

# 극 배치영역을 고려한 자기 부상계의 로버스트 서보제어기 설계

## The Robust Servo Controller Design of Magnetic Levitation System Considering Pole Assignment Region

김창화 · 정해종 · 양주호

C. H. Kim, H. J. Jeong and J. H. Yang

**Key Words** : Magnetic Levitation System(자기부상계), Linear Matrix Inequality(선형행렬부등식), Pole Assignment Region(극배치 영역), Integral Type Servo System(적분형 서보계)

**Abstract** : This paper describes a state feedback controller design method of the integral type magnetic levitation servo system which satisfies the design objectives. The design objective is a  $H_{\infty}$  performance, asymptotic disturbance rejection and a robust pole assignment in linear matrix inequality(LMI) region. To the end, we investigated the validity of the designed controller which considering a robust pole assignment region, through results of simulation.

### 1. 서론

최근에 고속 회전기기, 운송시스템 등의 여러 분야에 있어, 마찰·마멸 및 열 발생 등을 줄이기 위해 전자기력에 의한 흡인식 및 반발식 자기 부상계에 대한 연구가 활발히 진행되어 오고 있다. 그런데, 흡인식 자기부상계는 본질적으로 불안정한 시스템이므로 내부 안정화를 위한 제어기가 반드시 요구된다<sup>1,2)</sup>.

또한 제어기 설계를 위해 수식으로 표현된 모델은 제어 대상의 특성을 완벽히 표현할 수 없는 경우가 많고, 모델에 대한 제어특성이 양호하더라도, 실제 시스템에 대해서는 양호한 특성이 얻어지지 않은 경우가 일어난다. 따라서 모델의 불확실성이 존재하는 경우에도 양호한 제어성능을 발휘하기 위해 아래와 같은 설계 사양이 고려되어야 한다<sup>3)</sup>.

- 1) 로버스트 안정성(Robust stability).
  - 2) 외란제거 성능(Disturbance rejection performance).
  - 3) 로버스트 추종 성능(Robust servo performance).
- 또한 시간응답에 근거한 설계사양으로는 목표치에 대한 오프셋(Offset), 정착시간(Setting time), 오버슈트(Over-shoot) 등을 들 수 있다. 이 설계사양은

폐루프 시스템이 극점 위치와 밀접한 관계가 있으며, 이 설계 사양을 만족하기 위해서는 폐루프 시스템의 극 배치 영역을 설정하여 모든 극점들이 이 영역에 존재하도록 하는 설계법이 요구된다<sup>4)</sup>.

이처럼 제어계 설계에 요구되는 설계 사양이 다양화 다목적화됨에 따라, 이를 만족하기 위한 설계법 등이 많이 연구되고 있으며, 이 중에 한가지 설계법이 수치적 최적화기법에 의한 설계법이다. 이 설계법은 제어계 설계사양들을 최적화 문제로 취급하여, 최적화 알고리즘에 의해 용이하게 제어기를 설계할 수 있는 특징이 있다. 이러한 최적화기법의 대표적인 것 중의 하나가 선형행렬부등식(LMI : Linear Matrix Inequality)을 이용한 설계법이다. 이처럼 제어 분야에 있어 이론구조 및 실용설계의 새로운 도구로써 선형행렬부등식이 주목받고 있는 주요한 이유는 강인성, 성능, 안정성 등의 설계지침을 정량화하고, LMI 조건으로 나타내는 것이 가능하다는 것이다. 또한 제어대상에 있어 미리 지정된 물리파라미터 변동에 대해 강인성(Robustness)도 행렬 폴리토프(Polytopic)에 의해 보장할 수 있다는 것이다<sup>4)</sup>.

따라서 본 연구에서는 기준위치 변경에 오차 없이 추종하기 위해 적분형 서보계로 구성된 자기부상 제어계에 대해, 기준입력에 대한 오버슈트, 정착 시간 등을 만족하기 위한 극 배치영역 등을 설정한다. 그리고 설계사양은 제어 대상의 물리 파

접수일 : 2000년 6월 10일

김창화 : 경남정보대학 전자정보통신제어계열

정해종 : 한국해양수산연수원

양주호 : 부경대학교 기계공학부

라미터 변동에 대한 강인성, 외란의 영향을 저감화 등을 둔다. 이들을 동시에 만족하는 상태 피드백 제어칙을 선형행렬부등식으로 정식화 한 후, 이를 LMI Toolbox를 이용하여 설계한다. 그리고 구성된 제어계에 대해 응답시물레이션을 통하여 그 타당성을 검토한다.

## 2. 제어대상의 모델링 및 적분형 서보계구성

### 2.1 모델링

직류 전자석의 흡인력을 이용하여 부상체(쇠구슬)를 지정된 위치에 부상시키는 Fig. 1과 같은 자기부상계를 고려한다.

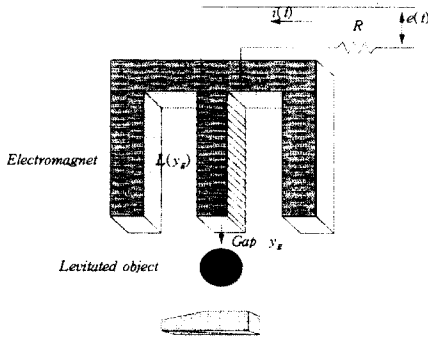


Fig. 1 Magnetic levitation system

Fig. 1의 자기부상계에 있어 부상체 및 직류전자석에 대해 다음과 같은 조건을 만족한다고 가정한다.

- 1) 부상체는 수직방향으로만 운동한다.
- 2) 전자석의 누설 자속은 무시한다.
- 3) 철심의 투자율은 무한대이다.
- 4) 자기회로에 관한 이상적인 조건들을 만족한다.

부상체의 운동방정식은 식(1)과 같이 표현된다.

$$M \frac{d^2 y_g}{dt^2} = Mg - f \quad (1)$$

단,  $M$  : 부상체의 질량,  $g$  : 중력가속도

$y_g$  : 전자석과 부상체사이의 간극

전자기력  $f$ 와 평형점에서 전자석의 회로방정식  $e_p$ 는 식(2), (3)과 같다.

$$f = -\frac{\partial}{\partial y_g} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) \quad (2)$$

$$e_p = Ri_p + \frac{d}{dt} (Li_p) \quad (3)$$

이 때 식(2), (3)에 있어서 인덕턴스  $L$ 은 식(4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$L(y_g) = \frac{Q}{Y_0 + y_g} + L_0 \quad (4)$$

단,  $Y_0, L_0$ 는 실험에 의해 구해지는 값<sup>2)</sup>이다.

식(1)~(4)를 평형점 부근에서 Taylor 급수전개법에 의해 선형화하고, 상태  $x_1, x_2, x_3$ 를 식(5)와 같이 놓으면

$$\begin{aligned} x_1 &= y_p, & x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{y}_p \\ x_3 &= i_p, & u &= e_p \end{aligned} \quad (5)$$

단,  $e_p$  : 평형점에서 코일에 가해지는 미소전압

$y_p$  : 평형점에서의 미소 변화분

제어대상의 상태방정식은 식(6)과 같이 표현된다.

$$\dot{x} = A_p x + B_p u \quad (6)$$

$$y = C_p x$$

단,

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{QI^2}{M(Y_0+Y)^3} & 0 & -\frac{QI}{M(Y_0+Y)^2} \\ 0 & \frac{QI}{(Y_0+Y)(Q+L_0(Y_0+Y))} & -\frac{R(Y_0+Y)}{Q+L_0(Y_0+Y)} \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{Q+L_0(Y_0+Y)} \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$$

이 때 식(6)에 있는 파라미터들의 값은 Table 1에 나타나 있다<sup>2)</sup>.

Table 1 The nominal value of the magnetic levitation system

Parameter	Value
Q[mH]	$3.3346 \times 10^{-3}$
$L_0$ [H]	2.384
R[Ω]	31.78
$X_\infty$ [m]	$6.002724 \times 10^{-3}$
M[kg]	1.048
I[A]	0.81

## 2.2 적분형 서보계의 구성

본 논문에서는 정상상태에서 기준입력에 대하여 오차없이 부상체를 부상하기 위하여 Fig. 2와 같이 적분형 서보계를 구성하기로 한다<sup>5)</sup>. 이 시스템에서  $v(t)$ 를 적분기의 상태변수로 하면, 확대 편차계의 상태공간 표현은 식(7)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}_p \tilde{x}(t) + \tilde{B}_p \tilde{u}(t) \\ e(t) &= \tilde{C}_p \tilde{x}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } \tilde{A}_p &= \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ -C_p & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_p = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{C}_p &= [-C_p \ 0] \end{aligned}$$

이 때  $\tilde{x}(t) = [\hat{x}(t) \ \hat{v}(t)]^T$ ,  $\tilde{u}(t)$ 는 확대계의 상태 및 제어입력이고,  $\hat{x}(t)$ ,  $\hat{v}(t)$ ,  $\tilde{u}(t)$ 는 정상상태 값과의 오차이며,  $e(t)$ 는 기준입력  $r(t)$ 와  $y(t)$ 의 오차이다. 따라서 적분형 서보계의 상태피드백 제어칙은 식(8)과 같이 표현된다.

$$\tilde{u}(t) = K\tilde{x}(t) = [F \ G] \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

로 된다.

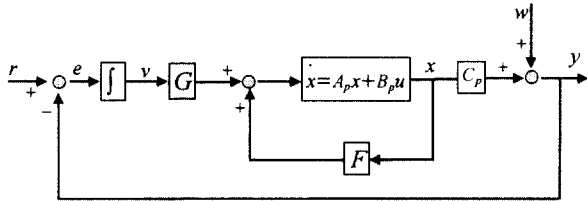


Fig. 2 Integral type servo system

Fig. 2에서 있어 외부에서 들어오는 외란  $w$ 를 부가하고, 제어칙 식(8)을 식(7)에 대입하여 정리하면 식(9)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= (\tilde{A}_p + \tilde{B}_p K)\tilde{x}(t) + \tilde{B}_w w(t) \\ y(t) &= \tilde{C}_p \tilde{x}(t) + \tilde{D}_w w(t) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{단, } \tilde{B}_w = [0 \ 0 \ 0 \ -1]^T, \quad \tilde{D}_w = 1$$

따라서 Fig. 2에 있어 출력측 외란 영향을 저감화하기 위해서는  $w$ 로부터  $y$ 까지의  $\|G_{yw}\|_\infty < \gamma$ 를 최적화하는 것이 요구된다.

## 3. LMI 접근방법에 의한 제어기 설계

### 3.1 설계 사양

#### 3.1.1 물리 파라미터의 변동

2.1절의 식(6)에 있어, 시스템 행렬  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  계수의 변동을 파라미터의 변동으로 생각한다. 이때, 계수행렬을 행렬 폴리토프의 형태로 표현하면, 파라미터 변동에 대한 제어계의 강인성은 보증된다. 본 논문에서의 고려하는 파라미터 변동을 전자석의 저항  $R$ 과 부상체 질량을  $M$ 이라 하고, 이 변동폭은 아래의 경우로 고려한다.

$$\begin{aligned} M_{\min} &\leq M \leq M_{\max} \\ R_{\min} &\leq R \leq R_{\max} \end{aligned} \quad (10)$$

#### 3.1.2 극 배치영역

폐루프 시스템에 있어 극을 지정영역에 배치하는 것은 과도응답을 개선하기 위한 목적을 가지고 있다. 따라서 식(11)과 같은 2차시스템에 대해 스텝입력에 대한 2[%]의 정착시간과 오버슈트와의 관계는 식(12)와 같다.

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (11)$$

$$1) \text{ 정착시간 : } T_s = 4 \times \tau = \frac{4}{\zeta \times \omega_n} \quad (12)$$

$$2) \text{ 오버슈트 제로 : } \zeta > 0.707$$

따라서 과도응답에 대한 설계 사양을 만족하기 위해서는 Fig. 3에 나타난 바와 같이 폐루프 극점들이 원뿔 내(Conic sector)와 극의 실수부가 어떤 값 이하인 영역에 있어야 한다.

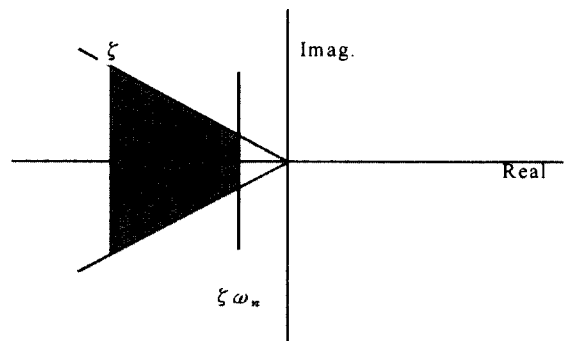


Fig. 3 Pole assignment region

### 3.2 LMI 영역

식(13)과 같은 연속시간 선형 시불변 플랜트와 정수 계인에 의한 상태 피드백 제어를 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad y = Cx + Du \\ u &= Kx \end{aligned} \quad (13)$$

이것에 대응하는 폐루프는 식(14)와 같다.

$$\dot{x} = (A + BK)x \quad (14)$$

따라서 폐루프 계가 안정하고 주어진 영역에 극이 존재하기 위한 상태 피드백 제어기  $K$ 가 존재하기 위해서는 다음의 LMI 영역으로 표현할 수 있다.

복소수 영역에서  $D$ 를 좌반부의 부분영역이라고 정의하고, 동적 시스템  $\dot{x} = Ax$ 의 모든 극점이  $D$ 의 영역에 포함되면, 이 시스템을  $D$ -안정이라고 한다. 따라서 LMI로 정의되는 일반적인 LMI 영역은 다음과 같이 정의된다.

**[정의 1]** 식(15)를 만족하는 대칭행렬  $\alpha$ 와 행렬  $\beta$ 가 존재하면 복소평면  $D$ 는 LMI 영역이라 한다<sup>6)</sup>.

$$D = \{z \in \mathbb{C} : f_D(z) < 0\} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } f_D(z) &:= \alpha + \beta z + \beta^T \bar{z} \\ &= [\alpha_{kl} + \beta_{kl}z + \beta_{kl}^T \bar{z}]_{1 \leq k, l \leq m} \\ \alpha &= [\alpha_{kl}] \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \beta = [\beta_{kl}] \in \mathbb{R}^{m \times m} \end{aligned}$$

여기서  $\alpha, \beta$ 는 실수행렬이며,  $f_D(z)$ 는 특성함수(Characteristic function)라 한다.

즉 LMI영역이란  $z$ 와  $\bar{z}$ 의 선형행렬 부등식으로 표현되는 복소수 영역에서의 실수축에 대칭인 Convex한 Subset 영역을 의미한다.

위의 특성함수  $f_D(z)$ 를 나타내기 위해 우선 다음의 행렬을 정의한다.

$$\begin{aligned} M_D(A, X) &:= \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^T \otimes (AX)^T \\ &= [\alpha_{kl}X + \beta_{kl}AX + \beta_{kl}^T XA^T]_{1 \leq k, l \leq m} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서,  $\otimes$ 은 크로넬커 곱(Kronecker product)을 의미한다. 따라서 동적시스템  $\dot{x} = Ax$ 의 모든 고유치가 복소평면  $D$ 에 존재하기 위한 특성함수와

이에 대한 LMI조건들은 식(17)~(19)와 같이 표현된다.

1) 좌반평면  $\text{Re}(z) < -\alpha$ 인 경우 :

$$\text{특성함수 } f_D(z) = z + \bar{z} + 2\alpha < 0$$

$$\text{LMI 조건 : } M_D(A, X) < 0, \exists X = X^T (> 0) \quad (17)$$

2) 중심  $(-q, 0)$ , 반경  $r$  인 Disk인 경우

$$\text{특성함수 } f_D(z) = \begin{bmatrix} -r & q+z \\ q+\bar{z} & -r \end{bmatrix} < 0$$

$$\text{LMI 조건 : } \begin{bmatrix} -rX & AX \\ XA^T & -rX \end{bmatrix} < 0, \exists X = X^T (> 0) \quad (18)$$

3) 원뿔 내각이  $2\theta$ 이고 원점인 경우

$$\text{특성함수 } f_D(z) = \begin{bmatrix} \sin \theta(z + \bar{z}) & \cos \theta(z - \bar{z}) \\ \cos \theta(z - \bar{z}) & \sin \theta(z + \bar{z}) \end{bmatrix} < 0$$

LMI 조건 :

$$\exists X = X^T (> 0)$$

$$\begin{bmatrix} \sin \theta(AX + XA^T) & -\cos \theta(AX - XA^T) \\ \cos \theta(AX - XA^T) & \sin \theta(AX + XA^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

이와 같이 개별적으로 정의된 LMI영역은 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

**[정리 1]** 행렬  $A$ 가 두 개의 LMI영역  $D_1$ 과  $D_2$ 에서 모두 안정하기 위한 필요충분조건은 두 LMI 영역  $D_1$ 과  $D_2$ 에 대해  $M_{D_1}(A, X) < 0, M_{D_2}(A, X) < 0$ 를 만족하는 양한정 대칭행렬  $X$ 가 존재하는 것이다.

증명 : 참고문헌 [6] 참조

또한 주어진 전달함수  $G(s)$ 의 상태공간 표현이 식(13)과 같이 표현되면 전달함수  $G(s)$ 의  $H_\infty$ 노름은 다음의 정리에 따른다.

**[유계 실정리(Bound Real Lemma)]** 전달함수

$$G(s) \text{의 상태공간표현} (G(s) := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}) \text{과 어떤}$$

$\gamma$ 가 주어진다고 하자. 다음의 명제는 등가이다<sup>7)</sup>.

(i)  $A$ 가 안정인 동시에  $\|G(s)\|_\infty < \gamma$

(ii)  $\|D\| < \gamma$  이고, 리카치(Riccati)부등식

$$AX + XA^T + BB^T + M < 0$$

단,  $M = (XC^T + BD^T)(\gamma^2 I - DD^T)^{-1}(XC^T + BD^T)^T$

을 만족하는 정정(Positive definite) 대칭행렬  $X > 0$ 가 존재한다.

충분조건은 식(21)~(23)을 동시에 만족하는 정정 대칭행렬  $X$ 와 변수  $Y$ 가 존재하는 것이다.

(iii) 선형행렬부등식

$$\begin{pmatrix} AX+XA^T & XC^T & B \\ CX & -\gamma I & D \\ B^T & D^T & -\gamma I \end{pmatrix} < 0$$

을 만족하는 정정 대칭행렬  $X > 0$ 가 존재한다.

$$1) \begin{pmatrix} M(X, Y) & \tilde{B}_w & X \tilde{C}_p^T \\ \tilde{B}_w^T & -\gamma I & \tilde{D}_w^T \\ \tilde{C}_p X & \tilde{D}_w & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (21)$$

$$2) \tilde{A}_p X + X \tilde{A}_p^T + \tilde{B}_p Y + Y^T \tilde{B}_p^T < -2\alpha X \quad (22)$$

### 3.3 LMI에 의한 제어기 설계방법

3.1절에서 나타낸 식(10)의 시스템 표현에 있어서 불확실성을 포함하는 계수행렬  $\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p$ 를 파라미터  $\theta$ 로 하여 표현하면 식(20)과 같다.

$$3) \begin{bmatrix} \sin \theta A_{11} & -\cos \theta A_{12} \\ \cos \theta A_{21} & \sin \theta A_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_p &= \sum_{i=0}^k \theta_i \bar{A}_i \\ \tilde{B}_p &= \sum_{i=0}^k \theta_i \bar{B}_i \\ \tilde{C}_p &= \sum_{i=0}^k \theta_i \bar{C}_i \\ \sum_{i=0}^k \theta_i &= 1, \theta \geq 0, i=1, \dots, k \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} M(X, Y) &= \tilde{A}_p X + X \tilde{A}_p^T + \tilde{B}_p Y + Y^T \tilde{B}_p^T \\ A_{11} &= (\tilde{A}_p X + X \tilde{A}_p^T + \tilde{B}_p Y + Y^T \tilde{B}_p^T) \\ \text{단, } A_{12} &= (\tilde{A}_p X - X \tilde{A}_p^T + \tilde{B}_p Y - Y^T \tilde{B}_p^T) \\ A_{21} &= (\tilde{A}_p X - X \tilde{A}_p^T + \tilde{B}_p Y - Y^T \tilde{B}_p^T) \\ A_{22} &= (\tilde{A}_p X + X \tilde{A}_p^T + \tilde{B}_p Y + Y^T \tilde{B}_p^T) \end{aligned}$$

증명 : 식(17), 식(19)의  $A$ 행렬 대신에  $A_{ci}$ 을 적용하여 변수 변환법을 적용하면 된다. 이 때 상태 피드백 제어칙  $K$ 는

$$K = Y X^{-1} \quad (24)$$

여기서  $\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i$ 는 단점행렬(Vertex matrix)이고, 식(20)으로 표현되는 집합을 행렬 폴리토프라 부른다<sup>4)</sup>. 따라서 Fig. 2로 표현된 적분형 서보계에 대해 식(20)의 단점행렬로 표현된 시스템의 페루프 극점은 행렬  $A_{ci} = (\tilde{A}_p + \tilde{B}_p K)$ 의 고유치에 해당된다. 또한 각 페루프의 극점이 설계사양을 만족하는 LMI의 영역에 위치하도록 하는 상태 피드백 제어칙 설계는  $M_D(\tilde{A}_p + \tilde{B}_p K, X) < 0$ 와  $X > 0$ 을 만족하는 계인  $K$ 를 구하는 것이다. 이 때  $KX$ 에 대한 것은  $K$ 와  $X$ 에 대해 Convex조건을 만족하지 않으므로 이를 해결하기 위한 기법으로 변수 소거법 또는 변수 변환법을 이용된다. 본 연구에 있어서는 3.1절의 설계 사양을 만족하도록 유계 실정리 및 극 배치 영역 조건 식(17), 식(19)를 적용하여  $K$ 와  $X$ 에 대해 Convex Suboptimization제로 변환하기 위해 변수 변환법을 이용하면 아래의 정리를 얻는다.

로 된다.

### 3.4 상태피드백 제어칙 설계결과

상태 피드백 제어칙을 구하기 위해 식(10)에 표현된 시스템의 물리 파라미터의 변동에 대한 값들은 Table 2에 나타냈다.

또한 과도상태의 응답을 개선하기 위해 정착시간은 1[s]이내, 스텝 입력시 오버슈트가 제로인 것으로 설계사양을 선정하였다.

Table 2 Physical parameters

	min.	max.
M[kg]	0.524	1.572
R[Ω]	16.39	49.17

따라서 Table 2에 나타낸 각각의 파라미터 변동에 대해 3.1절에 서술한 다목적 설계사양들을 가지고 정리 2를 만족하는 상태 피드백 제어칙을 구한 결과는 아래와 같다<sup>8)</sup>.

$$\begin{aligned} K &= [F \ G] \\ &= [-1.710 \times 10^5 \quad -5.772 \times 10^3 \quad 1.384 \times 10^3 \quad 3.001 \times 10^5] \end{aligned}$$

**[정리 2]** 식(10)으로 주어진 시스템에 대해서 페루프계가 안정하고 지정된 영역에 극이 존재하며  $w$ 에서  $y$ 까지의 전달함수  $\|G_{yw}\|_\infty < \gamma$ 를 만족시키는 상태 피드백 제어칙  $K$ 가 존재하기 위한 필요

이 때 구해진 상태 피드백 제어칙에 의해, 공칭 시스템에 대한 극점은 식(25)와 같고

$$eig(A_{cl})_{nom} = \begin{bmatrix} -4.3922 \times 10^2 \\ -82.281 \\ -8.3229 \\ -7.9376 \end{bmatrix} \quad (25)$$

이는 극 배치 영역에 대한 설계 사양을 만족하고 있음을 알 수 있다. 또한 각각의 단점행렬들에 대하여 폐루프 시스템의 극점의 위치를 Fig. 4에 나타내었다.

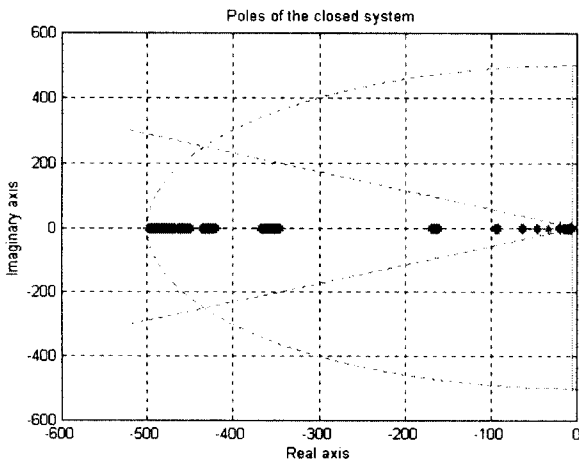


Fig. 4 The plot of poles

모든 단점에 대하여 이 시스템의 극점들은 설계 사양으로 선정된 영역에 존재함을 알 수 있으며 이는 만족할만 한 과도응답을 얻을 수 있다는 정보를 제공하고 있다.

그리고 Fig. 2에서 입력  $w$ 에서 출력  $y$ 까지의 전달함수를 감도함수(Sensitivity function)  $S(s)$ , 입력  $r$ 에서 제어대상의 출력  $y$ 까지의 전달함수를 상보 감도함수(Complementary sensitivity function)  $T(s)$ 라 하면,  $S(s)$  및  $T(s)$ 는 식(26), (27)과 같이 나타낼 수 있다.

$$S(s) = N(s)/(sD(s) + N(s)) \quad (26)$$

$$T(s) = sD(s)/(sD(s) + N(s)) \quad (27)$$

단,  $\frac{N(s)}{D(s)} \triangleq C_p(sI - A_1)^{-1}B_1$

$$A_1 = A_p + B_pF, \quad B_1 = B_pG$$

이는 식(28)과 같은 관계가 있다.

$$T(s) + S(s) = I \quad (28)$$

따라서 각 단점들에 대해 식(28)의 만족 여부를 조사한 것은 Fig. 5에 나타내었다. 이 그림에서 알 수 있듯이, 식(28)이 만족되고 있음을 보여주고 있다.

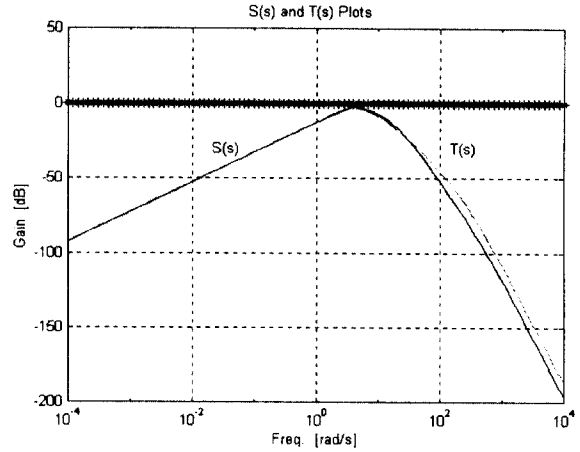


Fig. 5 The plot of  $S(s)$  and  $T(s)$

#### 4. 시뮬레이션 및 고찰

3장에서 설계된 상태 피드백 제어칙을 가지고 Fig. 2와 같은 제어계를 구성하여 시뮬레이션을 수행하였다. 우선 시뮬레이션 방법은 아래와 같다.

가) 스텝상의 기준입력을 가한 경우

나) 출력측에 스텝 상으로 외란을 가한 경우

각 시뮬레이션의 경우에 있어 물리 파라미터의 변동은 Table 2에 나타난 값으로 수행하였다. 또한 실험결과의 그림에 표기된 Case \*의 의미는 다음과 같다.

Case 1 :  $M = M_{min}, R = R_{min}$

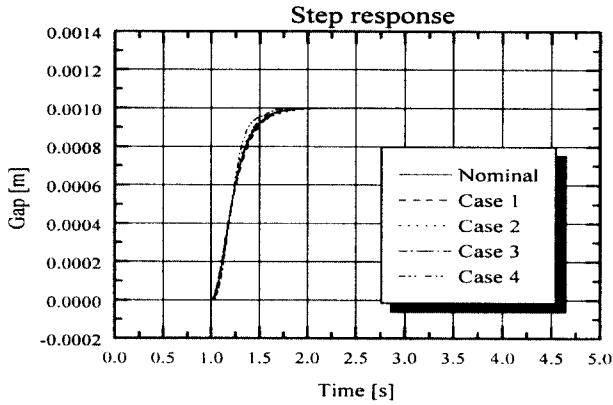
Case 2 :  $M = M_{max}, R = R_{min}$

Case 3 :  $M = M_{min}, R = R_{max}$

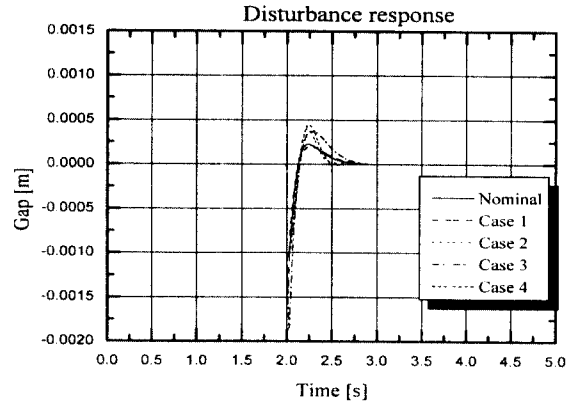
Case 4 :  $M = M_{max}, R = R_{max}$

Fig. 6.(a)는 가)에 해당하는 응답실험으로서 부상 1[s]후에 기준 위치를 스텝적으로 1[mm]를 변경한 경우의 실험결과이다. 이 때 평형점은 7[mm]이므로, 세로축의 0.000[m]은 7[mm]를 의미한다. 이 실험의 결과로부터 알 수 있듯이 모든 물리 파라미터 변동에 대해서도 1[s]내에 오버슈트가 없이 부상하고 있음을 보여주고 있고, 오차도 발생하지 않음을 알 수 있어, 설계 사양을 만족하고 있으며, 적분형 서보계의 작용을 하고 있음을 보여주고 있다.

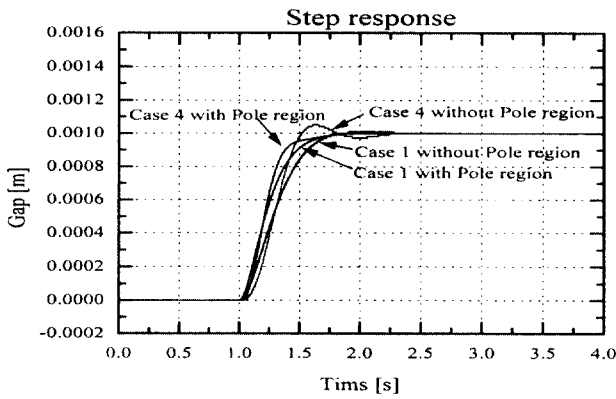
Fig. 6.(b)는 극 배치 영역을 고려한 경우와  $H_\infty$



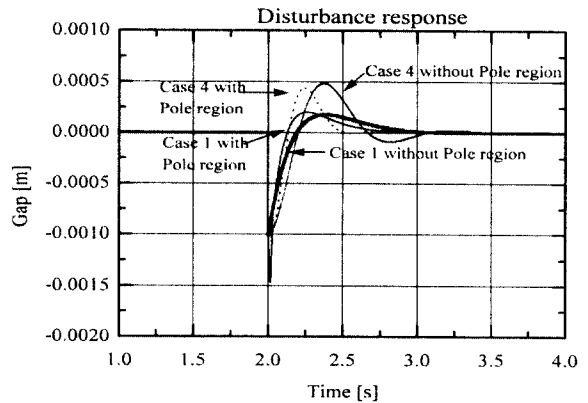
(a)



(a)



(b)



(b)

Fig. 6 Step response

Fig. 7 Disturbance response

노움 조건만<sup>11)</sup>을 만족하는 경우에 대해 응답실험들을 비교한 것이다. 여기서 Case.4인 경우를 보면극 배치 영역을 고려하지 않은 경우는 오버슈트가 발생하고, 정착시간이 길어지는 현상이 있다. 따라서 극 배치 영역을 고려한 경우가 응답이 우수함을 알 수 있다.

Fig. 7.(a)는 나)에 해당하는 실험의 결과로 부상 후 2[s]에 스텝적인 외란을 출력측에 가한 경우의 응답이다. 이 경우의 응답실험에 있어, Table 2에 표현된 물리 파라미터의 변동에 대해서도 가해진 외란을 1[s]후에 제거하면서 안정하게 부상하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 7.(b)는 극배치 영역을 고려한 경우와  $H_{\infty}$  노움 조건만을 만족하는 경우에 대해 외란응답을 비교한 것이다. 여기서 Case.1의 경우는 응답이 비슷하지만, Case.4인 경우는 많은 응답의 차이를 보이고 있음을 알 수 있다. 이는 파라미터의 변동이 큰 경우 적분기 게인이 적기 때문으로 일어나는 현상으로 간주된다.

## 5. 결론

본 연구에서는 적분형 서보계로 구성된 자기부상 제어계에 대해 과도응답 개선을 위해 극 영역을 설정하고, 이를 만족하는 상태피드백 제어칙을 선형행렬부동식으로 정식화한 후, 이를 범용소프트웨어로 설계하고, 시뮬레이션을 통하여 다음의 결과를 얻었다.

- 1) 선형 행렬부동식으로 정식화된 수식에 의해 설계된 제어기를 가지고 구성된 자기부상계의 모든 폐루프 극점은 지정된 영역에 존재함을 알 수 있었다. 또한 물리 파라미터 변동에 대해서도 제어계의 강인성이 보증되고 있음을 알 수 있다.
- 2) 구성된 제어계는 기준입력에 오버슈트 및 정상편차없이 추종하고 있음을 보여주고 있으며, 또한 극 지정을 고려한 경우가 추종성능 및 외란 제거성능이 우수함을 알 수 있다.

향후 관측기를 설계하여 실제실험을 통한 검증

이 금후의 과제가 될 것이다.

### 참고문헌

1. 日本電氣學會, “磁氣浮上と磁氣軸受”, コロナ社, pp. 6~36, 1993
2. 김창화, “센서리스 자기 부상 시스템에 강인한 위치제어기 설계에 관한 연구”, Ph. D. Thesis, Pku. Univ. Korea, 1997
3. S. Boyd et al., “Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory”, SIAM, 1994
4. 小原, 松江, “最適化を用いた制御系設計”, 日本システム/制御/情報學會誌, Vol. 38, No. 3, pp. 138~146, 1994
5. 池田, “2自由度積分形最適サーボ系の構成”, 計測自動制御學會論文集, Vol. 27, No. 8, pp. 907~914, 1991
6. M.Chilali et al., “ $H_{\infty}$  Design with Pole Placement Constraints : An LMI Approach”, IEEE Trans. Automat.Contro., Vol. 41, No. 3, pp. 358~367, 1996
7. C.Scherer, “The Riccati inequality and state-space  $H_{\infty}$ -optimal control”, Ph. D. thesis, Univ. Wurzburg, Germany, 1990
8. P. Gahinet et al., “LMI Control Toolbox”, The Math Works Inc., 1994
9. P. Gahinet et al., “A Linear Matrix Inequality Approach to  $H_{\infty}$  Control”, Int. J. Robust Nonlinear Control, Vol. 4, pp. 421~448, 1994
10. T. Iwasaki et al., “All Controllers for the General  $H_{\infty}$  Control Problem : LMI Existence Conditions and State Space Formulas”, Automatica, Vol. 30, No. 8, pp. 1307~1317, 1994
11. 김창화, 양주호, “선형행렬부등식을 이용한 자기 부상계의 강인성 제어”, KSPSE, Vol. 3, No. 4, pp. 79~85, 1999