study, author's design method has been applied to a second order system, the result of which confirmed that the proposed control method performs satisfactorily as predicted.

키워드 : 시간지연제어기법, 강인 안정성  
Keywords : Time delay control, Robust stability

#### 1. 서론

제어이론에서 기준 모델을 선정한 다음 제어기를 설계하는 방법 (model reference control: MRC)은 다양하게 사용되고 있다. 기준 모델은 우리가 원하는 플랜트의 응답을 나타내는 것뿐만 아니라, 제어를 통하여 얻을 가능성 있는 성능을 나타낸다. 지금까지 연구된 MRC의 방법으로 가장 잘 알려진 것은 적응제어 기법을 이용한 MRAC (model reference adaptive control) 방법 [1,2], 가변구조 제어기법을 이용한 MRVSC (model reference variable structure control) 방법 [3,4] 등이 있다.

MRC의 하나의 방법으로 시간 지연 제어 기법 (Time delay control; TDC) [5-10]이 제안되었는

데, TDC 제어 기법은 모델을 정확하게 모르는 플랜트에 대하여, 시간 지연 추정 방법을 사용하여 제어기를 설계하는 방법으로, 지금까지의 연구 결과 외란과 매개 변수의 변동에 대하여 강인한 제어 성능을 보이고 있다.

TDC에 대한 연구 현황은 다음과 같다. 원래의 TDC는 매칭조건 (matching condition)을 만족하는 잘 모르는 비선형 계에 대하여, 상태 변수 궤환을 하고, 입력과 상태 변수 미분치의 시간 지연된 양에 의한 시간 지연 추정을 사용하는 제어 알고리즘이었다 [5]. 원래의 TDC 알고리즘을 로봇과 서보 계에 적용한 결과 외란과 큰 매개 변수 변동에 대하여 매우 만족한 성능을 보이고 있다 [6,7]. Youcef-Toumi와 Wu의 논문[8]에서는 불확실한 비선형 계에 대하여, TDC를 이용하여 입출력 선형화 방법을 제안하였다. 이 방법은 적응 제어 기법에 의한 입출력 선형화 방법과 비교했을 때, 불확실한 비선형 동역학의 함수적 형태를 몰라도 된

\* 강원대학교 기계·메카트로닉스 공학부 전임 강사, 공학박사

다는 장점을 지니고 있고, TDC의 구현의 관점에서 보았을 때, 전체 상태 변수와 그 미분치의 측정이 필요 없고 단지 출력의 상대 차수 만큼의 미분치의 측정만으로도 TDC 알고리즘을 구현할 수 있다는 장점을 지니고 있다. 또한, 같은 논문에서는 저주파 통과 필터를 사용하는 변형된 TDC 제어를 제안하고 해석하였다.

TDC 제어계의 안정성의 해석은, TDC 제어계가 시간 지연을 내부적으로 갖는 구조를 갖기 때문에 쉽지 않다. 원래의 알고리즘에 대한 안정성의 결과로서, [9]의 논문에서는 선형 SISO 계에서의 TDC 제어계의 안정성을 위한 필요 충분조건을 구했고 오차의 수렴성에 대하여 해석하였다. [10]에서는 불확실한 선형 SISO 계에 대한 TDC 제어계의 안정성의 충분 조건을 나이퀴스트(Nyquist) 판별법과 카리토노프(Karitonov) 법칙을 이용하여 구했다.

TDC 제어계의 강인성에 대한 연구는 지금까지 그리 많지 않았다. Liang과 Looze [11]는 2차 선형 SISO 서보계에 대하여, 원래의 TDC 알고리즘의 강인성과 센서 잡음에 대한 민감성을 해석을 하였는데, 그 결과 PD 제어 기법과 비교했을 때 외란에 대한 성능은 매우 좋으나, 강인 안정성과 센서 잡음에 대한 민감성이 더 나쁠을 보였다. 그러나 이 해석은 원래의 TDC 알고리즘에 대한 해석으로 저주파 통과 필터를 사용한 변형된 TDC 알고리즘과 콘볼루션 방법에 의한 TDC 알고리즘의 경우는 다르며, 그에 대한 해석은 필요하다.

존재하는 제어기 설계 방법들은 크게 상태 공간 모델에서의 제어기 설계 방법과, 입출력 모델에서의 제어기 설계 방법의 두가지 종류로 분류할 수 있다. 상태 공간 모델에서의 제어기 설계는 이론적으로 더 좋은 성능과 안정성을 얻을 수 있지만, 실제의 구현상에서는 입출력 모델에서의 제어기 설계 방법이 플랜트의 내부적 정보를 깊이 있게 알 필요가 없다는 점과 케환되는 신호가 출력만으로도 충분하다는 점의 장점을 지니고 있다. 지금까지의 TDC의 설계 방법은, 모두 상태 공간 모델에서의 제어기 설계 방법이었다. 이러한 제어기의 설계 방법을 통하면, 모든 상태 변수가 기준 모델 추종을 하게 제어기를 설계할 수 있지만, 실제의 경우에는 출력만이 기준 모델 추종만으로도 충분하다. 또한 상태 공간 모델에서 TDC 제어기를 설계하게 되면 완전한 모델 추종을 위하여, 매칭 조건이라는 구조적인 조건이 만족되어야 한다. 반면에, 입출력 모델에서 TDC 제어기를 설계하게 되면 구조적 조건은 필요하지 않게 되는 장점도 지니고 있다. 그래서 입출력 모델에서의 TDC 제어계의 설계 방법에 관한 연구는 가치있는 것이다.

이러한 배경하에서, 본 논문에서는, 잘 알려지지 않은 입출력 선형 모델에 대하여, 원래의 TDC 알

고리즘과 저주파 통과 필터에 의한 변형된 TDC 알고리즘에 의한 MRC 설계 방법을 유도할 것이다. 그 다음, 각각의 알고리즘의 안정성의 조건들을 해석하고, 계의 다양한 불확실성에 대한 강인 안정성을 해석할 것이다. 이러한 해석들을 통하여, Liang과 Looze가 제기한 원래의 TDC 알고리즘이 갖는 강인성과 센서 잡음에 관한 민감성의 문제점에 대한 해결책에 대하여 논의할 것이다.

## 2. 입출력 모델에서의 MRTDC 제어

### 2.1 문제 설정

본 논문에서는 공칭 플랜트가 선형 시불변 단일 입출력 계로 국한하여 MRTDC 제어기 설계를 논의한다. 고려하는 플랜트는 Fig. 1과 같고, 전달 함수 모델은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$y(t) = G_p(s) [1 + \Delta G(s)] [u(t) + \xi(t)] \quad (1)$$

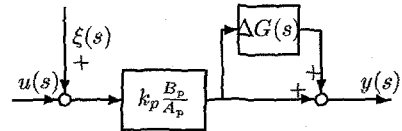


Fig. 1 Plant model

여기서  $s$ 는 라플라스 변환의 미분 오퍼레이터,  $y(t)$ 는 출력,  $u(t)$ 는 제어 입력 그리고 공칭 플랜트의 전달 함수  $G_p(s)$ 는 다음과 같다.

$$G_p(s) = k_p \frac{s^m + b_{p1}s^{m-1} + \dots + b_{pm}}{s^n + a_{p1}s^{n-1} + \dots + a_{pn}} = k_p \frac{B_p(s)}{A_p(s)}$$

전달 함수  $\Delta G(s)$ 는 입력과 연관된 곱셈형 불확실성을 나타내며,  $\xi(t)$ 는 외란 형태의 불확실성을 나타낸다. 그리고  $n > m$ 이다.

제어 대상인 플랜트에 대하여 다음과 같은 가정을 한다.

**가정 1)**  $\Delta G(s)$ 의 내부와  $A_p(s)$ 와  $B_p(s)$ 의 내부에 불안정한 극점-영점 상쇄는 없고, 각각의 매개 변수들의 값은 몰라도 된다.

**가정 2)**  $n$ 과  $m$ 은 유한하지만, 알려지지 않아도 된다. 그러나, 상대 차수  $r = n - m \geq 0$ 은 임의의 알려진 값이다. 또한 일반성의 손실 없이,  $k_p$ 의 부호는 양이다.

가정3) 계는 최소 위상 계이다. 즉  $B_p(s)=0$ 의 해와  $1+\Delta G(s)=0$ 의 해가  $s$ -평면의 좌평면 위에 있다.

가정4)  $\xi(t)$ 는 연속함수이다.

본 논문의 제어 목적은 정해진 기준 모델을 따라가게 하는 것이다. 즉, 한계된 어떠한 기준 입력  $r(t)$ 에 대하여 플랜트인 식 (1)의 출력  $y(t)$ 가, 불확실성인  $\xi(t)$ 와  $\Delta G(s)$ 가 존재하는 상황에서, 기준 모델의 출력  $y_m(t)$ 를 정밀하게 추종하게 하는 것이다.  $y_m(s)$ 와  $r(s)$ 를 각각  $y_m(t)$ 와  $r(t)$ 의 라플라스 변환으로 놓고, 기준 모델을 다음과 같이 정의한다.

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{k_m}{s^r + a_{m1}s^{r-1} + \dots + a_{mr}} \quad (2)$$

$$= k_m \frac{B_m(s)}{A_m(s)} = G_m(s)$$

여기서  $k_m$ 은 0보다 크고, 다항식  $A_m(s)$ 는 Hurwitz 다항식이다.

## 2.2 원래의 MRTDC 알고리즘

일반성의 손실없이, 식 (1)은  $\Delta G(s)=0$ 인 경우, 시간 영역에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$s^r y(t) = k_p u(t) + \phi(t) \quad (3)$$

여기서,

$$\phi(t) = -(a_{p1}s^{r-1} + a_{p2}s^{r-2} + \dots + a_{pm}/s^m)y(t) + k_p(b_{p1}/s + b_{p2}/s^2 + \dots + b_{pm}/s^m)[u(t) + \xi(t)]$$

TDC를 이용한 MRC의 제어 목적은, 위에서 언급했듯이, 플랜트의 출력  $y(t)$ 가 식 (2)의 기준 모델을 따라가게 하는 것으로, 다음과 같이 되기를 원하는 것이다.

$$(s^r + a_{m1}s^{r-1} + \dots + a_{mr})y(t) = k_m r(t) \quad (4)$$

완전한 기준 모델 추종을 얻기 위해서는, 식 (3)과 식 (4)의 관계로부터 제어 법칙이 다음과 같아야 한다.

$$u(t) = \frac{1}{k_p} [-K(s)y(t) + k_m r(t) - \phi(t)] \quad (5)$$

$$K(s) = (a_{m1}s^{r-1} + \dots + a_{mr})$$

만약, 플랜트의 모델이 잘 알려진 경우에는,

$\phi(t)$ 를 정확하게 구할 수 있기 때문에 완전한 기준 모델 추종을 얻을 수 있다. 그러나 우리가 설정한 문제의 경우에는, 플랜트의 상대 차수만을 알고 매개 변수의 값은 모르는 경우이기 때문에  $\phi(t)$ 를 정확히 구할 수 없고, 이로 인하여 식 (5)에 의한 완전한 기준 모델 추종을 얻는 것은 어렵게 된다. MRTDC는  $\phi(t)$ 를 잘 모르는 상황에서 기준 모델 추종을 얻기 위한 제어 알고리즘으로 아래의 과정과 같은 시간 지연 추정을 사용한다.

식 (3)으로부터 시간 지연  $L$ 이 충분히 작다면, 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(t) &= s^r y(t) - k_p u(t) \\ &\approx s^r y(t-L) - k_p u(t-L) \end{aligned}$$

$k_p$ 의 추정값  $\hat{k}_p$ 를 사용하면 위식으로부터 다음과 같은 최종적인 원래의 알고리즘에 의한 MRTDC 제어 법칙이 얻어지고 블록 선도는 Fig.2와 같다.

$$u(t) = u(t-L) + \frac{1}{\hat{k}_p} [-s^r y(t-L) - K(s)y(t) + k_m r(t)] \quad (6)$$

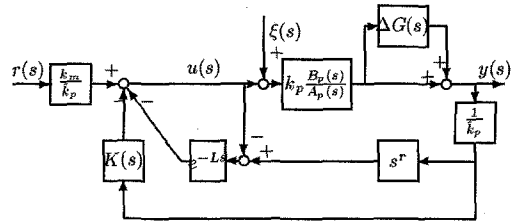


Fig. 2 Block diagram of original MRTDC system

## 2.3 변형된 MRTDC 알고리즘

일반적으로, 저주파 통과 필터는 제어계에서 고주파의 잡음을 제거하기 위하여 사용되고 있다. 변형된 MRTDC 알고리즘은 원래의 MRTDC 알고리즘에 저주파 통과 필터를 사용한 것으로, 그 구조는 Fig. 3와 같고, 이로 부터 제어 법칙은 다음과 같이 얻어진다.

$$u'(t) = u(t-L) + \frac{1}{\hat{k}_p} [-s^r y(t-L) - K(s)y(t) + k_m r(t)]$$

$$u(t) = \frac{\lambda}{s+\lambda} u'(t) \quad (7)$$

이로 부터 최종적인 변형된 MRTDC 제어 법칙은 다음과 같다.

$$u(t) = \frac{\lambda}{s+\lambda} u(t-L) + \frac{\lambda}{s+\lambda} \frac{1}{\hat{k}_p} \{ -[s^r e^{-Ls} + K(s)]y(t) + k_{mr}(t) \} \quad (8)$$

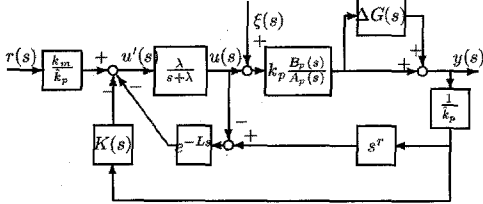


Fig.3 Block diagram of modified MRTDC system

### 3. 공칭 플랜트 모델에서의 제어

본 절에서는 입력에 관한 곱셈형 불확실성이 존재하지 않는 상황 ( $\Delta G(s)=0$ )에서, 2절에서 유도된 두가지 MRTDC 제어계의 안정성과 명령 추종 성능을 해석한다.

첫 번째로, 원래의 MRTDC 알고리즘의 안정성과 명령 추종 성능을 알아보기 위하여, 식 (6)을 라플라스 변환하면 다음과 같다.

$$u(s) = \frac{1}{\hat{k}_p(1-e^{-Ls})} \{ -[s^r e^{-Ls} + K(s)]y(s) + k_{mr}(s) \} \quad (9)$$

식 (9)의 제어 법칙을 공칭 플랜트인 식 (1)에 대입하면, 전체 계의  $r(s)$ 와  $y(s)$  사이의 전달함수는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{r(s)} \Big|_{\xi(t)=\Delta G(s)=0} &= \frac{1}{1 + \frac{\hat{k}_p A_p(s) - k_p B_p(s)s^r}{k_p B_p(s)A_m(s)} (1 - e^{-Ls})} \\ &= G_m(s) \frac{1}{1 + H_1(s)} = G_m(s) \alpha_1(s) \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)은 원래의 MRTDC 알고리즘의 명령 추종 성능을 나타낸다. 식 (10)에서 보듯이, 모델의 입력에 관한 불확실성이 존재하지 않는 상황에서의 원래의 MRTDC 제어기에는, 시간 지연  $L$ 을 거의 0에 가깝게 하면  $e^{-Ls} \approx 1$ 과  $H_1(s) \approx 0$ 이 되어  $\frac{y(s)}{r(s)} \approx G_m(s)$ 가 되게 한다. 그리고,  $L=0$ 인 경우에는 완전한 기준 모델 추종을 얻을 수 있다.

$L=0$ 는 실제적으로 구현이 불가능하지만  $L$ 을 충분히 작게 하여 구현하면 근사적으로 원하는 성능에 가까이 가게 할 수 있으며,  $L$ 이 커짐에 따라 완전한 모델 추종 성능으로부터 벗어나게 된다.

안정성의 해석은 식 (10)을 통하여 할 수 있다.  $G_m(s)$ 는 안정한 전달 함수이기 때문에 우리는  $\alpha_1(s)$ 만을 고려하면 된다. 이로부터 안정성의 필요 충분 조건은 다음의 Theorem 1으로 정리될 수 있다.

**Theorem 1:** 시간 지연  $L \neq 0$ 이고,  $\Delta G(s)=0$ 일 때, 원래의 MRTDC 제어계는 만약 다음의 특성방정식의 근이 좌평면에 있으면 안정하다.

$$1 + H_1(s) = 0 \quad (11)$$

그리고 원래의 MRTDC 계가 안정하면 식 (11)의 근은 좌평면에 있다.

두 번째로, 변형된 MRTDC 알고리즘의 안정성과 명령 추종 성능을 알아보기 위하여 식 (8)을 라플라스 변환하면 다음과 같다.

$$u(s) = \frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{\hat{k}_p(1 - \frac{\lambda}{s+\lambda} e^{-Ls})} \{ -[s^r e^{-Ls} + K(s)]y(s) + k_{mr}(s) \} \quad (12)$$

식 (12)의 제어 법칙을 공칭 플랜트인 식 (2)에 대입하면, 전체 계의  $r(s)$ 와  $y(s)$  사이의 전달함수는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{r(s)} \Big|_{\xi(t)=\Delta G(s)=0} &= \frac{1}{1 + \frac{\hat{k}_p A_p(s) - k_p B_p(s)\lambda s + \lambda s^r}{k_p B_p(s)A_m(s)} (1 - \frac{\lambda}{s+\lambda} e^{-Ls}) \frac{\lambda}{s+\lambda}} \\ &= G_m(s) \frac{1}{1 + H_2(s)} = G_m(s) \alpha_2(s) \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)은 변형된 MRTDC 알고리즘의 명령 추종 성능을 나타낸다. 식 (13)에서 보듯이, 모델의 입력에 관한 불확실성이 존재하지 않는 상황에서의 변형된 MRTDC 제어계는, 시간 지연  $L$ 을 거의 0에 가깝게 하고  $\lambda$ 의 값을 매우 충분히 크게 하면,  $e^{-Ls} \approx 1$ 과  $\frac{s}{\lambda} \approx 0$ 가 되어 식 (13)의 전달함수를

$\frac{y(s)}{r(s)} \approx G_m(s)$ 가 되게 한다. 그리고,  $L=0$ 이고  $\lambda = \infty$ 인 경우에는 완전한 모델 추종을 얻을 수 있다.  $L=0$ 는 실제적으로 구현이 불가능하지만,  $L$ 을 충분히 작게 하고  $\lambda$ 의 값을 충분히 크게 구현하면 근사적으로 원하는 성능에 가까이 가게 할

수 있다. 또한,  $L$ 이 크게 됨에 따라, 그리고  $\lambda$ 가 작게 됨에 따라 완전한 기준 모델 추종 성능으로부터 벗어나게 된다.

안정성의 해석은 식 (13)을 통하여 할 수 있는데,  $G_m(s)$ 는 안정한 전달 함수이기 때문에 우리는  $\alpha_2(s)$ 만을 고려하면 된다. 이로 부터 안정성의 필요 충분 조건은 다음의 Theorem 2로 정리될 수 있다.

**Theorem 2:** 시간 지연  $L \neq 0$ 이고,  $\Delta G(s) = 0$ 일 때, 변형된 MRTDC 제어기는 만약 다음의 특성 방정식의 근이 좌평면에 있으면 안정하다.

$$1 + H_2(s) = 0 \quad (14)$$

그리고, 변형된 MRTDC 계가 안정하면 식 (14)의 근은 좌평면에 있다.

#### 4. 강인 안정성 해석

본 절에서는 플랜트의 모델링되지 못한 입력에 관한 곱셈형 불확실성이 존재하는 경우 ( $\Delta G(s) \neq 0$ )의 강인 안정성을 해석한다. 본 절의 해석 방법은 강인 안정성 해석에 널리 사용되고 있는 저 이득 정리 (small gain theorem) [12,13]을 사용한다. 저 이득 정리를 요약하면 다음과 같다.

먼저  $\Delta G(s)$ 가 주파수 영역에서 다음과 같은 크기의 한계를 갖는다고 가정한다.

$$|\Delta G(jw)| \leq l_m(w) \quad (15)$$

Fig. 4의 블록 선도는 불확실성이 존재하는 상황에서 일반적인 제어계를 표현한 것으로 MRTDC 계도 이와 같이 표현할 수 있다. 약간의 전개 과정을 통하면, Fig. 5의 블록 선도는 Fig. 5의 블록 선도와 같이 변환될 수 있다. 여기서,  $F(s)$ 는 공칭 안정성 전달 함수로 다음과 같다.

$$F(s) = \frac{G_p(s)C(s)}{1 + G_p(s)C(s)} \quad (16)$$

공칭 플랜트  $G_p(s)$ 에 대하여 공칭계환  $C(s)$ 에 의한 공칭 제어계는 안정하기 때문에,  $F(s)$ 는 안정하다고 가정할 수 있다. 저 이득 정리는 안정한 공칭 제어계에 대하여 어떠한 안정한 불확실성  $\Delta G(s)$ 가 존재할 때 강인 안정성을 보장하기 위한 조건에 관한 정리로, 강인 안정성을 보장하기 위한 충분 조건은 다음과 같다[12].

$$|F(jw)\Delta G(jw)| < 1, \forall w \in [0, \infty) \quad (17)$$

또한 위 식을 결합하면 Fig. 5의 계가 안정하기 위한 충분 조건으로 다음과 같은 조건이 나온다.

$$|F(jw)| < \frac{1}{l_m(jw)}, \forall w \in [0, \infty) \quad (18)$$

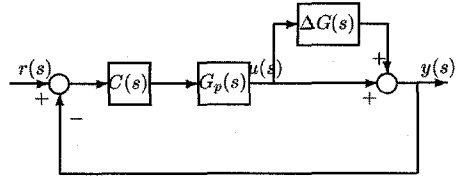


Fig. 4 The MRTDC architecture with plant uncertainty

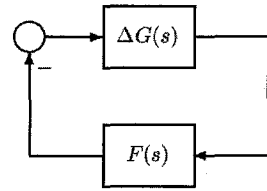


Fig. 5 Robust stability analysis system

첫 번째로 원래의 MRTDC 알고리즘의 강인 안정성의 조건을 구하기 위하여, 등가적인 안정성 전달 함수  $F_1(s)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$F_1(s) = \frac{G_p(s)K_{fb}(s)}{1 + G_p(s)K_{fb}(s)} \quad (19)$$

여기서,  $K_{fb}$ 는 식 (9)로부터 다음과 같이 유도된다.

$$K_{fb} = \frac{K(s) + s^r e^{-Ls}}{k_p(1 - e^{-Ls})} \quad (20)$$

식 (18)의 조건으로부터, 원래의 MRTDC 알고리즘이 강인 안정성을 보장하기 위한 조건은 다음의 Theorem 3로 정리된다.

**Theorem 3:** 원래의 MRTDC 알고리즘을 사용

하였을 경우, 안정한 불확실성  $\Delta G(s)$ 에 대하여 다음의 조건을 만족하면 강인 안정성을 보장한다.

$$\left| \frac{\frac{1}{\hat{k}_p} G_p(jw)[K(jw) + (jw)^r e^{-Ljw}]}{(1 - e^{-Ljw}) + \frac{1}{\hat{k}_p} G_p(jw)[K(jw) + (jw)^r e^{-Ljw}]} \right| < \left| \frac{1}{\Delta G(jw)} \right|, \forall w \in [0, \infty) \quad (21)$$

Theorem 3의 조건식 (21)의 좌항은  $w = 2\pi k/L$ 에서 좌변은 항상 1이 된다. 결국 곱셈형 불확실성은 다음과 같은 조건을 만족하여야, 원래의 MRTDC 제어계는 강인 안정성을 보장하게 된다.

$$|\Delta G(jw)| < 1 \quad \forall w \in [0, \infty) \quad (22)$$

식 (22)로 부터, 원래의 MRTDC 알고리즘은 강인 안정성을 보장하는 곱셈형 불확실성의 범위에 있어서 저주파와 고주파의 모든 영역에서  $\Delta G(jw)$ 가 1보다 작아야한다는 제약이 있음을 알 수 있다.

두번째로 변형된 MRTDC 알고리즘의 경우에는 등가적인 안정성 전달 함수  $F_2(s)$ 는 다음과 같다.

$$F_2(s) = \frac{G_p(s)K_{fbc}(s)}{1 + G_p(s)K_{fbc}(s)} \quad (23)$$

여기서,  $K_{fbc}$ 는 식 (12)로 부터 다음과 같이 유도 된다.

$$K_{fbc} = \frac{1}{\hat{k}_p} \frac{\lambda}{s + \lambda} \frac{K(s) + s^r e^{-Ls}}{1 - \frac{\lambda}{s + \lambda} e^{-Ls}} \quad (24)$$

식 (24)의 조건으로 부터, 변형된 MRTDC 알고리즘이 강인 안정성을 보장하기 위한 조건은 다음의 Theorem 4로 정리된다.

**Theorem 4:** 변형된 MRTDC 알고리즘을 사용하였을 경우 안정한 불확실성  $\Delta G(s)$ 에 대하여 다음의 조건을 만족하면 강인 안정성을 보장한다.

$$\left| \frac{\frac{1}{\hat{k}_p} G_p(jw)[K(jw) + (jw)^r e^{-Ljw}]}{(\frac{jw + \lambda}{\lambda} - e^{-Ljw}) + \frac{1}{\hat{k}_p} G_p(jw)[K(jw) + (jw)^r e^{-Ljw}]} \right| < \left| \frac{1}{\Delta G(jw)} \right|, \forall w \in [0, \infty) \quad (25)$$

위 Theorem 4의 조건식 (25)의 좌항은  $w$ 가 저주파인 경우에는 거의 1인 값을 갖게 된다. 그리고,  $w$ 가 고주파인 경우에는, 플랜 상대 차수가  $r$ 이기 때문에  $w = 2\pi k/L$ 에서 좌변은 거의

$$\left| \frac{\frac{k_p}{\hat{k}_p} \lambda}{jw + \frac{k_p}{\hat{k}_p} \lambda} \right| \text{가 된다. 즉 } w \text{가 저주파인 경우에}$$

는 원래의 MRTDC 알고리즘에서와 같이 식 (18)의 조건을 만족하고,  $w$ 가 고주파인 경우에는 근사적으로, 곱셈형 불확실성이 다음과 같은 조건을 만족하게 되면, 변형된 MRTDC 제어계는 강인 안정성을 보장하게 된다.

$$|\Delta G(jw)| < \left| \frac{jw + (\frac{k_p}{\hat{k}_p})\lambda}{(\frac{k_p}{\hat{k}_p})\lambda} \right| \quad (26)$$

위와 같은 조건은 원래의 MRTDC 알고리즘이 갖는 곱셈형 불확실성에 대한 제약성에 대한 문제점을 해결할 수 있음을 나타낸다.

## 5. 예제 및 모의 실험

본 절에서는, 예제를 통한 모의 실험으로 각각의 MRTDC의 효용성을 알아 본다. 플랜트의 모델은  $G_p(s)[1 + \Delta G(s)]$ 로 표현되고, 공칭 플랜트 모델이 다음과 같은 상대 차수가 2차인 계를 고려한다.

$$G_p(s) = k_p \frac{B_p(s)}{A_p(s)} = k_p \frac{1}{s^2 + a_{p1}s + a_{p2}} \quad (27)$$

여기서,  $a_{p1}$ 과  $a_{p2}$ 는 모르는 매개 변수 값이고,  $k_p$ 는 범위는 알고 있고, 부호는 양인 매개 변수 값이다. 기준 모델은 다음과 같이 선정한다.

$$G_m(s) = k_m \frac{B_m(s)}{A_m(s)} = \frac{100}{s^2 + 20s + 100} \quad (28)$$

시간 지연  $L$ 을 0.005로 하고, 2 절의 결과를 이용하여 원래의 MRTDC 제어 법칙과 변형된 MRTDC 제어법칙을 구할수 있고, 변형된 MRTDC의 경우 저주파 통과 필터의  $\lambda$ 는 200으로 선정한다.

### 5.1 공칭 플랜트 모델 제어

플랜트 동역학의  $\Delta G(s) = 0$ 이고  $G_p(s)$ 의 잘 모르는 매개 변수 값이 각각  $k_p = 1$ ,  $a_{p1} = 0.24$ , 그리고  $a_{p2} = 0.01$ 로,  $G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 0.24s + 0.01}$

이다. 또한, 제어기의 매개 변수  $\hat{k}_p=1$ 로 선정 한 경우를 고려한다.

먼저, 두가지 알고리즘에 대한 안정성은 2 절의 Theorem 1과 Theorem 2를 통하여 해석할 수 있다. 이 때의 해석 방법은 각각의 알고리즘에 대하여,  $H_1(s)$ 와  $H_2(s)$ 의 나이퀴스트 선도를 이용한 나이퀴스트 판별법으로 한다. 각각의 나이퀴스트 선도는 Fig. 6와 같다. Fig. 6은 3가지 알고리즘이 모두 공칭 플랜트 모델에 대하여 안정함을 나타낸다.

한편, 두가지 알고리즘에 대한 명령 추종 성능은 식 (10)과 식 (13)를 통하여 알아볼 수 있다. 각각의 식의 Bode Plot은 Fig. 7와 같다. Fig. 7에서 보듯이, 두가지 알고리즘 모두 다  $G_m(s)$ 의 기준 모델을 거의 완벽하게 추종함을 볼 수 있다. Fig. 8은 이 경우의, 원래의 MRTDC 알고리즘과 변형된 MRTDC 알고리즘의 모의 실험 결과인데, 해석 결과와 잘 일치한다.

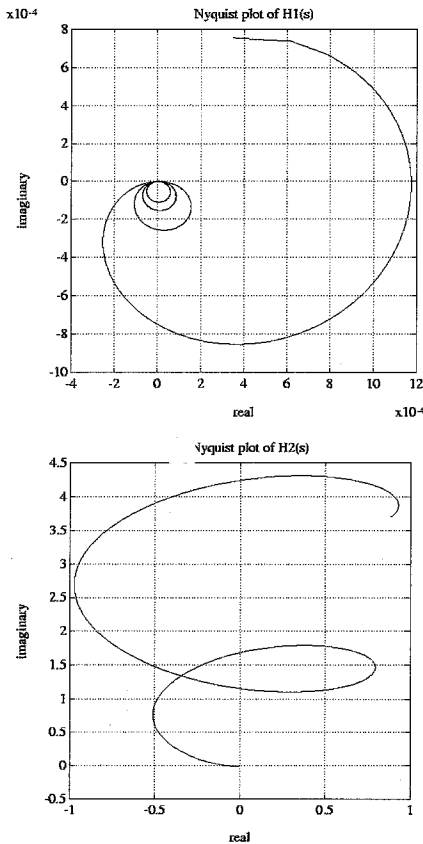


Fig. 6 Nyquist plot

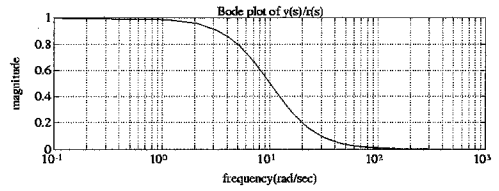


Fig. 7 Command following performance  
(----- : Original MRTDC algorithm,  
- - - : Modified MRTDC algorithm)

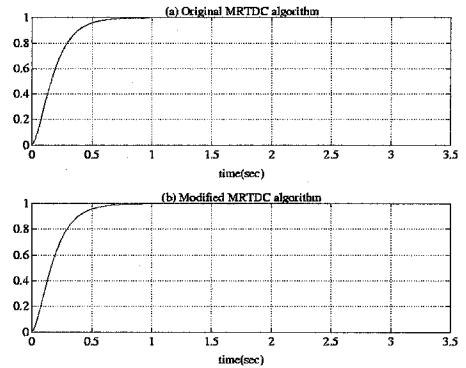


Fig. 8 Simulation results in nominal plant model

## 5.2 불확실성이 존재하는 상황에서의 제어

공칭 플랜트 모델에 불확실성  $\Delta G(s)$ 가 존재하는 상황에서의 강인 안정성을 해석한다. 첫 번째의 경우로, 플랜트의 상대 차수에는 변화를 주지 않지만 매개 변수에는 변화를 주는 불확실성이 존재하는 상황을 고려한다.  $G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 0.24s + 0.6}$ 가 어떠한 상황에 의하여  $\frac{1.5}{s^2 + 0.44s + 0.1}$ 로 변한 상황을 고려한다. 이 때의  $\Delta G(s)$ 는 다음과 같다.

$$\Delta G(s) = \frac{0.5s^2 + 0.15s + 0.8}{s^2 + 0.44s + 0.1} \quad (29)$$

두가지 알고리즘의  $|F(j\omega)|$ 와  $|F(j\omega)\Delta G(j\omega)|$ 의 Bode plot은 Fig. 9와 같다. Fig. 9에서 보듯이 두가지 알고리즘 모두 다  $F(j\omega)\Delta G(j\omega)$ 의 크기가 1보다 작으며 이로 부터, 강인 안정성을 보장함을 확인할 수 있다. 그리고, Fig. 10은 이 경우의 원래의 MRTDC 알고리즘과 변형된 MRTDC 알고리즘

의 모의 실험 결과인데, 불확실성에 거의 영향을 받지 않고 만족된 성능을 나타내며, 해석 결과와 잘 일치한다.

두번째의 경우로, 플랜트의 상대 차수에는 변화를 주는 불확실성이 존재하는 상황으로, 공칭 플랜트 모델  $G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 0.24s + 0.6}$  가

$\frac{1}{(s^2 + 0.24s + 0.6)(0.00275s + 1)}$  로 변환 경우로 상대 차수가 3으로 증가한 상황을 고려한다. 이때의  $\Delta G(s)$ 는 다음과 같다.

$$\Delta G(s) = -\frac{0.00275s^3 + 1.497s^2 + 0.0007s}{(s^2 + 0.24s + 0.6)(0.00275s + 1)}$$

두가지 알고리즘에 대한  $|F(j\omega)|$ 와  $|F(j\omega)\Delta G(j\omega)|$ 의 보드선도는 Fig. 11과 같다. 원래의 MRTDC 알고리즘은 Fig. 11에서 보듯이 고주파의 영역에서  $|F(j\omega)\Delta G(j\omega)|$ 의 크기가 1보다 크게되어 강인 안정성을 보장하지 못한다. 그러나 변형된 MRTDC 알고리즘에서는 모든 주파수의 영역에서  $|F(j\omega)\Delta G(j\omega)|$ 의 크기가 1보다 작아 강인 안정성을 보장한다. 그리고 Fig. 12은 이 경우의 원래의 MRTDC 알고리즘과 변형된 MRTDC 알고리즘의 모의 실험 결과인데, 원래의 MRTDC 알고리즘은 플랜트의 상대 차수를 변화게 하는 불확실성에 대하여, 불안정함을 보이지만, 변형된 MRTDC 알고리즘의 경우에는 해석 결과와 안정성을 유지하고 만족된 응답을 나타낸다.

6. 결론

본 논문에서는, 잘 모르는 불확실한 선형 입력력 모델에서의 TDC 제어 기법을 이용한 원래의 MRTDC 알고리즘과 변형된 MRTDC 알고리즘을 유도하였다. 이러한 입력력 모델에서의 MRTDC는 기존의 상태 공간 모델을 기초로 한 TDC 알고리즘에서 요구되는 매칭 조건과 같은 구조적인 조건이 필요하지 않고, 단지 공칭 플랜트 모델의 상대 차수를 안다는 조건과, 플랜트와 플랜트의 입력과 관련된 불확실성이 최소 위상계라는 조건이 요구된다.

제안된 두가지의 MRTDC 알고리즘에 대하여, 공칭 플랜트 모델에서의 안정성과 명령 추종 성능, 외란 제거 성능, 센서 잡음의 민감성 성능의 해석을 하였고, 또한, 강인 안정성 해석을 통하여, 입력과 관련된 곱셈형 불확실성이 존재하는 상황에서의 강인 안정성을 보장하는 조건을 구했다. 이러한 해석 결과로부터, 원래의 MRTDC 알고리즘이

지니고 있는 고주파 센서 잡음에 민감한 성능과, 상대 차수에 변화를 주는 불확실성에 대하여, 강인 안정성을 보장하지 못하는 특성을 변형된 MRTDC 알고리즘으로 해결할 수 있음을 보였다. 이러한 결과는 실제의 MRTDC 설계에 직접적으로 사용될 수 있다.

마지막으로 예제를 통한 모의 실험을 통하여, 3가지 MRTDC 알고리즘을 설계하고, 공칭 플랜트 모델에서의 제어 성능과 불확실성이 존재하는 경우의 제어 성능을 시험하였다. 그 결과 이론적 해석 결과와 모의 실험 결과가 잘 일치함을 확인하였다.

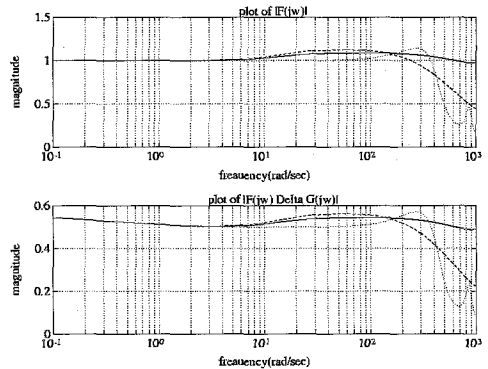


Fig. 9 Robust stability bounds  
(----- : Original MRTDC algorithm,  
- - - - : Modified MRTDC algorithm)

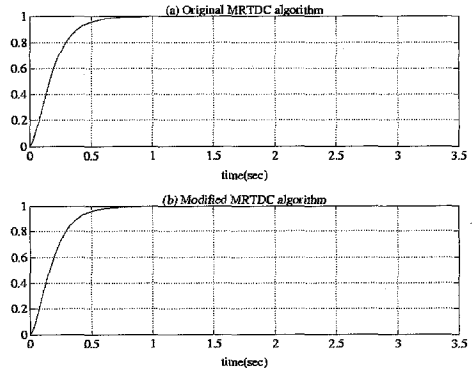


Fig. 10 Simulation results in plant with uncertainty



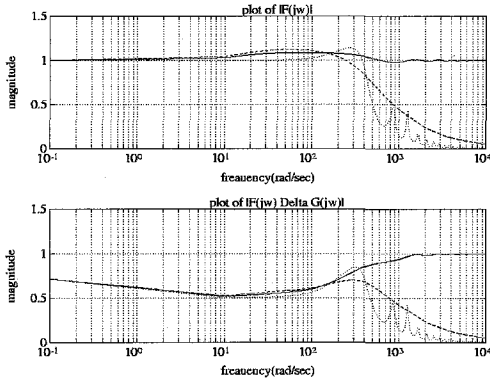


Fig. 11 Robust stability bounds  
 (----- : Original MRTDC algorithm,  
 - - - : Modified MRTDC algorithm)

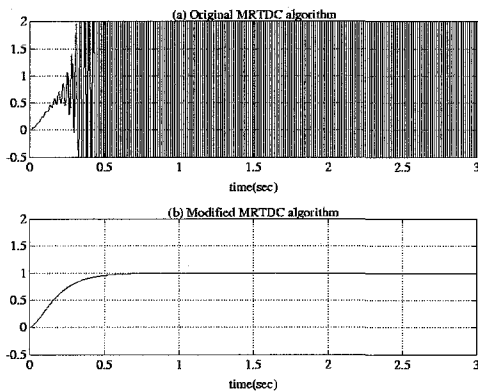


Fig. 12 Simulation results in plant with uncertainty

참 고 문 헌

[1] Landau, Y. D, "Adaptive Control -- The Model Reference Approach," Marcel Dekker, 1979.  
 [2] Sastry, S. and Bodson, M, "Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness," Prentice-Hall, Inc. 1989.  
 [3] Bartolini, G. and Zolezzi, T, "The V.S.S. Approach to the Model Reference Control of Nonminimum Phase Linear Plants," IEEE

Trans. Automatic Control, Vol. AC-33, No. 9, pp. 859-863, 1988.  
 [4] Young, K. K. D, "Design of Variable Structure Model Following Control Systems," IEEE. Trans. Automatic Control, Vol. AC-23, No. 6, pp. 1079--1085, 1978.  
 [5] Youcef-Toumi, K. and Ito, O, "Controller Design for Systems with Unknown Dynamics," ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, Vol. 112, No. 1, pp. 133-142, 1990.  
 [6] Chang, P. H. and Lee, J. W. "A Model Reference Observer for Time-Delay Control and Its Application to Robot Trajectory Control," IEEE. Trans. on Control System Technology, Vol. 4 No. 1, pp. 2-10, 1996.  
 [7] Youcef-Toumi, K. and Reddy, S, "Dynamic Analysis and Control of High Speed and High Precision Active Magnetic Bearings," ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, Vol. 114, pp. 623-632, 1992.  
 [8] Youcef-Toumi, K. and Wu, S. T, "Input/Output Linearization Using Time Delay Control," ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, Vol. 114, pp. 10-19, 1992.  
 [9] Youcef-Toumi, K. and Reddy, S, "Analysis of Linear Time Invariant Systems with Time Delay," ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, Vol. 114, pp. 544-555, 1992.  
 [10] Youcef-Toumi, K. and Huang, S. Y, "Stability and Accuracy Analysis of the Time Delay Control on Convolution Method" Proc. of American Control Conference, pp. 1025-1029, 1993.  
 [11] Liang, Y. J, and Looze, P. L., "Evaluation of Time-Delayed Uncertainty Cancellation Systems," Proc. of American Control Conference, pp. 1950-1954, 1992.  
 [12] Zames, Z, "On Input-Output Stability of Time Varying Nonlinear Feedback Systems," IEEE. Trans. Automatic Control, Vol. 11, No. 2, pp. 228-238, 1966.  
 [13] Doyle, J. C. and Stein, G, "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-26, No. 2, pp. 4-16, 1981.