

# 두 이동질량이 단순보의 동특성에 미치는 영향

## Influence of Two Moving Masses on Dynamic Behavior of a Simple Beam

윤한익 · 최창수 · 임순홍

H. I. Yoon, C. S. Choi and S. H. Im

**Key Words** : Dynamic Behavior(동특성), Dynamic Response(동적응답), Moving Mass(이동질량), Amplitude(진폭), Transverse Displacement(횡변위), Mode(진동형), Coupling(연성)

**Abstract** : On the dynamic behavior of a simple beam the influences of the velocities and distance of two moving masses have been studied by numerical method. The instant amplitude of a simple beam is calculated and analyzed for each position of the moving masses represented by the time functions. As increasing the velocities of two moving masses on the simple beam, the amplitude of the transverse vibration of the simple beam is decreased and the frequency of the transverse vibration of the simple beam is increased. As the distance between two moving masses increase, the transverse displacement of the simple beam is decrease. The simple beam is very stable in second mode at  $\bar{a} = 0.5$  and in third mode at  $\bar{a} = 0.3$ .

### 1. 서론

이동하중에 대한 연구는 1847년 영국의 Chester bridge의 파괴가 동기가 되었다. 이동하중을 받는 구조물은 철도, 교량, 도로 등으로부터 잠수함, 우주선등에 이르기까지 그 종류가 다양하며, 공학자들은 이동하중에 대한 이들의 동적응답에 많은 관심을 가지고 있다.

Steele<sup>1,2)</sup>은 탄성기초가 없이 유한지지로 된 Bernoulli-Euler 보에 빠른 이동집중하중이 작용할 때의 해를 Fourier적분으로 구하였다. 또한 일정속도의 이동하중이 반 무한 길이 Timoshenko보에 계단하중으로 작용한다고 가정하여 여러 가지 범위에서 구한 근사해는 정상해에 가까웠다. Lin과 Daniel<sup>3)</sup>는 주기적으로 많은 탄성지지점을 갖는 Bernoulli-Euler 보에서 주파수응답 행렬을 결정하기 위하여 해석적인 방법을 이용하였고 등간격으로 부착된 감쇠를 갖는 계에서는 수치해석으로 응답을 구하였다. 그리고 주기적으로 지지된 연속보

의 구조물에서 진동응답을 전달 행렬법(Transfer matrix methods)와 정규 모드법(Normal mode methods)을 써서 구하였다. Chonan<sup>4)</sup>은 축하중과 이동하중을 받으며 탄성적으로 지지되어있는 Timoshenko보에서 횡진동에 관한 해를 구하고 축하중의 영향을 논하였다. 최근 Esmailzadeh<sup>5)</sup> 등은 균일분포 이동질량에 의한 보의 진동문제를 해석하였다.

본 연구에서는 크기가 일정하고, 일정간격을 유지하는 두 이동질량의 속도와 그 간격이 단순보의 동특성에 미치는 영향을 단순보의 진폭을 구하여 해석하였다. 그리고 단순보의 진폭에 영향을 미치는 이들 두 인자의 상호 연성관계를 고찰하였다. 계의 운동방정식은 Lagrange 방정식을 이용하여 유도하였고, Runge-Kutta 방법으로 수치계산 하였다.

### 2. 이론해석

일정간격을 유지하는 두 개의 집중질량이 단순 지지된 탄성보의 위를 일정속도로 이동하는 탄성계의 개략도는 Fig. 1과 같다. 여기서  $M_1$  과  $M_2$  는 집중질량들이고  $a$  는 두 집중질량간의 거리가

접수일 : 2000년 6월 10일  
윤한익 : 동의대학교 기계산업시스템공학부  
최창수 : 부산정보대학 기계시스템공학부  
임순홍 : (주)진영금속

다. 또  $v$  는 질량  $M_1$  과  $M_2$  의 속도를 나타낸다. 이동질량의 속도와 두 이동질량 간의 간격이 단순보의 동특성에 미치는 영향을 해석하기 위하여 Lagrange 방정식으로 계의 운동방정식을 유도한다.

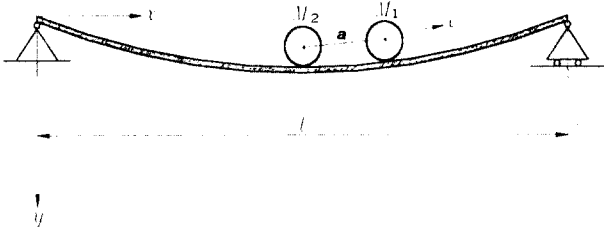


Fig. 1 A simple beam with two moving masses upon

2.1 단순보의 에너지식

단순보의 진동형은  $\sum_{i=1}^{\infty} d_i(t) \phi_i(x)$ 로 표현되므로 단순보의 횡변위와 속도는

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(t) \phi_i(x) \quad (1)$$

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{d}_i(t) \phi_i(x) \quad (2)$$

이다. 여기서  $(\cdot)$ 는 시간  $t$ 에 대한 미분이고,  $\phi_i(x)$ 는

$$\phi_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (3)$$

로써 단순보의 정규직교 고유함수이며,  $d_i(t)$ 는 시간의 함수이다.

그러므로 단순보의 운동에너지는

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int (\dot{y})^2 dm \\ &= \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{d}_i^2(t) \int_0^l \phi_i^2(x) dx \\ &= \frac{ml}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{d}_i^2(t) \end{aligned} \quad (4)$$

이고,  $m$ 은 단순보의 단위 길이당 질량,  $l$ 은 단순보의 길이이다.

단순보의 포텐셜에너지는

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^l EI (y'')^2 dx \\ &= \frac{(i\pi)^4}{2} \frac{EI}{l^4} \sum_{i=1}^{\infty} d_i^2(t) \int_0^l \phi_i^2(x) dx \\ &= \frac{(i\pi)^4}{2} \frac{EI}{2 l^3} \sum_{i=1}^{\infty} d_i^2(t) \end{aligned} \quad (5)$$

이다. 여기서  $EI$ 는 단순보의 굽힘강성계수이다.

2.2 이동질량의 에너지 식

두 이동질량  $M_1$  과  $M_2$ 의 수평속도가  $v$ 이면 그 각각의 수평변위는

$$x_1 = \int_0^t v dt \quad (6)$$

$$x_2 = \int_0^t v dt - a \quad (7)$$

이고, 수직 변위를  $y_{M_1}$  과  $y_{M_2}$ 이라고 하면 두 이동질량  $M_1$ 과  $M_2$ 는 집중질량이므로 그 운동에너지는

$$T_M = \frac{1}{2} M_1 (\dot{y}_{M_1}^2 + v^2) + \frac{1}{2} M_2 (\dot{y}_{M_2}^2 + v^2) \quad (8)$$

이고, 그 포텐셜에너지는

$$V_M = -M_1 g y_{M_1} - M_2 g y_{M_2} \quad (9)$$

이다. 여기서  $g$ 는 중력가속도이고,  $y_{M_1}$ 과  $y_{M_2}$ 는 이동 질량  $M_1$ 과  $M_2$ 의 연직방향 변위인 동시에 단순보의 횡변위이다. 즉 두 이동질량들은 단순보와 분리되지 않고 접촉된 상태로 이동한다고 본다. 따라서

$$y_{M_1} = y(x_1, t) \Big|_{x_1 = \pi(t)} \quad (10)$$

$$y_{M_2} = y(x_2, t) \Big|_{x_2 = \pi(t)} \quad (11)$$

$$\dot{y}_{M_1} = \left( \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} \right) \Big|_{x_1 = \pi(t)} \quad (12)$$

$$\dot{y}_{M_2} = \left( \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} \right) \Big|_{x_2 = \pi(t)} \quad (13)$$

이다. 여기서

$$x_1 = f_1(t) = \int_0^t v dt \quad (14)$$

$$x_2 = f_2(t) = \int_0^t v dt - a \quad (15)$$

$$\phi_i[f_1(t)] = \sin \frac{i\pi x_1}{l} = \sin \frac{i\pi vt}{l} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \phi_i[f_2(t)] &= \sin \frac{i\pi x_2}{l} \\ &= \sin \frac{i\pi}{l}(vt - a) \end{aligned} \quad (22)$$

임을 고려하고, 식(1)을 식(12),(13)에 대입하면

$$\begin{aligned} \dot{y}_{M_1} &= v \sum_{i=1}^{\infty} d_i(t) \phi_i[f_1(t)] \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{d}_i(t) \phi_i[f_1(t)] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_{M_2} &= v \sum_{i=1}^{\infty} d_i(t) \phi_i[f_2(t)] \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{d}_i(t) \phi_i[f_2(t)] \end{aligned} \quad (17)$$

이다. 식(16)과 (17)을 식(8)에 대입하여 정리하면 전체 이동질량  $M$ 의 운동에너지는 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} T_M &= \frac{1}{2} M_1 \left\{ v^2 \sum_{i=1}^{\infty} d_i^2(t) \phi_i'^2[f_1(t)] \right. \\ &+ 2v \sum_{i=1}^{\infty} d_i(t) \dot{d}_i(t) \phi_i[f_1(t)] \phi_i'[f_1(t)] \\ &+ \left. \sum_{i=1}^{\infty} \dot{d}_i^2(t) \phi_i^2[f_1(t)] \right\} \\ &+ \frac{1}{2} M_2 \left\{ v^2 \sum_{i=1}^{\infty} d_i^2(t) \phi_i'^2[f_2(t)] \right. \\ &+ 2v \sum_{i=1}^{\infty} d_i(t) \dot{d}_i(t) \phi_i[f_2(t)] \phi_i'[f_2(t)] \\ &+ \left. \sum_{i=1}^{\infty} \dot{d}_i^2(t) \phi_i^2[f_2(t)] \right\} \\ &+ \frac{1}{2} v^2 (M_1 + M_2) \end{aligned} \quad (18)$$

### 2.3 계의 운동방정식

계의 운동방정식을 유도하기 위하여 앞에서 구한 일과 에너지 식을 다음의 Lagrange 방정식에 대입하여 정리한다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (19)$$

여기서 일반좌표  $q_i$ 는  $d_i$ 이고,  $L$ 은 Lagrangian으로서

$$L = (T + T_M) - (V + V_M) \quad (20)$$

이다. 식(20)를 식(19)에 대입하고, 또 단순보의 고유함수

를 고려하여 정리하면 계의 운동방정식은 다음 식과 같다

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{ml}{2} + M_1 \sin^2 \left( \frac{i\pi vt}{l} \right) + M_2 \sin^2 \frac{i\pi}{l}(vt - a) \right\} \ddot{d}_i &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ M_1 v^2 \left( \frac{i\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{i\pi vt}{l} \right) + M_2 v^2 \left( \frac{i\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \frac{i\pi}{l}(vt - a) \right. \\ &- \left. \left( \frac{i\pi \right)^4 \frac{EI}{l^3} \right\} d_i + M_1 g \sum_{i=1}^{\infty} \sin \left( \frac{i\pi vt}{l} \right) \\ &+ M_2 g \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi}{l}(vt - a) \end{aligned} \quad (23)$$

### 2.4 운동방정식의 무차원화

계의 운동방정식(19)를 무차원화 시키기 위하여 다음의 매개변수를 도입한다.

$$\begin{aligned} \overline{M}_1 &= \frac{M_1}{ml}, \quad \overline{M}_2 = \frac{M_2}{ml}, \quad \overline{E} = \frac{EI}{ml^3}, \quad \overline{g} = \frac{g}{l}, \\ \overline{d} &= \frac{d}{l}, \quad \overline{v} = \frac{v}{l}, \quad \beta = \overline{v}t, \quad \overline{a} = \frac{a}{l} \end{aligned} \quad (24)$$

매개변수 (24)를 계의 운동방정식(23)에 대입하여 정리하면 식(25)와 같이 무차원화된 계의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} + \overline{M}_1 \sin^2(i\beta) + \overline{M}_2 \sin^2 i\pi(\beta - \overline{a}) \right\} \overline{\ddot{d}}_i &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ (i\pi)^2 \overline{v}^2 \overline{M}_1 \cos^2(i\beta) + (i\pi)^2 \overline{v}^2 \overline{M}_2 \cos^2 i\pi(\beta - \overline{a}) \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} (i\pi)^4 \overline{E} \right\} \overline{d}_i + \overline{M}_1 \overline{g} \sum_{i=1}^{\infty} \sin(i\beta) + \overline{M}_2 \overline{g} \sum_{i=1}^{\infty} \sin i\pi(\beta - \overline{a}) \end{aligned} \quad (25)$$

운동방정식(25)는 2계상미분방정식 이므로 다음과 같이 보조기호

$$\overline{z}_i = \overline{\ddot{d}}_i, \quad \overline{z}_i = \overline{\dot{d}}_i = f(\overline{d}_i, \overline{z}, t) \quad (26)$$

를 사용하여 변수를 치환하면 1계 상미분방정식계

로 변환된다. 따라서 1계상미분방정식계는 행렬을 사용하여 다음 식(27)로 나타내어 진다.

$$[A]\{\bar{X}\} = [B]\{\dot{X}\} + \{C\} \quad (27)$$

여기서 무차원화된 좌표 상태벡터  $\{\bar{X}\}$ 와  $\{\dot{X}\}$ 는 각각 다음과 같다.

$$\{\bar{X}\} = \{\bar{d}_i, \bar{z}_i\}^T \quad (28)$$

$$\{\dot{X}\} = \{\dot{\bar{d}}_i, \dot{\bar{z}}_i\}^T \quad (29)$$

### 3. 수치해석 결과 및 고찰

두 이동질량의 크기를 같게 두고( $\bar{M}_1 = \bar{M}_2 = \bar{M}$ ) 계의 동특성을 지배하는 두 이동질량간의 간격, 그리고 이동 속도의 크기의 여러가지 양에 대하여 단순보의 횡진동의 제3차 모드까지 그 동특성을 계산하여 그림으로 나타내고 비교하였다.

이동질량이 단순보 위를 통과하는 시간을 40등분하여 이동질량이 단순보 위에 위치하는 각 순간의 단순보 중앙점의 변위(1차모드의 경우) 즉 순간진폭을 계산함으로써 이동질량이 통과하는 과정 중의 보의 동특성의 변화를 나타내었다.

수치계산을 위한 입력 데이터로써, 단순보의 종탄성계수는  $206 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , 단면2차 모우멘트는  $4.0 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ , 길이는 10m, 그리고 단위 길이당의 질량은 100kg으로 하였다.

이동질량의 크기는 20kg, 이동질량의 속도는  $\bar{v} = 0.1, 0.3, 0.5$ 를 선택하였다. 이러한 입력 데이터에 대하여 단순보의 동특성을 제1차, 제2차 그리고 제3차 횡진동 모드까지 계산하여 그림으로 나타내었으며, 그림에서 횡축은 단순보를 나타내므로 좌측단을 이동하중의 출발점으로 한다. 따라서 횡축의 좌측을 단순보의 전반부, 우측을 후반부라고 한다.

#### 3.1 이동질량의 속도 영향

Fig.2는 하나의 이동질량이 단순보위를 이동하는 동안의 단순보 중앙점의 변위 변화를 나타내었다. Fig.2의 결과를 보면 우선 변위 스케일이 Fig.3에 비해 작으며 이동질량 무차원속도  $\bar{v} = 0.3$ 의 경우 이동질량의 위치가 단순보의 종단부 위치에서 두 개의 질량에 비해 작은 변위가 나타남을 볼 수 있다.

Fig. 3 ~ Fig. 11은 각 20kg의 두 이동질량이

거리의 변화에 따라 주어진 세 속도로 이동함에 따라 단순보의 횡진동에 미치는 영향을 제1차, 2차 그리고 3차모드까지 도시하였다. Fig.3 ~ Fig. 5는 이동질량의 간격이 1m일 때 1차, 2차 그리고 3차 모드를 나타낸 것이다. Fig. 3에서 저속인  $\bar{v} = 0.1$ 에서는 보의 전구간을 이동하는 동안 횡변위는 한 방향으로만 일어나며, 앞선 질량  $M_1$ 이  $\bar{x} = 0.7$ 정도에서 최대의 횡변위가 나타난다. 중속인  $\bar{v} = 0.3$ 에서는 거의 한사이클의 횡진동을 수행하며 0.1일 때와 마찬가지로 최대변위는  $\bar{x} = 0.7$ 에서 나타난다. 또한 속도가 빨라짐에 따라 진동수가 증가함을 보여준다. Fig. 4, Fig. 5에서는 Fig.3에 비해 진동수가 약 2배, 4배정도 증가하였고 이동질량의 위치가 단순보의 전반부쪽으로 조금씩 이동되면서 최대진폭이 나타난다. 또한 이동질량의 속도영향에서 굽힘강성계수( $EI$ )가 단순보의 진동에 미치는 영향을 고려하기 위해 단면 형상 변화로 굽힘강성계수를 조절하여 고찰한 결과, 단순보의 변위가 증가된 진동형태를 나타내고 종단부 최고점변위가 변화됨을 보였다.

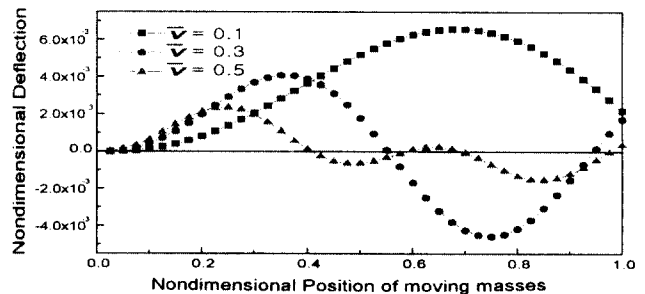


Fig. 2 Time variation of deflection simple beam for three values of  $\bar{v}$  ( $\bar{a} = 0.0$  first mode)

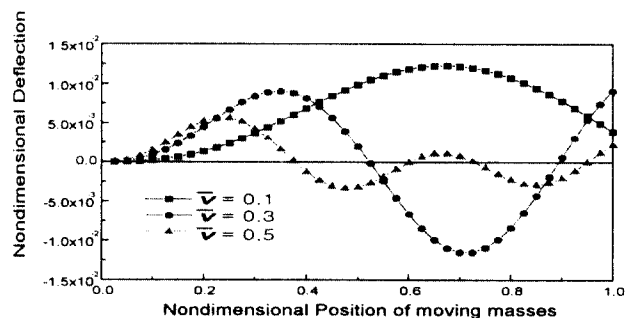


Fig. 3 Time variation of deflection of simple beam for three values of  $\bar{v}$  ( $\bar{a} = 0.1$  first mode)

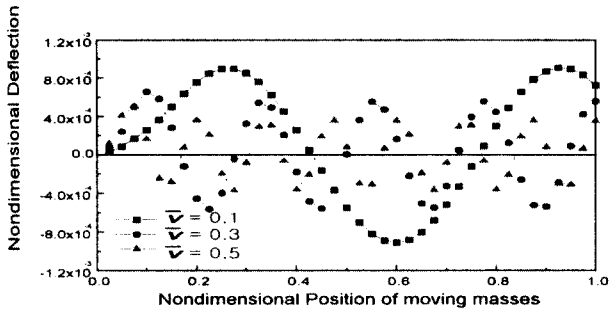


Fig. 4 Time variation of deflection of simple beam for three values of  $\bar{v}$  ( $\bar{a} = 0.1$  second mode)

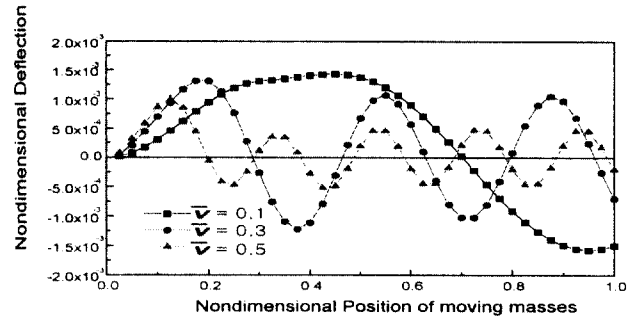


Fig. 7 Time variation of deflection of simple beam for three values of  $\bar{v}$  ( $\bar{a} = 0.3$  second mode)

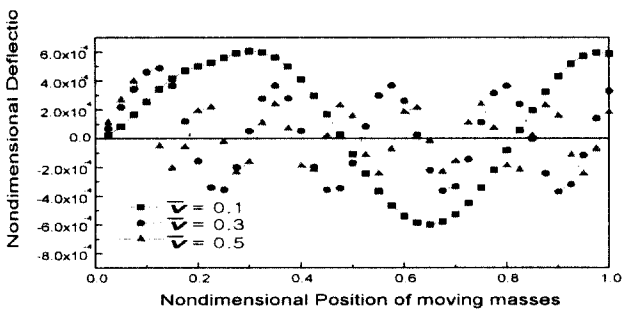


Fig. 5 Time variation of deflection of simple beam for three values of  $\bar{v}$  ( $\bar{a} = 0.1$  third mode)

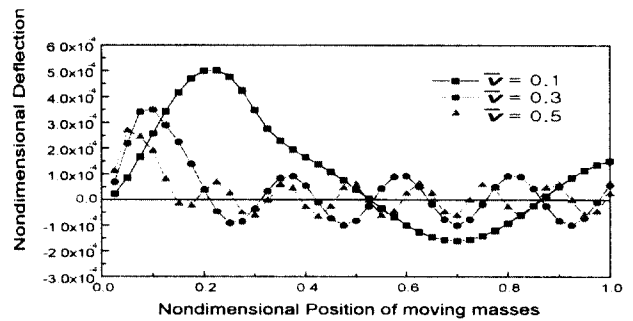


Fig. 8 Time variation of deflection of simple beam for three values of  $\bar{v}$  ( $\bar{a} = 0.3$  third mode)

Fig. 6 ~ Fig. 8은 이동질량의 간격이 3m일 때 1차, 2차 그리고 3차 모드를 표현한 것이다. Fig. 6에서 저속인  $\bar{v} = 0.1$ 에서는 보의 횡변위가  $\bar{x} = 0.3 \sim 0.5$ 까지 거의 일정하다. Fig. 7에서  $\bar{v} = 0.3$ ,  $\bar{v} = 0.5$ 일 때 이동질량의 위치가 단순보의 전반부에서 최대변위를 나타내고 앞선 질량의 위치가  $\bar{x} = 0.3$  이후로 움직일 때 단순보는 비교적 작은 진폭을 나타낸다.

Fig.9 ~ Fig.11은 이동질량의 간격이 5m일 때 1차, 2차 그리고 3차 모드를 나타낸 것이다. Fig.9에서 저속( $v=1\text{m/s}$ )과 중속( $v=3\text{m/s}$ )의 최대 횡변위의 크기가 거의 유사함을 볼 수 있다. 저속( $v=1\text{m/s}$ )의 경우 보의 전구간에 걸쳐 완만한 경사를 가지고 증가한다. Fig. 10에서는 저속( $v=1\text{m/s}$ )일 때 앞선 질량  $M_1$ 의 위치가  $\bar{x} = 0.8$  정도, 그리고 중속( $v=3\text{m/s}$ ), 고속( $v=5\text{m/s}$ )에서는  $\bar{x} = 0.6$  정도부터 진폭이 미비해서 매우 안정한 상태를 나타낼 수 있다. Fig. 11에서는 저속( $v=1\text{m/s}$ )일 때 최대변위는 앞선 질량  $M_1$ 이  $\bar{x} = 0.8$ 에서 나타나고, 나머지 속도에서는 이동질량의 위치가 단순보의 후반부로 가면서 조금씩 변위의 증가를 보인다.

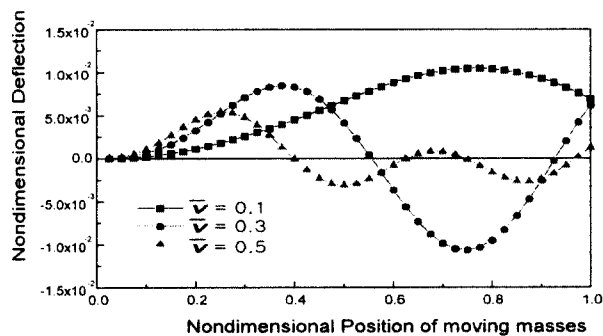


Fig. 6 Time variation of deflection of simple beam for three values of  $\bar{v}$  ( $\bar{a} = 0.3$  first mode)

### 3.3 이동질량의 간격에 의한 영향

Fig. 12 ~ Fig. 20은 각 20kg의 두 이동질량이 일정속도로 움직일 때 두 이동질량의 간격의 변화에 따른 단순보의 횡진동을 제1차, 2차 그리고 3차 모드까지 도시하였다.

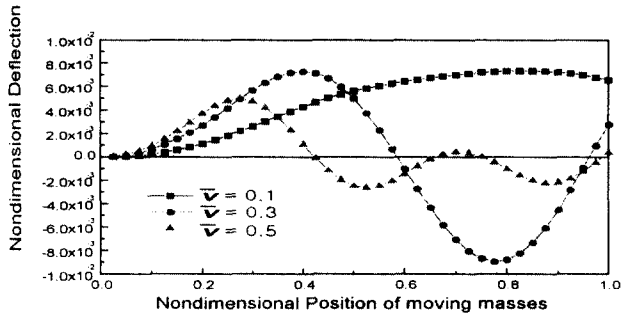


Fig. 9 Time variation of deflection of simple beam for three values of  $\bar{v}$  ( $\bar{a} = 0.5$  first mode)

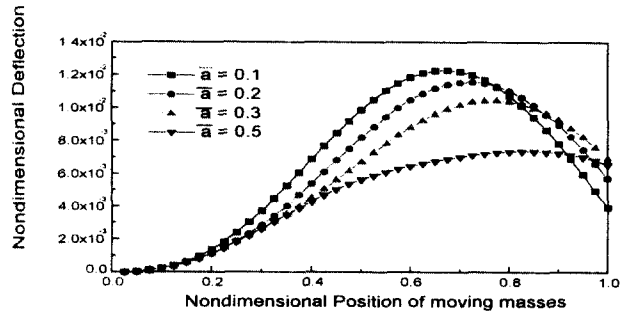


Fig. 12 Time variation of deflection of simple beam for four values of  $\bar{a}$  ( $\bar{v} = 0.1$ , first mode)

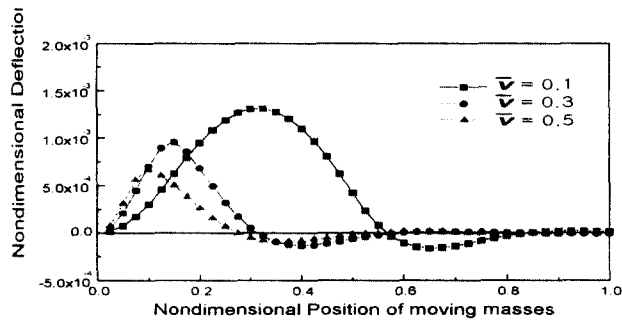


Fig. 10 Time variation of deflection of simple beam for three values of  $\bar{v}$  ( $\bar{a} = 0.5$  second mode)

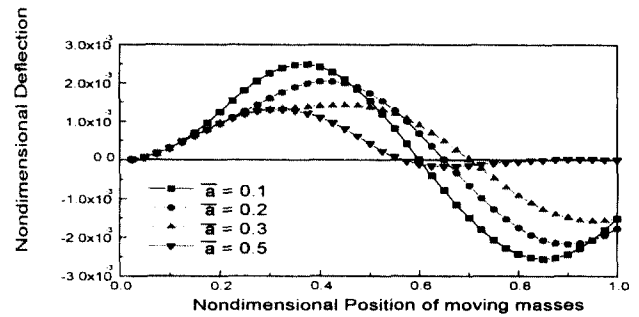


Fig. 13 Time variation of deflection of simple beam for four values of  $\bar{a}$  ( $\bar{v} = 0.1$ , second mode)

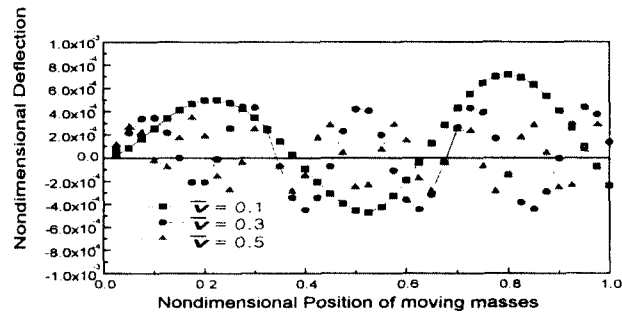


Fig. 11 Time variation of deflection of simple beam for three values of  $\bar{v}$  ( $\bar{a} = 0.5$  third mode)

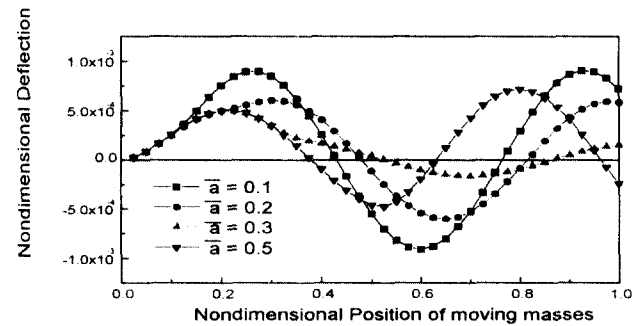


Fig. 14 Time variation of deflection of simple beam for four values of  $\bar{a}$  ( $\bar{v} = 0.1$ , third mode)

Fig. 12 ~ Fig. 14는  $\bar{v} = 0.1$  일 때 1차에서 3차 모드까지 도시한 것이다. Fig. 12에서 두 이동질량 사이의 간격이 증가함에 따라 진폭이 감소하고, 이동질량의 위치가 조금씩 보의 후반부로 이동할 때 최대진폭이 나타나는 현상을 보인다. Fig. 13에서 간격에 관계없이 약 한사이클 정도의 진동을 보이고 간격이 3m 일 때 진폭이 가장 작고, 이동질량의 위치가  $\bar{x} = 0.6$  이후일 때 조금씩 안정된 상태를 보인다. Fig. 14에서도 마찬가지로 간격이 3m

일 때 횡변위가 가장 작다는 것을 볼 수 있다.

Fig. 15 ~ Fig. 17은  $\bar{v} = 0.3$  일 때 1차에서 3차 모드까지 도시한 것이다. Fig. 15에서 단순보의 횡변위가 거의 한 사이클 이상의 횡진동을 수행하며 간격이 좁아짐에 따라 변위가 약간 커질뿐 거의 유사한 진동형태를 보이고 있다. Fig. 16에서는 간격이 5m를 제외하고, 모두 유사한 진동형태를 보이고 있으나, 간격이 5m 일 때 앞선 질량  $M_1$  이  $\bar{x} = 0.3$  이후부터 매우 안정된 상태를 보이고

있다. Fig. 17에서도 이동질량의 간격에 관계없이 유사한 진동형태를 보이고 간격이 3m일 때 앞선 질량  $M_1$ 이  $\bar{x} = 0.3$  이후부터 진폭이 매우 작아짐을 보이고 있다.

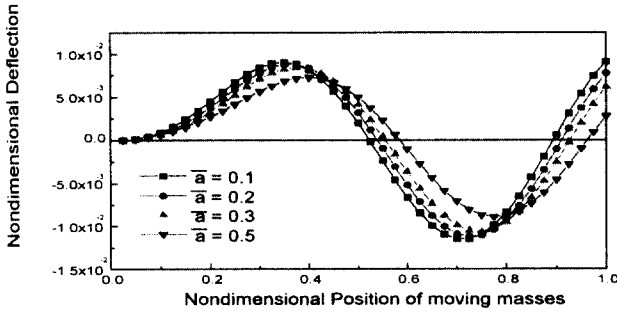


Fig. 15 Time variation of deflection of simple beam for four values of  $\bar{a}$  ( $\bar{v} = 0.3$ , first mode)

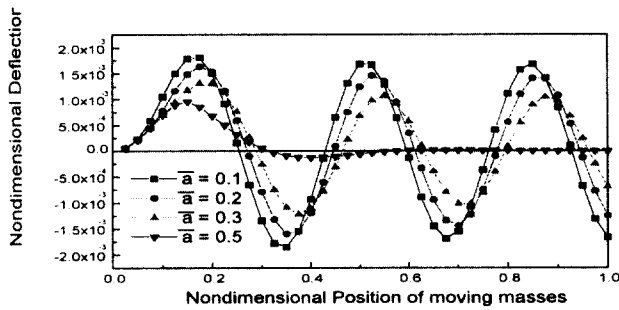


Fig. 16 Time variation of deflection of simple beam for four values of  $\bar{a}$  ( $\bar{v} = 0.3$ , second mode)

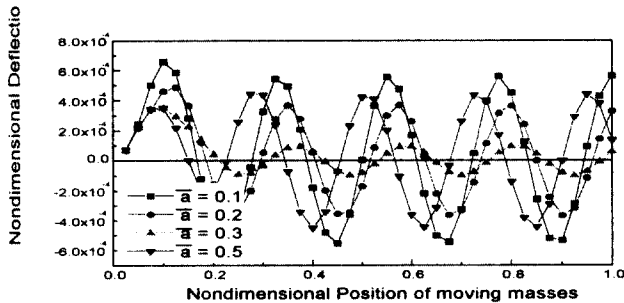


Fig. 17 Time variation of deflection of simple beam for four values of  $\bar{a}$  ( $\bar{v} = 0.3$ , third mode)

Fig. 18 ~ Fig.20은  $\bar{v} = 0.5$  일 때 1차에서 3차 모드까지 도시한 것이다. Fig. 18에서 단순보의 횡변위가 거의 두 사이클 이상의 횡진동을 수행하며

앞선 질량  $M_1$ 이  $\bar{x} = 0.3$  일 때 모두 최대 변위를 보이고 있다. Fig. 19에서는 앞선 질량  $M_1$ 이  $\bar{x} = 0.1$ 일 때 모두 최대변위를 나타내며, 간격이 5m 일 때 이동질량의 위치가  $\bar{x} = 0.3$ 이후부터는 매우 안정한 상태를 보이고 있다. Fig. 20에서는 간격에 관계없이 유사한 진동형태를 보이고 있으며 간격이 3m 일 때 횡변위의 진폭이 가장 작다는 것을 알 수 있다.

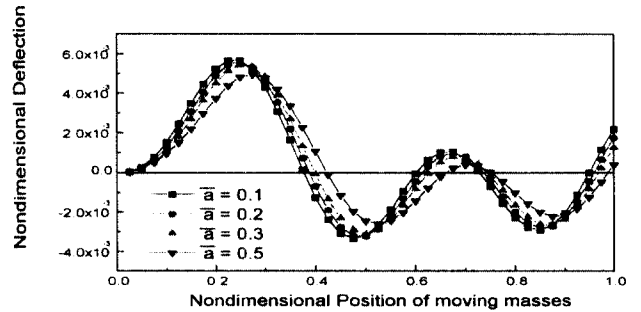


Fig. 18 Time variation of deflection of simple beam for four values of  $\bar{a}$  ( $\bar{v} = 0.5$  first mode)

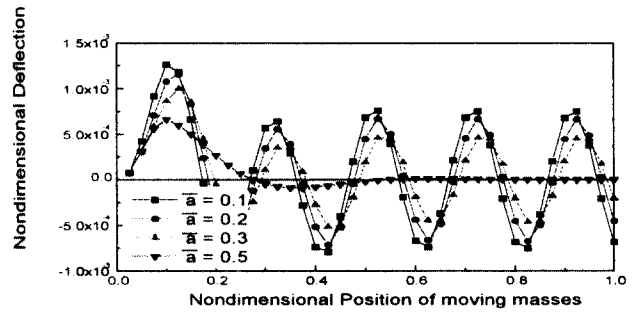


Fig. 19 Time variation of deflection of simple beam for four values of  $\bar{a}$  ( $\bar{v} = 0.5$  second mode)

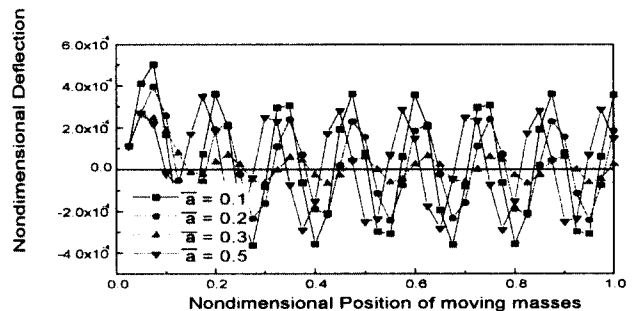


Fig. 20 Time variation of deflection of simple beam for four values of  $\bar{a}$  ( $\bar{v} = 0.5$  third mode)

#### 4. 결 론

단순보상에서 일정 간격을 유지하는 두 이동질량의 속도와 그 간격이 단순보의 동특성에 미치는 영향을 수치해석으로 연구한 결과 다음과 같다.

- 1) 이동질량의 속도가 커짐에 따라 단순보의 진폭이 감소하며 진동속도가 빨라져서 진동수가 증가한다.
- 2) 두 이동질량간의 간격이 증가함에 따라 단순보의 횡변위는 감소되며, 최대변위를 일으키는 이동질량의 위치가 단순보의 후반부로 비례적으로 이동한다.
- 3) 제 2차 모드에서는  $\bar{a} = 0.5$  의 경우 이동질량의 위치가  $\bar{v} = 0.1$ 에서는  $\bar{x} = 0.5$ ,  $\bar{v} = 0.3$ 에서는  $\bar{x} = 0.3$ , 그리고  $\bar{v} = 0.5$ 에서  $\bar{x} = 0.25$  이후부터 보의 끝까지 이동할 동안 단순보의 횡변위는 미소하여 매우 안정적이다.
- 4) 제 3차 모드에서는 이동질량의 간격에 관계없이 비교적 유사한 진동형태를 보이고 있으며  $\bar{a} = 0.3$ 일 때 진폭이 가장 작으며 비교적 안정적이다.

#### 참고문헌

1. Steele, C. R., "The Finite Beam with a Moving Load," Journal of Applied Mechanics, TRANS. ASME, Series E, Vol. 89, Mar. 1967
2. Steele, C. R., "The Timoshenko Beam with a Moving Load", Journal of Applied Mechanics, TRANS. ASME, Vol. 90, Series E. Sep. 1968
3. Lin, Y. K., and Mc Daniel, T.J., "Dynamics of Beam Type Periodic Structures," Journal of Engineering for Industry. TRANS. ASME, Vol. 91, Series B, 1969
4. Chonan, C. "The Elastically Supported Timoshenko Beam Subjected to An Axial Force and A Moving Load," Interational Journal of Mechanical Sciences, Vol. 17, 1975, pp. 573~581
5. Esmailzadeh, E. and Ghorashi, M., "Vibration Analysis of Beams Traversed by Uniform Partially Distributed Moving Masses" Journal of Sound and Vibration, vol. 184, pp. 9~17, 1995