

비선형 유한요소법에 의한 탄성받침의 이차원 해석 2 Dimensional Nonlinear Finite Element Analysis for Layered Elastomeric Bearings

박문호*, 김진규**, 이성준***

Moon-Ho Park, Jin-Kyu Kim, Seong-Joon Lee

<Abstract>

A geometric and material nonlinear finite element analysis is developed for the layered elastomeric bearings. In this study, a mixed variational approach with separate variables is used to describe the displacement and volume change of rubber. To represent finely deformed behavior, Kirchoff stress tensors are used and converted Eulerian stress tensors to describe real physical meanings. Newton's method is utilized to solve the governing nonlinear finite element equations. Numerical test are performed in the case of compression and shear to verify the theory and to illustrate the application of this analysis. And the results of this study were compared to the results of Moore's discrete finite element analysis.

Key Words : *elastomeric bearing, static condensation, mixed variational approach method*

1. 서론

1.1 연구배경

복합 층 구조체는 강성과 연성의 재료가 서로 층층이 교차하며 이루어진 것으로서 강성의 재료는 금속, 고강도 합성재 등이 사용되고 연성의 재료는 고무가 주로 사용되고 있으며 높은 압축강도를 견디면서 전단변형에는 약한 성질을 필요로 하는 다양한 분야에서 활용되고 있

으나 그 자체를 구성하고 있는 두 물질의 강성의 차가 너무 크고 여러 층으로 구성되어 있으며 매우 큰 변형과 변위를 나타내고 있을 뿐 아니라 실제적으로 고무재료가 재료 및 기하학적 비선형 거동을 일으키고 있다는 것을 감안한다면 해석자체가 매우 어려워진다. 또한 시공시에 제시되고 있는 자료나 설계기준은 대부분 실험에 의존하고 있어 다양한 분야로의 사용은 경제적인 문제로 인하여 제한을 받고 있다. 본

* 경북대학교 토목공학과 교수, 工博
연세대학교졸업 / parkmj@kyungpook.ac.kr

** 영남이공대학 토목과 조교수, 工博
경북대학교졸업 / jkkim@ync.ac.kr

*** 경북대학교 토목공학과 대학원 졸업

* Professor, Dept. of Civil Eng. Kyungpook National University, Dr. Eng.

** Assistant Professor, Dept. of Civil Eng. Yeungnam College of Science & Technology, Dr. Eng.

연구에서는 교량의 탄성 받침을 대상으로 거동을 명확히 규명할 수 있는 비선형 유한요소 해석 이론개발과 이의 프로그램 개발에 중점을 두었으며 장래의 연구대상이 될 비선형 3차원 해석에도 확대 적용할 수 있는 기초를 마련함과 동시에 적은 요소의 수로도 해석의 정확도를 유지할 수 있고 보다 쉬운 결과검증이 가능한 복합해석을 위한 발판을 마련하고자 하였다. Fig 1.1은 일반적인 직사각형 보강탄성받침을 도시한 것이다.

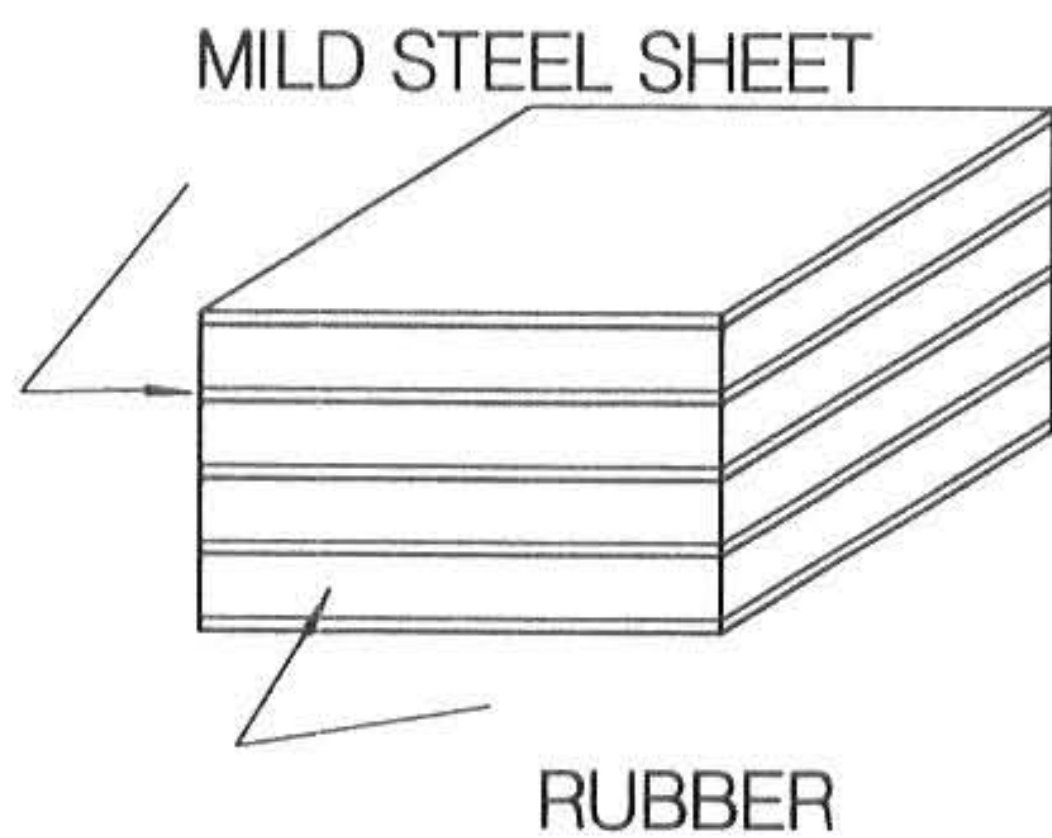


Fig 1.1 Laminated Elastomeric Bearing

1.2 변위 및 기호

최소 포텐셜 에너지(minimum potential energy)의 이론은 역학문제의 해결에 매우 유용한 도구로서 다음의 식(1)과 같이 정식화 될 수 있다.

$$V = \int_{vol} W dv - \int_{vol} F_i u_i dv - \int_{S_\sigma} \sigma_i u_i ds \quad (1)$$

여기서 W = 변형률 에너지 방정식

F_i = 물체력 성분

u_i = 변위성분

σ_i = 표면력 성분

S_σ = 표면력이 작용하는 곳의 표면적

최소 포텐셜 에너지의 조건을 만족시키기 위하여 변위에 대한 미분을 나타내는 식(2)이 성립되어야 한다.

$$\frac{\partial V}{\partial u_i} = 0 \quad (2)$$

여기서 u_i 는 i 절점에서의 변위를 나타낸다.

변위와 변형이 매우 클 경우 변형 후 i 의 위치는 변형 전의 위치와는 매우 크게 달라질 것이므로 기준이 되는 좌표축을 결정하는 방법에 따라 Eulerian과 Lagrangian 표시법으로 나누어지며 본 연구에서는 변형전의 좌표를 기준으로 표현하는 Lagrangian 표시법을 사용하여 위치를 결정한다. 또한, 변형률은 Green strain tensor를 사용하여 다음의 식(3)으로 나타낸다.

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \frac{\partial u_a}{\partial x_j} \right] \quad i, j = 1, 2 \quad (3)$$

여기에서 x_i, x_j 는 각각 x, y 방향으로의 초기 변형 전 상태와 관련된 좌표계를 나타내며 u_i, u_j 는 x, y 방향으로의 변위를 의미한다. 또한 고무재료의 변형에너지를 나타내는 함수로서 본 연구에서는 Europe에서 광범위하게 사용되고 있는 변형률 에너지 함수인 다음의 식(4)을 사용하였다.

$$W = \frac{1}{2} B (I_3^{1/2} - 1)^2 + \frac{1}{2} G \left[(1 - \mu_1) \left(\frac{I_2}{I_3^{2/3}} - 3 \right) + \mu_1 \left(\frac{I_1}{I_3^{1/3}} - 3 \right) + \mu_2 \left(\frac{I_1}{I_3^{1/3}} - 3 \right)^2 \right] \quad (4)$$

여기서, B = 체적탄성계수

G = 전단탄성계수

μ_1, μ_2 = 고무의 재료특성을 나타내기 위한 변수

식(4)는 Herrmann등에 의해 Europe에서 광범위하게 사용되고 있는 식을 변형한 것으로서 고무재료의 비선형 거동을 효과적으로 표현하면서 수치해석과정에서 보다 편리하게 적용할 수 있는

것으로 나타났다. 변형률 에너지 방정식에 사용된 평면 변형률상태에 대해서 등방성 변형률 불변량 I_1, I_2, I_3 을 텐서를 사용하여 정리하면 다음의 식(5)로 정식화된다.

$$\begin{aligned} I_1 &= 3 + 2E_{ii} \\ I_2 &= 3 + 4E_{ii} + 2(E_{ii}E_{jj} - E_{ij}E_{ji}) \\ I_3 &= |\delta_{ij} + 2E_{ij}| \end{aligned} \quad (5)$$

또한 국부적인 체적변화를 허용하기 위하여 분리변수(separate variable)를 사용하여 총 변형 에너지를 절점 변위와 관계되는 항과 체적변화에 관계되는 항으로 나누어 형성하는 혼합 변분 접근법(Mixed Variational Approach Method)을 사용하였으므로 총 변형에너지를 나타내는 식(4)은 다음의 식(6)과 같이 분리하여 나타나게 된다.

$$W = W_V + W_S \quad (6)$$

식(6)에서 체적변화와 관련된 변형률 에너지 W_V 와 전단변형으로 축적된 에너지 W_S 는 각각 식(7)과 식(8)으로 정식화된다.

$$W_V = \frac{1}{2} B (I_3^{1/2} - 1)^2 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} W_S &= \frac{1}{2} G \left[(1 - \mu_1) \left(\frac{I_2}{I_3^{2/3}} - 3 \right) \right. \\ &\quad \left. + \mu_1 \left(\frac{I_1}{I_3^{1/3}} - 3 \right) + \mu_2 \left(\frac{I_1}{I_3^{1/3}} - 3 \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (8)$$

체적변화를 절점에서의 변위와는 무관하게 표현하기 위하여 추가의 변수 H 를 사용하게 되며 이를 다음의 식(9)과 같이 정의한다.

$$H = \frac{B}{G} (I_3^{1/2} - 1) \quad (9)$$

위의 식(9)을 사용하여 변형 에너지의 방정식을 나타내면 다음의 식(10)으로 정식화된다.

$$W = W_H + W_S \quad (10)$$

여기서 W_H 는 다음의 식(11)으로 나타난다.

$$W_H = G(I_3^{1/2} - 1)H - \frac{G^2}{2B} H^2 \quad (11)$$

따라서 고무층의 체적변화는 절점에서의 변위 u, v 가 아니라 요소내의 새로운 변수 H 로 표현되며 이는 절점변위와는 무관한 값으로서 정적응축(static condensation)의 기법으로 전체 Hessian행렬을 형성하기 전에 소거하게 된다. 유한요소해석에서 근사방정식인 식(9)을 이용할 때 전체적인 요소의 체적변화는 변수 H 의 값과 관련이 있다. 따라서 변수 H 에 대한 근사법의 선택은 요소에 대하여 체적변화분포를 나타내게되며 비록 H 가 0이거나 거의 0에 가까운 값일지라도 부분적인 체적변화가 요소내에서 발생할 수 있도록 한 것이다. 즉, 고무재료의 비압축성에 가까운 조건을 요소내 각각의 위치에서 만족하는 대신에 각 요소내에서 평균적인 의미로 이러한 조건을 만족하게 되는 것이다. 따라서 식(10)을 사용하는 혼합 변분 접근방법에서는 최소 포텐셜 에너지 원리에 다음의 식(12)을 추가로 만족해야한다.

$$\frac{\partial V}{\partial H} = G(I_3^{1/2} - 1) - \frac{G^2}{B} H = 0 \quad (12)$$

본 연구에서는 허구의 응력인 Kirchoff stress를 계산한 후 연속체 역학의 일반적인 관계식을 이용하여 실제적인 응력인 Eulerian stress를 결정하게 된다.

2. 유한요소해석

2.1 비선형 지배 방정식

해석에 사용된 요소는 강성층의 휨 변형에 따른 영향을 보다 효과적으로 모델링하기 위하여 8절점의 직사각형 요소를 선택하였다. 본 연구에서는 요소의 중앙에서 체적변화와 관계하는 자유도를 추가하고 이를 변수 H 로하여 요소내에서 선형으로 변화하도록 식(13)과 같이 가정하였다. 체적변화를 나타내는 변수 H 는 각각의

요소 내에서는 연속이지만 요소들 사이에서는 불연속적인 값을 가질 수도 있으며 x_0 와 y_0 는 요소의 중심좌표를 나타낸다.

$$H = H_1 + H_2(x - x_0) + H_3(y - y_0) \quad (13)$$

8절점 등방성 사각형으로 구성된 유한요소해석 모델을 Fig 2.1에 나타내었으며 부분적인 체적변화를 고려하기 위하여 요소의 중앙에 체적변화에 대한 자유도 (H_1, H_2, H_3)를 추가하였다. 일반적인 8절점 요소의 각 축방향 변위 u, v 의 근사화는 다음의 식(14)로 나타난다.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^8 N_i u_i \\ v &= \sum_{i=1}^8 N_i v_i \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, N_i 는 형상함수(shape function)로서 다음의 식(15)와 (16)으로 나타난다.

모서리 절점 ($i = 1, 3, 5, 7$)의 경우 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{1}{4} \xi_i (1 + \eta_i) (\xi \xi_i + \eta_i - 1) \\ &\quad + \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta_i) \xi_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) \eta_i (\xi \xi_i + \eta_i - 1) \\ &\quad + \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \eta_i \end{aligned} \quad (15)$$

측절점 ($i = 2, 4, 6, 8$)의 경우 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \xi_i^3 (1 - \eta^2) - \xi \eta_i^2 (1 + \eta_i) \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= -\xi_i^2 (1 + \xi \xi_i) \eta + \frac{\eta_i^2}{2} \eta_i (1 - \xi^2) \end{aligned} \quad (16)$$

또한 각각의 요소에 대한 체적변화를 고려하기 위하여 요소 중앙에서 가정한 자유도인 H 의 근사화는 다음의 식(17)로 표현된다.

$$H = H_1 + H_2 x_H + H_3 y_H \quad (17)$$

여기서, H_1, H_2 그리고 H_3 은 각각의 요소에 대한 미지수이며 x_H 와 y_H 의 크기는 요소의 중심으로부터 측정되는 전역좌표계의 값으로서 다음의 식(18)과 같다.

$$\begin{aligned} x_H &= x - x_0 \\ y_H &= y - y_0 \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 x 와 y 는 축직선상 절점의 전역좌표계의 값이다. 요소 중앙에서의 좌표값 x_0 와 y_0 는 각 요소의 모서리 절점에서의 평균값인 식(19)과 같다.

$$\begin{aligned} x_0 &= (x_1 + x_3 + x_5 + x_7) / 4 \\ y_0 &= (y_1 + y_3 + y_5 + y_7) / 4 \end{aligned} \quad (19)$$

본 연구에서는 비선형 방정식의 해를 구하는 방법으로 Newton의 방법을 적용하였으며 각 요소에 나타난 체적변화와 관계하는 요소내의 자유도를 정적응축(static condensation)의 기법으로 소거한 후 전체 Hessian과 Residual의 행렬을 형성하도록 하였다. 만약, 비선형 지배 방정식을 함수 F 로 정의하면 다음의 식(20)과 같은 조건이 만족되어야 한다.

$$F(u_i, v_i, H_j) = \Omega \quad (20)$$

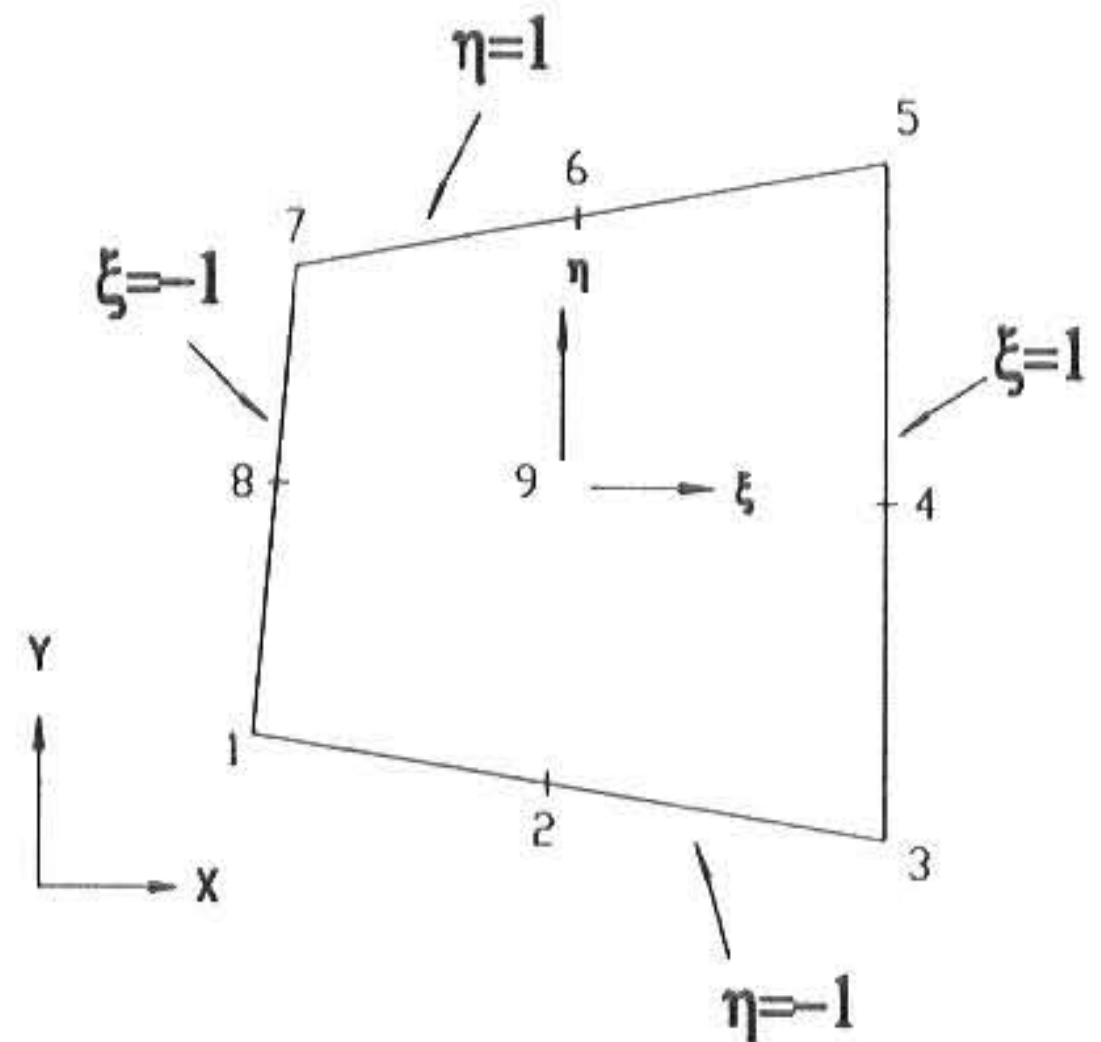


Fig 2.1 Quadratic isoparametric element

요소의 변위 (u, v)와 체적변화변수 H 를 \underline{d} 의 구성요소로 정의하여 나타내면 식(21)과 같으며 지배방정식은 식(22)로 정식화된다.

$$\underline{d}^T = [u_i, v_i, H_j] \quad (21)$$

$$F(\underline{d}) = \frac{\partial V}{\partial \underline{d}} = \underline{\Omega} \quad (22)$$

또한 $F(\underline{d})$ 의 자코비안 행렬(Jacobian matrix)을 I 로 정의하면 다음의 식(23)과 같이 표현된다.

$$I = \left[\frac{dF}{d\underline{d}} \right] \quad (23)$$

2.2 Hessian 행렬과 Residual 행렬의 요소

각각의 요소에 대한 Hessian행렬 I 와 Residual행렬 F 는 다음의 식(24)으로 정식화된다.

$$F_i = \frac{\partial V}{\partial d_i} = \sum_{K=1}^{NE} \left[\int_{V_K} \frac{\partial W_K}{\partial d_i} dV - \frac{\partial}{\partial d_i} \int_{S_K} \sigma u dS \right] \quad (24)$$

정의되는 자코비안 행렬 $\left[\frac{dF}{d\underline{d}} \right]$ 은 다음의 식(25)과 같이 된다.

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial d_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial d_i \partial d_j} = \sum_{K=1}^{NE} \int_{V_K} \frac{\partial^2 W_K}{\partial d_i \partial d_j} dV = \sum_{K=1}^{NE} \sum_{l=1}^M \frac{\partial^2 W_K(\xi_l, \eta_l)}{\partial d_i \partial d_j} W_l |J_l| \quad (25)$$

Hessian 행렬의 요소를 다음의 식(26)과 같이 계산할 수 있다.

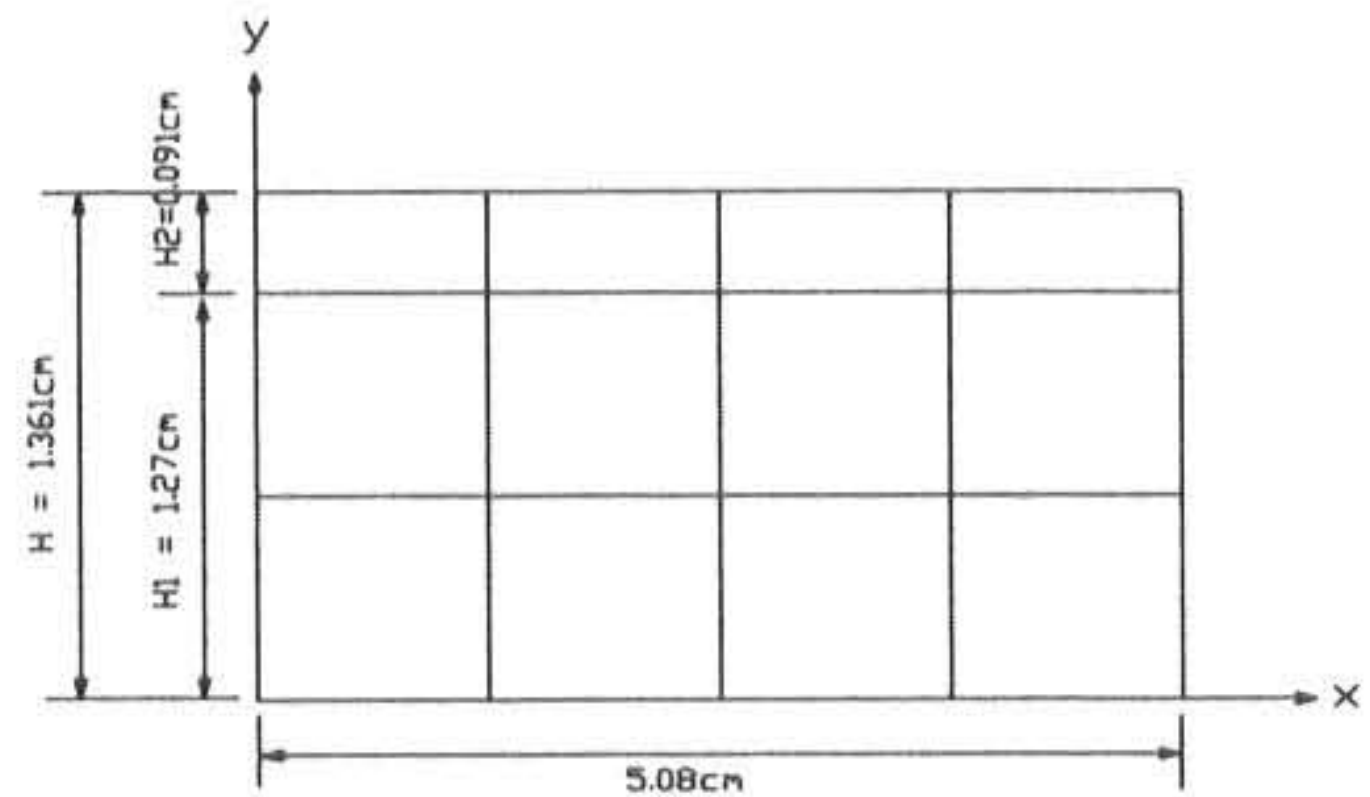
$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 W_H}{\partial u_i \partial u_j} + \frac{\partial^2 W_S}{\partial u_i \partial u_j} \quad (26)$$

3. 탄성받침의 해석 예제 및 고찰

본 연구에서 개발된 혼합 변분 해석의 이론과 이를 이용한 유한요소해석 프로그램의 사용성에 대한 검토를 위하여 교량용의 탄성받침을 2차원 이산화해석의 방법으로 해석하였으며 이 결과를 Moore의 이산화해석 결과와 비교하였다. 또한 실무에서의 적용성을 위하여 국내에서 제작, 시공되고 있는 탄성받침을 해석하였으며 무차원의 값으로 도시하였다.

3.1 압축력을 받는 경우

평면변형률의 상태로 모델링이 된 탄성받침이 상·하부의 고정 강판(rigid end plate)으로부터 축하중을 전달받는 경우를 해석하였다. 본 연구에서 개발된 혼합 변분 해석의 이산화해석 결과와 Moore의 이산화해석 결과를 비교하였다. 본 연구에서는 절점당 2개의 미지수를 가지는 Serendipity 요소(8절점) 12개를 사용하였으며 Moore는 Lagrangian 요소(9절점) 12개를 사용한 것이다. 이산화 해석에서 사용된 요소분할과 경계조건을 Fig 3.1에 나타내었으며 축에 대한 대칭성을 이용하여 1/4만 해석하였다.



Boundary conditions :

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ (symmetry)} &: \bar{u} = 0 \\ y = 0 \text{ (symmetry)} &: \bar{v} = 0 \\ y = H &: \bar{u} = 0, \bar{v} = -0.127\text{cm} \end{aligned}$$

Material properties :

$$B=1530000 \text{ psi}, G=115 \text{ psi}, \mu_1=1.0, \mu_2=0.022$$

Fig 3.1 Single Layer Elastomeric Bearing Model in Compression and Torsion test (unit : cm)

압축하중이 작용하고 있는 경우에 대해 일반적인 응력과 변형률의 관계를 Fig 3.2와 Fig 3.3에 나타내었으며 특히 Fig 3.3은 변형률을 40%까지 고려한 것으로서 이러한 응력은 실제 구조물에 발생하게 되는 응력을 훨씬 초과한 것이다. 또한 본 연구에서의 해석 결과와 Moore의 해석 결과치가 다소 차이를 나타내는 것은 사용한 재료의 특성에 다소 차이가 있기 때문이며 Moore의 해석에서는 해석상의 어려움으로 인하여 고무재료의 특성인 m 값을 정수값인 2로 고정시킨 경우이다. Fig 3.4는 압축하중하에서 변형률을 10%로 고려했을 경우 상부 고무층에서의 전단변형률을 도시한 것이다. 또한 탄성받침의 폭과 두께의 비에 따른 강성도의 변화를 Fig 3.5에 나타내었다.

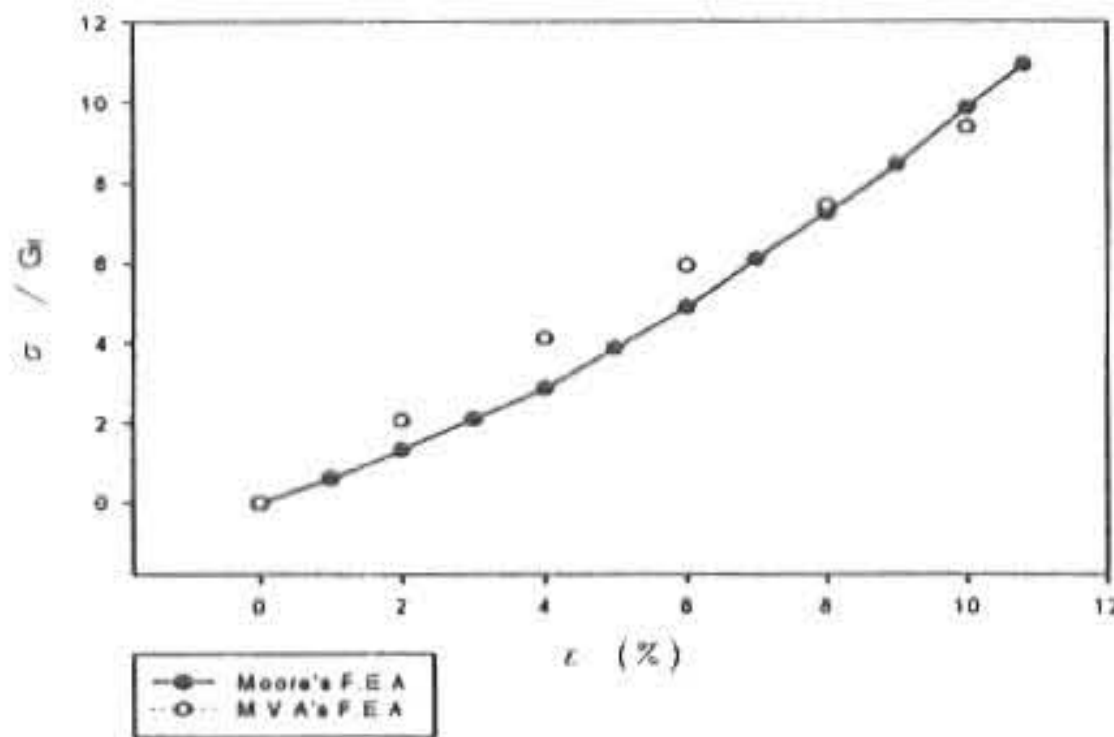


Fig 3.2 Nominal Stress-Strain Curve in Restrained Compression for Working-Load Range - Single Layer Example

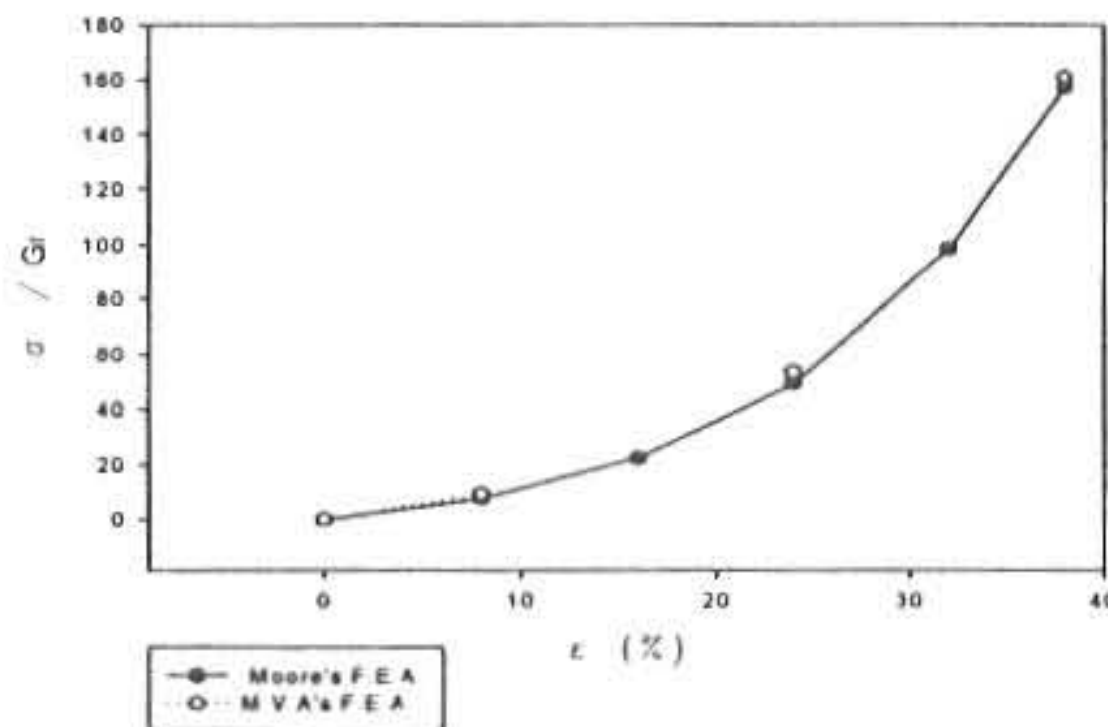


Fig 3.3 Nominal Stress-Strain Curve, Restrained Compression Single Layer Example

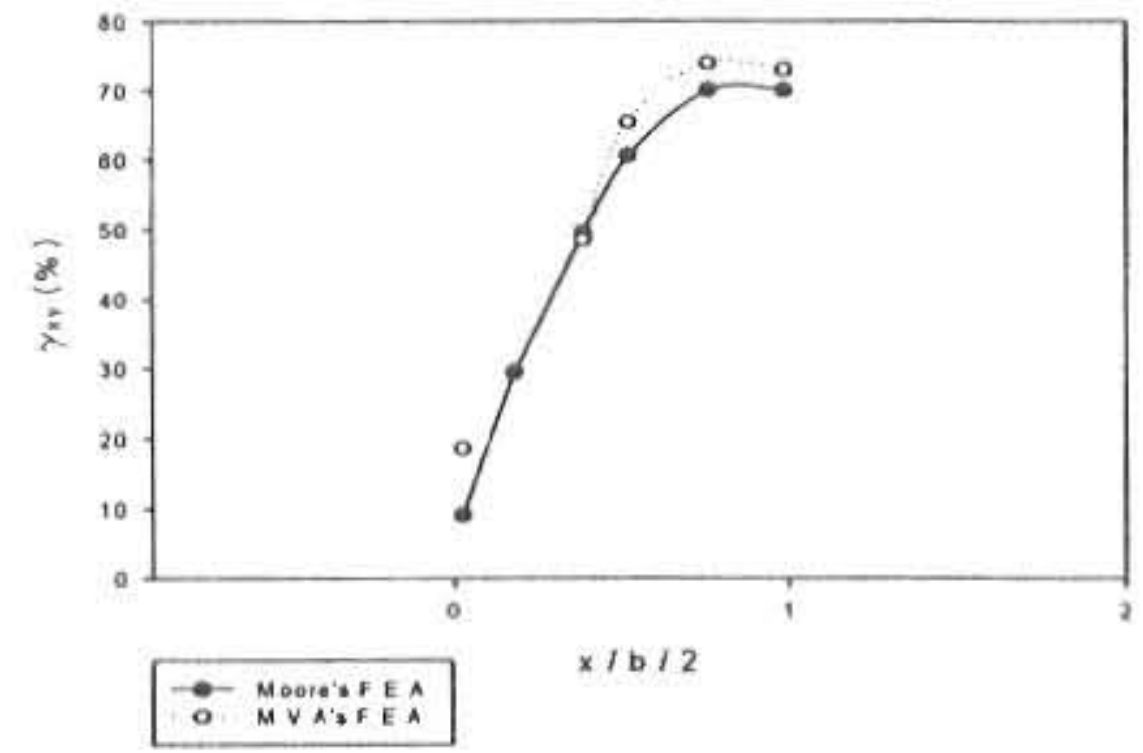


Fig 3.4 Shear Strain γ_{xy} at the Top of the Rubber Layer, Restrained Compression at a Nominal Strain of 10%

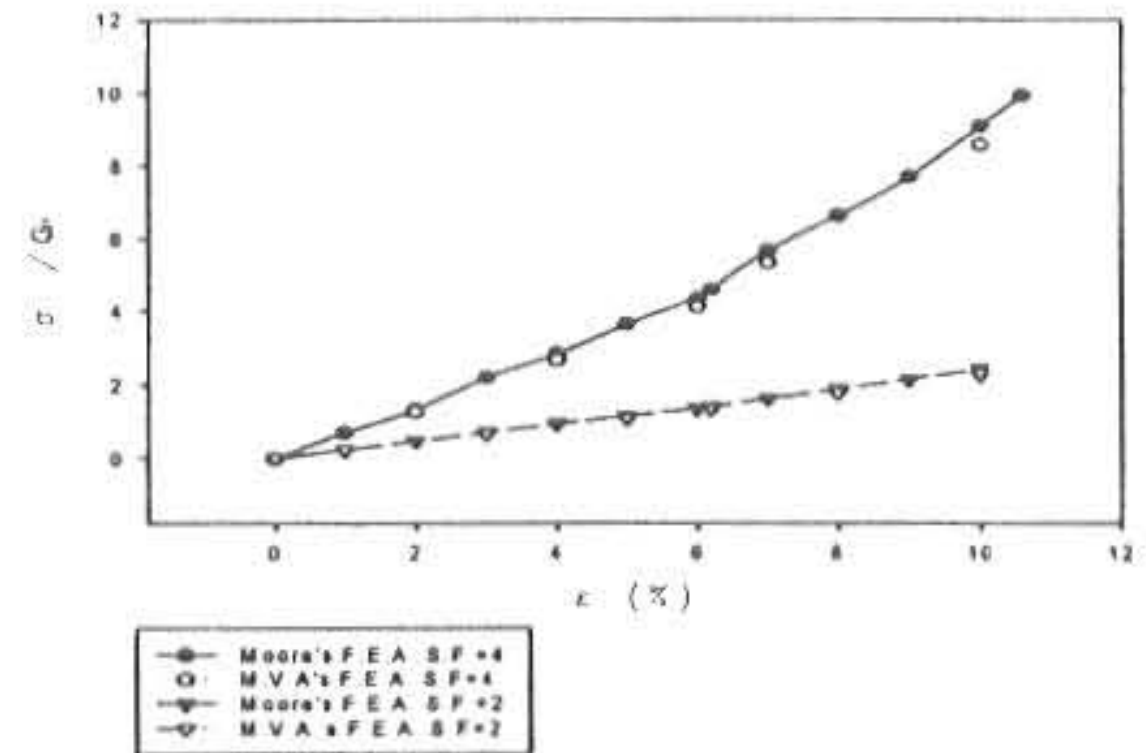


Fig 3.5 Nominal Stress-Strain Curves in Restrained Compression for Different Bearing Widths

3.2 압축력과 전단력을 동시에 받는 경우

실제 현장에서의 교량 받침은 압축력뿐만 아니라 전단력도 작용하고 있으며 압축력만 고려할 경우는 대칭으로 나타나는 반면 전단력을 고려하게 될 경우의 경계조건은 비대칭으로 나타나게 된다. Fig 3.6은 단일층에서 일반적으로 압축과 전단이 발생할 경우의 모습을 도시한 것이며 이때 탄성받침의 표면에 발생하는 응력도의 변화를 Fig 3.7에 나타내었다. 축방향 하중이 작용함에 따라 상부에서의 압력은 가장자리로 갈수록 감소하고 바닥에서의 압력은 반대로 증가함을 알 수 있으며 탄성받침에 큰 인장력이나 압축력이 작용할 경우 철판재의 좌굴이나 파괴가 예상된다. 단일층에서 압축력과 전단력을 고려했을 경우의 응력-변형률도를 Fig 3.8에 나타내었다.

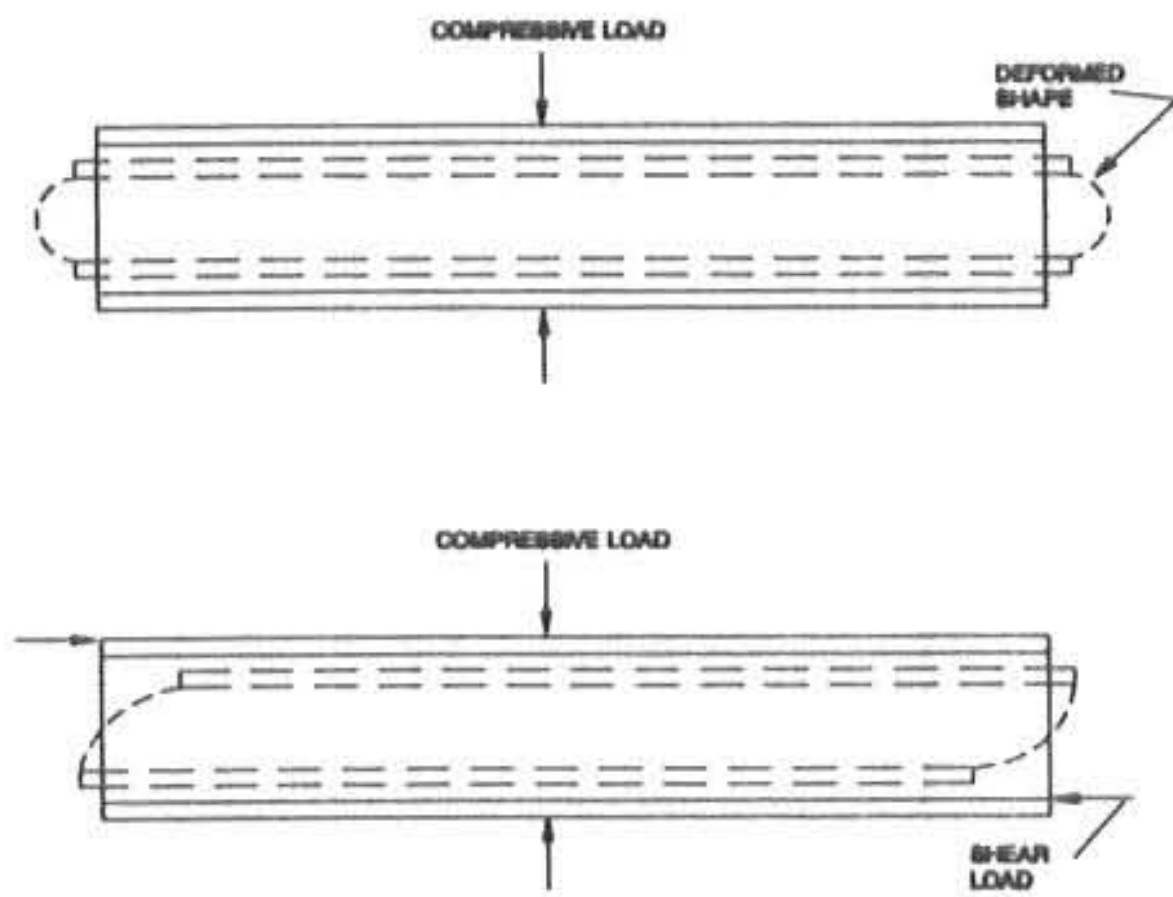


Fig 3.6 Restrainted Compression Plus Shear of One Rubber Layer

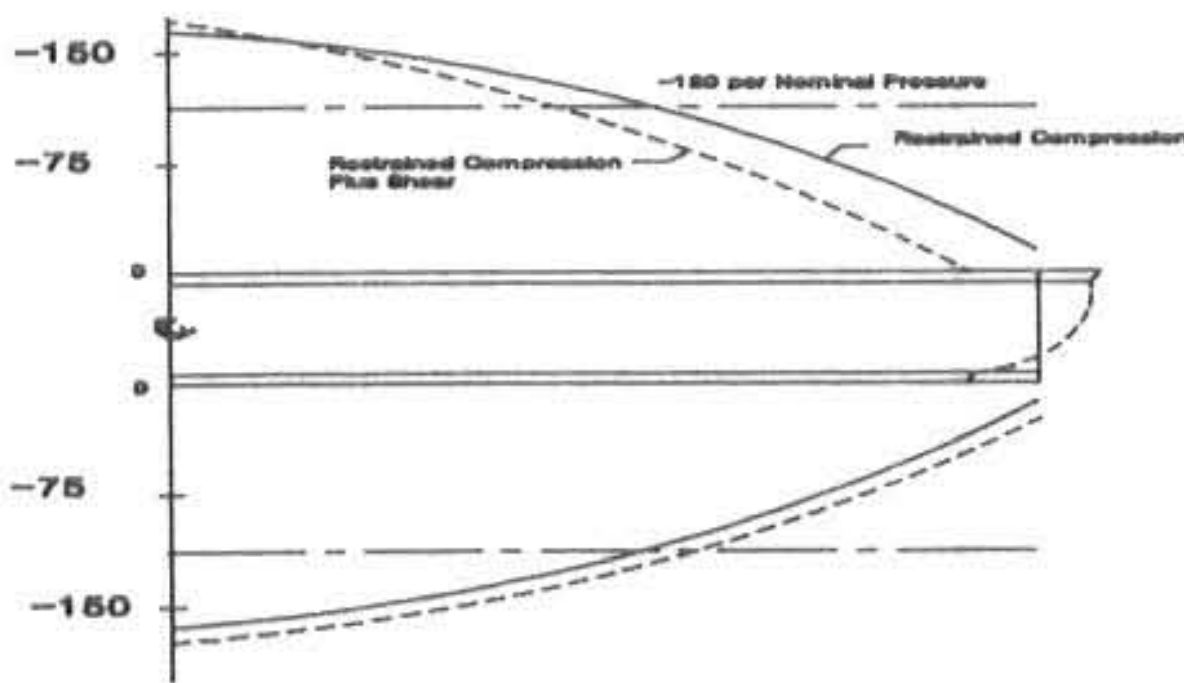


Fig 3.7 Surface Pressure, Restrainted Compression Plus Shear Single Layer Example

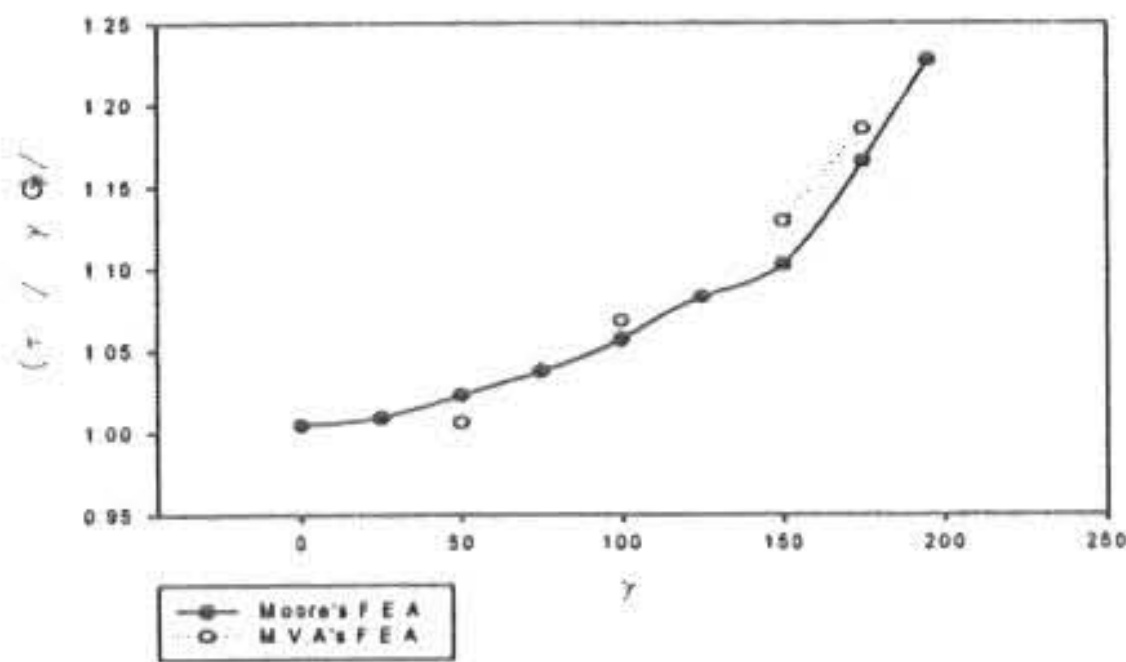
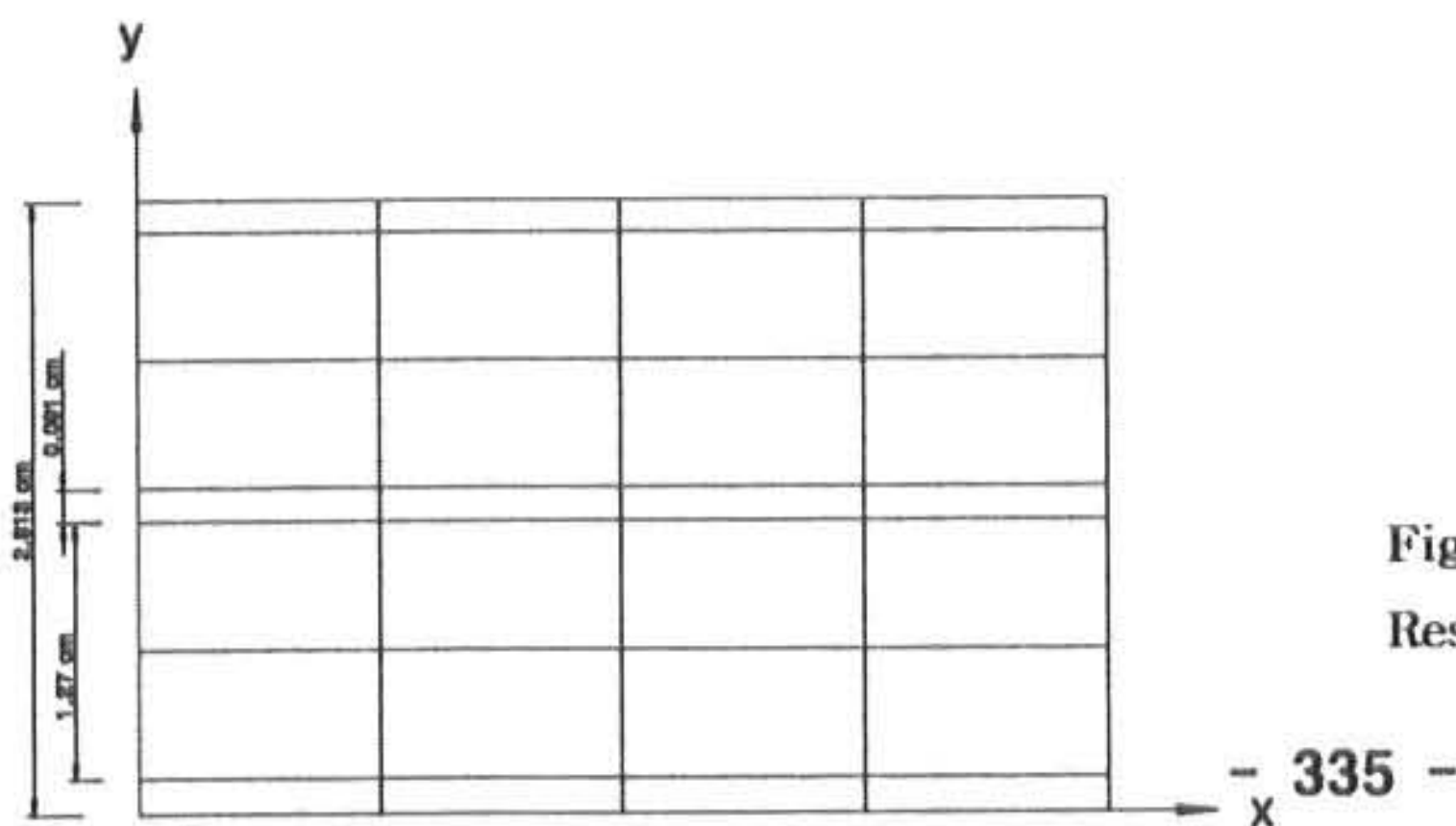


Fig 3.8 Shear Stiffness vs. Average Shear Strain, Single Layer Example $\sigma = 600$ psi



Boundary conditions :

$$x = 0 \text{ (symmetry)} : \bar{u} = 0$$

$$y = 0 \text{ (symmetry)} : \bar{v} = 0$$

$$y = H : \bar{u} = 0.508, \bar{v} = -0.127 \text{ cm}$$

Fig 3.9 Double Layer Elastomeric Bearing Model in Compression and Torsion Test (unit : cm)

3.3 다층 구조인 경우

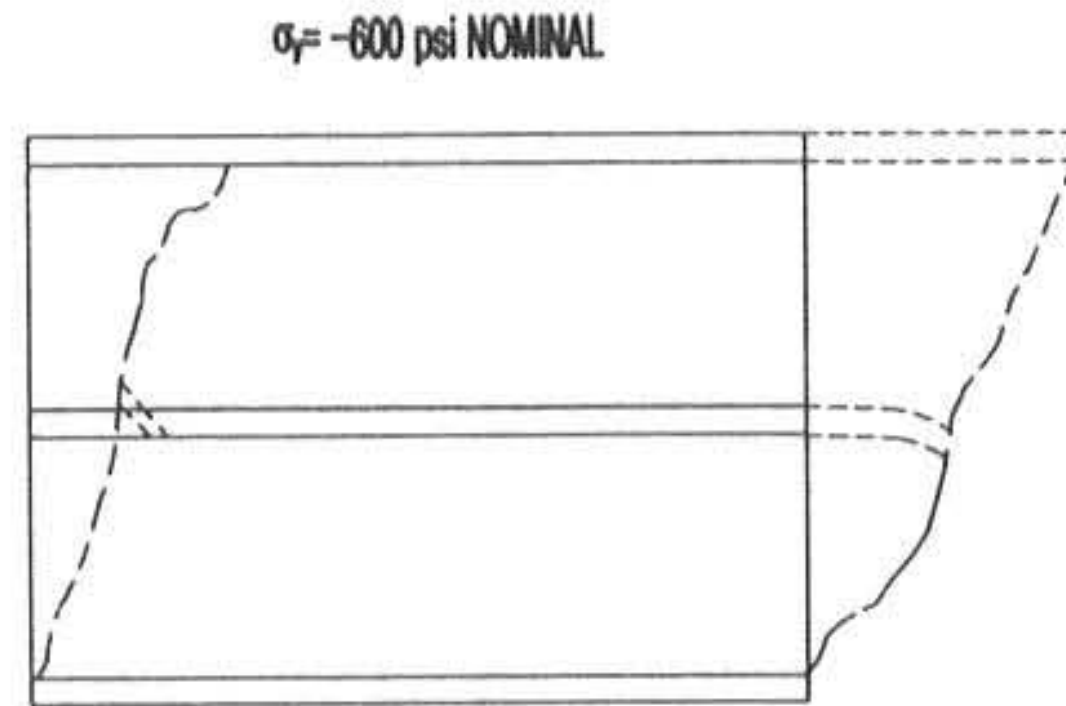


Fig 3.10 Deformed Shape, Restrainted Compression Plus Shear Double Layer Example

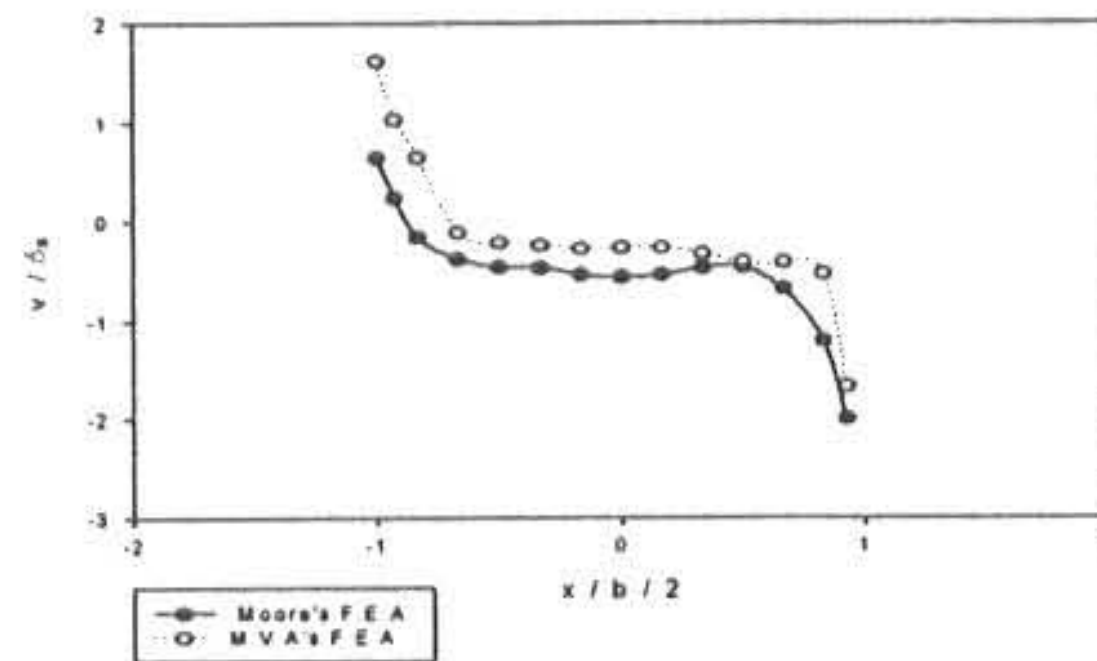


Fig 3.11 Transverse Displacement of Central Steel Layer Example - Restrainted Compression Plus Shear

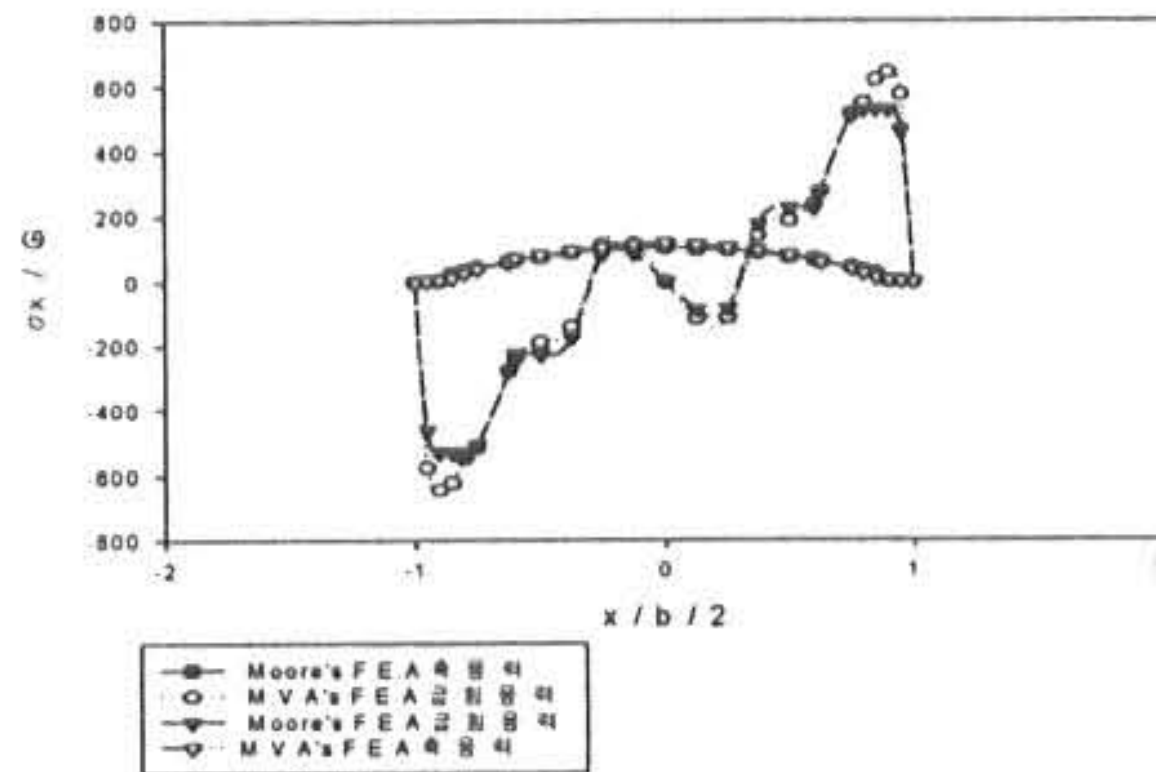


Fig 3.12 Stress in Central Reinforcement Layer, Restrainted Compression (600psi) Plus Shear ($\gamma = 80\%$)

여러층으로 구성된 탄성받침의 거동을 살펴보기 위하여 다음 Fig 3.9와 같은 두 개의 고무층을 가진 모델에 대하여 해석을 수행하였다. 압축력과 전단력을 받을 경우 양 끝단에서의 고무판과 철판이 비대칭적으로 변화하는 형상을 Fig 3.10에 나타내었으며 Fig 3.11은 중앙부 철판의 수직처짐을 나타낸 것이다. 또한 이들을 비교하기 위하여 중앙부 철판에서의 축방향응력과 굽힘응력을 Fig 3.12에 도시하였다.

4. 결 론

고무와 같이 거의 비압축성에 가까운 재료를 포함한 탄성 받침에 대하여 혼합변분해석의 과정으로 유한요소해석 프로그램을 개발한 후 사용성을 검토한 본 연구에서의 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 혼합변분해석의 과정으로 2차원 탄성받침에 대한 8절점 요소의 비선형 유한요소해석 프로그램을 개발하였다.
2. 기존의 연구결과와 비교하였을 경우 요소내에서의 미지수를 정적 응축의 유한요소해석기법으로 소거함으로써 해석의 정확도를 증가시키는 물론 전체 Hessian행렬의 크기를 줄이고 행렬의 구성을 보다 간편하게 할 수 있었으므로 비선형 3차원의 해석에 쉽게 적용할 수 있을 것으로 사료된다.
3. 현재 생산되고 있는 탄성받침의 고무재료에 대한 공학적 특성치는 정도뿐이며 이것은 수치해석의 과정에 직접 이용할 수가 없다. 따라서 본 연구에서 나타난 재료의 공학적 특성치인 μ_1 과 μ_2 를 실험결과와 비교함으로써 보다 나은 고무재료의 공학적 특성치를 제공할 수 있을 것으로 판단된다.
4. 탄성받침의 경우 대부분의 교량에 시공이 되고 있으면서도 그 거동이 복잡하고 이론해석이 어렵기 때문에 지금까지도 설계에 대한 명확한 기준을 마련하지 못하고 있다. 따라서 본 연구의 결과를 이용하여 설계변수들에 대한 거동 특성을 파악한다면 보다 합리적인 설계기준을 마련

할 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

- 1) Y. C. Fung, "A First Course in Continuum Mechanics", Prentice-Hall, Inc. 1994.
- 2) Zienkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K., "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics", Mc-Graw-Hill, 1967.
- 3) Herrman, Leonard R., "Edge Effect Analysis for Layered Composites", Department of Civil Engineering, University of California, Davis, January, 1980.
- 4) Fung, Y. C., "Foundations of Solid Mechanics", Prentice Hall Inc., 1965.
- 5) Cook, Malkus, Plesha, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", Third Edition, Wiley.
- 6) Logan "A First Course in the Finite Element Method", second edition, PWS. 1992.
- 7) Moore, J. K., "A Nonlinear Finite Element Analysis of Elastomeric Bearings", Ph. D. Dissertation, Dept. of Civil Eng., Univ. of Calif., Davis, 1982.
- 8) 임종균, 박문호 "복합체에 대한 연속체 방정식 및 유한요소 프로그램의 개발", 대한토목학회 논문집, 제8권 제2호, 1988. 6.
- 9) 임종균, 박문호, 김진규 "축대칭 층구조체의 복합이론 및 유한요소해석 프로그램의 개발", 대한토목학회 논문집, 제14권 제1호, 1994.1.
- 10) 임종균, 박문호, 김진규 "3차원 층구조체의 복합해석 및 컴퓨터 프로그램의 개발", 대한토목학회 논문집, 제14권 제1호, 1994. 1.
- 11) 황의성 "LRD 기초분리장치의 교량 내진효과", 대한토목학회 논문집, 제13권 제5호, 1993.11.
- 12) 한국공업규격, "교량지지용 탄성받침", KS F 4420, 1992.
- 13) Herrmann, Hamidi, Shafiqh-Nobari, Lim "Nonlinear Behavior of Elastomeric Bearing" ASCE. 1986