

주파수 응답함수의 감도를 이용한 모델개선법

Model Updating Using Sensitivity of Frequency Response Function

김광근 · 김영찬 · 양보석 · 김동조

K. K. Kim, Y. C. Kim, B. S. Yang and D. J. Kim

Key Words : Model Updating(모델개선법), Frequency Response Function(주파수응답함수), Sensitivity(감도), Beam(보), Rotor System(회전축계)

Abstract : It is well known that finite element analysis often has the inaccuracy when they are in conflict with test results. Model updating is concerned with the correction of analytical model by processing records of response from test results. This paper introduce a model updating technique using the frequency response function data. The measurement data is able to be used directly in the FRF sensitivity method because it is not necessary to identify. When a damping model is updated, it is necessary for the sensitivity matrix to be divided into the complex part and real part. As an applying model, a cantilever and a rotor system are used. Specially the machined clearance(C_p) of the journal bearing is updated.

1. 서론

해석모델은 구조물의 원형을 재현하고 실험을 통해 실험결과와 해석응답을 비교하게 된다. 해석모델이 실험결과와 일치하지 않는 경우에 고려해야 할 오차로는 해석모델이 실제 모델의 물리적 거동을 정확히 표현할 수 없기 때문에 발생하는 모델구조오차, 연속체인 실제 구조물을 이산화할 때 충분한 자유도가 고려되지 않으므로 발생하는 모델차수오차 그리고 해석모델은 정확하지만 파라미터의 수치적인 값들이 정확하지 않아 발생하는 모델 파라미터오차 등이 있다.¹⁾

특히 측정이 정확하고 해석모델이 원래의 운동을 정확하게 재생할 수 있다고 하면, 예측과 측정된 응답의 차이는 실제 구조물의 파라미터값과의 오차로 인하여 발생하게 된다. 모델개선(model updating)은 이러한 파라미터의 추정 및 개선을 위한 기술이며, 본 연구에서는 이러한 해석모델의 개선을 통해 실제구조물의 변화를 추정하는 것을 목적으로 한다.

모델개선법은 크게 직접법(direct method)과 반복법(iterative method)으로 나뉜다. 직접법은 반복

이 없이 단 한번에 계산을 하고, 계산량이 적은 장점이 있으나, 유한요소 방정식의 질량, 감쇠 및 강성행렬의 요소가 원형이 보존되지 않고 변형되며, 이후에 다시 개선된 모델에 물리적 변화를 부여할 수 없는 단점이 있다. 반복법은 계산량은 직접법에 비해 많지만, 원래의 유한요소행렬이 보존되고, 실제 해석대상의 물리적으로 의미있는 파라미터의 변화값을 구할 수 있는 장점이 있다. 본 연구에서는 대상구조물의 변화를 추정하는 것에 중점을 두므로 반복법을 사용한다. 반복법은 다시 모드 데이터를 이용한 것과 주파수영역 데이터를 이용한 것으로 나뉜다.¹⁾ 전자의 방법은 전 자유도 측정의 제한으로 축소법이나 확장법 등이 필요하고, 측정 데이터를 동정(identification)하는 과정이 필요하다. 후자의 방법은 이러한 과정 없이 직접 사용되므로 더 정확하다고 볼 수 있다.

본 연구에서는 이러한 장점 때문에 주파수영역의 데이터를 사용하고, 그 중 주파수응답함수(FRF)를 사용한다. Ewins²⁾등이 제안한 주파수응답함수의 감도식에 측정데이터를 사용한 Lin³⁾의 개선된 주파수응답함수 감도식을 이용하였고, 감쇠항이 존재하는 모델에 적용하기 위하여 상태행렬식의 주파수 응답함수식⁴⁾과 복소부가 분리·포함되는 개선식을 제안하였다. 적용예로 외팔보와 회전체 유막베어링에 적용하여 그 유용성을 검토하

접수일 : 2000년 3월 9일

김광근, 김영찬 : 부경대학교 대학원

양보석, 김동조 : 부경대학교 기계공학부

였다.

2. 주파수응답함수의 감도를 이용한 모델개선법

2.1 주파수 응답함수의 변화표현

Ewins등은 다음의 행렬식을 기초로 주파수응답함수의 변화를 나타내었다.

$$(X+Y)^{-1} = X^{-1} - (X+Y)^{-1}YX^{-1} \quad (1)$$

식(1)은 $X+Y$ 로 곱해보면 쉽게 증명된다. X 가 해석모델의 동강성행렬 $B_a(\omega)$, $X+Y$ 가 측정된 동강성행렬 $B_m(\omega)$ 를 나타내고, Y 가 오차를 나타낸다고 하면

$$B_m^{-1}(\omega) = B_a^{-1}(\omega) - B_m^{-1}(\omega) [B_m(\omega) - B_a(\omega)] B_a^{-1}(\omega) \quad (2)$$

와 같이 표현할 수 있다. 여기서 하첨자 m , a 는 각각 측정치와 해석결과를 나타낸다. 식(2)를 주파수응답함수의 항으로 나타내면

$$\alpha_m(\omega) = B_m^{-1}(\omega), \quad \alpha_a(\omega) = B_a^{-1}(\omega)$$

이므로,

$$\begin{aligned} \Delta \alpha(\omega) &= \alpha_m(\omega) - \alpha_a(\omega) \\ &= -\alpha_m(\omega) \Delta B(\omega) \alpha_a(\omega) \end{aligned} \quad (3)$$

이 된다. 여기서 $\Delta \alpha$ 은 리셉턴스 행렬의 오차, $\Delta B(\omega)$ 는 동강성행렬의 오차행렬로 식(4)와 같이 정의된다. 식(3)은 주파수응답함수행렬의 변화를 나타내고 있다.

$$\begin{aligned} \Delta B(\omega) &= -\omega^2(M_m - M_a) + (K_m - K_a) \\ &= -\omega^2 \Delta M + \Delta K \end{aligned} \quad (4)$$

주파수응답함수행렬에서 하나의 행 또는 열이 측정되어 사용될 수 있다. 즉 일정 가진주파수에서 가진위치나 센서위치만을 변경해서 측정데이터를 얻게 된다. 선형계의 상반성이 유지되는 경우는 주파수응답함수 행렬이 대칭행렬이므로 열이나 행 중 어느 것을 측정해도 상관없다.

식(4)를 이용하여 식(3)을 표현하면,

$$\begin{aligned} \alpha_m(\omega) - \alpha_a(\omega) \\ = \alpha_a(\omega) (\omega^2 \Delta M - \Delta K) \alpha_m(\omega) \end{aligned} \quad (5)$$

식(5)로 파라미터 p_k 의 변화에 대한 주파수응답함수의 변화를 나타내는 감도식은

$$\frac{\partial \alpha(\omega)}{\partial p_k} = \alpha_a(\omega) \left(\omega^2 \frac{\partial M}{\partial p_k} - \frac{\partial K}{\partial p_k} \right) \alpha_m(\omega) \quad (6)$$

이 된다. 위식은 다음의 행렬미분식으로도 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial p_k} &= \frac{\partial [\alpha B \alpha]}{\partial p_k} \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial p_k} B \alpha + \alpha \frac{\partial B}{\partial p_k} \alpha \\ &\quad + \alpha B \frac{\partial \alpha}{\partial p_k} \\ &= 2 \frac{\partial \alpha}{\partial p_k} \alpha + \alpha \frac{\partial B}{\partial p_k} \alpha \end{aligned}$$

따라서,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p_k} = -\alpha \frac{\partial B}{\partial p_k} \alpha \quad (7)$$

식(6)을 Taylor급수 1차 전개식의 감도행렬식으로 나타내면, 식(8)과 같다. 여기서 Δp 는 파라미터 증분, 하첨자 j 는 FRF행렬의 한 벡터, ω_n 은 조화 가진 각주파수를 나타낸다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha(\omega_1)_j}{\partial p_1} & \frac{\partial \alpha(\omega_1)_j}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \alpha(\omega_1)_j}{\partial p_L} \\ \frac{\partial \alpha(\omega_2)_j}{\partial p_1} & \frac{\partial \alpha(\omega_2)_j}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \alpha(\omega_2)_j}{\partial p_L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \alpha(\omega_n)_j}{\partial p_1} & \frac{\partial \alpha(\omega_n)_j}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \alpha(\omega_n)_j}{\partial p_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_L \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \alpha_m(\omega_1)_j - \alpha_a(\omega_1)_j \\ \alpha_m(\omega_2)_j - \alpha_a(\omega_2)_j \\ \vdots \\ \alpha_m(\omega_n)_j - \alpha_a(\omega_n)_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

2.2 모델개선(Model Updating)

식(8)로부터 식(9)의 모델 개선식을 유도할 수 있다. 식(9)에서 우변 둘째항의 감도행렬 S 의 역행

렬은 의역행렬 $(S^T S)^{-1} S^T$ 로 구하여 진다.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_L \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_L \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha(\omega_1)_i}{\partial p_1} & \frac{\partial \alpha(\omega_1)_i}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \alpha(\omega_1)_i}{\partial p_L} \\ \frac{\partial \alpha(\omega_2)_i}{\partial p_1} & \frac{\partial \alpha(\omega_2)_i}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \alpha(\omega_2)_i}{\partial p_L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \alpha(\omega_n)_i}{\partial p_1} & \frac{\partial \alpha(\omega_n)_i}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \alpha(\omega_n)_i}{\partial p_L} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} \alpha_m(\omega_1)_i - \alpha_a(\omega_1)_i \\ \alpha_m(\omega_2)_i - \alpha_a(\omega_2)_i \\ \vdots \\ \alpha_m(\omega_n)_i - \alpha_a(\omega_n)_i \end{Bmatrix} \quad (9)$$

식(9)는 파라미터에 대한 비선형 함수이므로 반복이 필요하며, 매 반복마다 해석모델의 재해석으로 감도행렬이 다시 구해진다. 측정 리셉턴스의 미측정 자유도 부분은 해석적으로 구한 리셉턴스의 해당 자유도부분의 값을 대입한다. 감도행렬에서는 해석적인 값들로 대체된 부분은 제거해서 이용한다.

감쇠모델의 경우는 감도식과 측정값에 허수부가 포함되고, 이 때문에 식(9)를 그대로 사용하지 않고 식(10)을 이용한다.

$$\begin{bmatrix} \text{Re } S \\ \text{Im } S \end{bmatrix} \Delta p = \begin{bmatrix} \text{Re } \epsilon \\ \text{Im } \epsilon \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서,

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha(\omega)}{\partial p_k} & \dots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad [\epsilon] = \begin{Bmatrix} \alpha_m(\omega)_i - \alpha_a(\omega)_i \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

이론적인 FRF를 구하는 방법에는 모드강성, 감쇠행렬을 이용하는 방법과 상태행렬의 일반해로부터 단위 가진력에 대한 주파수응답함수(receptance)를 구하는 방법이 있다. 전자의 경우는 비례감쇠가정이 필요하므로 본 연구에서는 후자의 다음식⁴⁾을 이용한다.

$$\alpha(\omega) = U_{upper} \left[\text{diag} \frac{1}{i\omega - \lambda_j} \right] U_{right}^{-1} M^{-1} \quad (11)$$

U_{upper} 과 U_{right}^{-1} 은 각각 고유벡터행렬의 상반부 및 고유벡터 역행렬의 우반부를 나타내며, 상태행렬(state matrix)의 표준대수 고유치문제에서 구할 수 있다. λ 는 고유치(eigenvalue), M 은 질량행렬, ω 는 조화가진 각주파수(angular frequency)이다.

2.3 모델개선 알고리즘

FRF감도를 이용한 모델개선법의 계산알고리즘은 Fig. 1을 이용하여 설명하면 다음과 같다.

Step 1: 개선대상이 되는 파라미터를 선정한다. 이때 오차위치추정(error localization)을 통해 오차의 포함 가능성이 있는 파라미터의 수를 줄이는 것이 필요하다.

Step 2: 고유치해석을 통해 고유벡터행렬과 고유치를 구한다.

Step 3: 고유해 데이터를 이용하여 이론적인 FRF를 구한다.

Step 4: 실험을 통하여, 주어진 가진주파수의 FRF를 취득가능한 자유도에서 얻는다.

Step 5: FRF 감도행렬의 요소값들을 식(6)을 이용하여 구한다.

Step 6: 감도행렬에서 실제 측정되지 않고, 이론값으로 대체한 자유도부분을 제거한다.

Step 7: SVD(singular value decomposition)를 이용해서 감도행렬의 의역행렬을 구한다. 이때 식(9)의 우변 둘째항의 측정벡터의 요소값에는 측정된 자유도의 값만을 대입한다.

Step 8: 식(9)를 통해 개선된 파라미터를 얻는다.

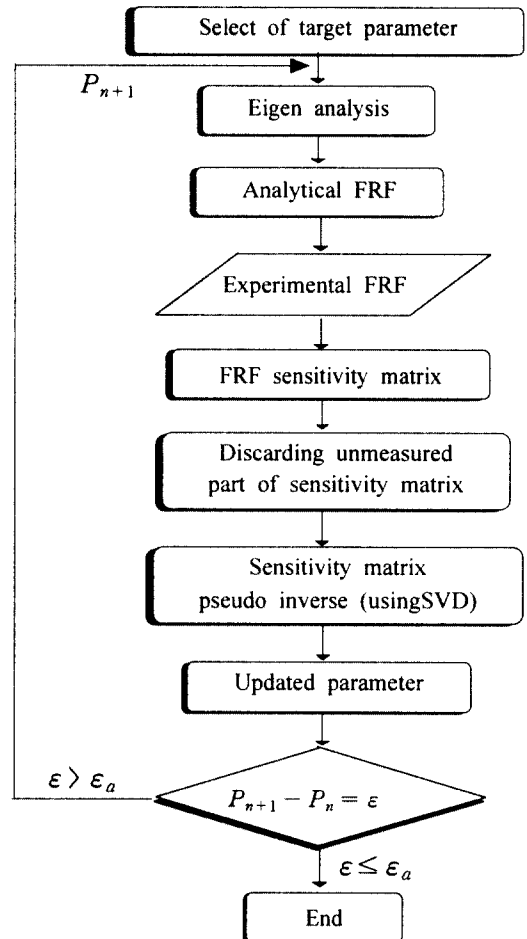


Fig. 1 Flow chart of model updating using FRF sensitivity

Step 9: 개선전과 후의 파라미터 변화값이 허용범위 내가 아니면, 고유치해석단계부터 다시 계산한다. 범위 이내이면 개선과정을 종료한다.

Fig. 1에서 ϵ 은 개선후와 개선전의 파라미터값의 차, P 는 파라미터, n 은 반복수를 나타낸다.

3. 적용 예

3.1 외팔보적용

일정단면의 외팔보를 Fig. 2와 같이 모두 10개의 요소로 나누고, 각 절점당 변위와 각변위를 고려해서 총 22자유도의 Bernoulli-Euler보로 모델링한다. 물성치는 Table 1과 같다. 먼저 시뮬레이션 데이터를 이용해서 개선식을 증명한 후에, 실험을 통한 측정 데이터로 모델을 개선한다.

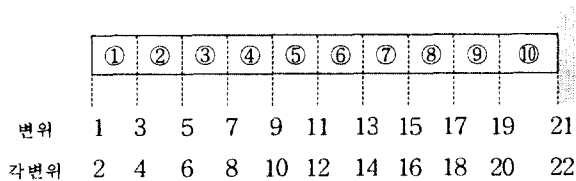


Fig. 2 FEM modeling of cantilever beam

Table 1 Physical properties

Density ρ (kg/m ³)	Bending rigidity EI (N · m ²)	Area A (m ²)	Length L (m)
8029.25	90	1.5×10^{-4}	0.5

3.1.1 시뮬레이션

전역파라미터(global parameter)인 굽힘강성도 EI 와 밀도 ρ 를 개선 대상으로 한다. EI 를 $90 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ 에서 $85 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ 으로, 밀도 ρ 를 8029.25 kg/m^3 에서 7500 kg/m^3 으로 각각 5.56 %와 6.59 %의 오차를 주어서 해석모델에 대입해 얻은 주파수응답함수값들을 측정 데이터로 사용한다.

노이즈가 없고 모든 자유도의 값들이 얻어진 완전한 데이터를 사용하였으므로, Fig. 3과 같이 단 한번에 오차를 부여한 파라미터 값을 정확히 추정하고 있다.

3.1.2 측정데이터의 이용

측정된 FRF를 사용하는 경우에 측정 노이즈의 영향을 줄이기 위해 주파수응답함수의 응답값은 큰 값을 가지는 것이 좋으므로, 당연히 공진점을

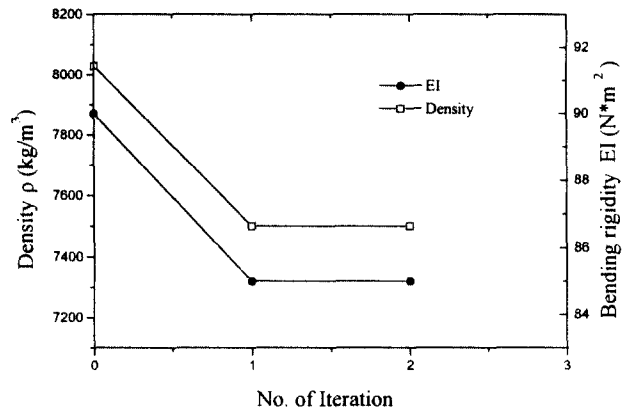


Fig. 3 Updating result by FRF sensitivity method (simulation)

선택하는 것이 좋다. 그러나 공진점을 선택한 경우는 식(12)에서 알 수 있듯이 불명확한 감쇠항만이 남게 되어 얻어낸 값의 정도가 떨어진다. 따라서

$$FRF = \frac{K - \omega^2 M}{(K - \omega^2 M)^2 - (\omega C)^2} + j \frac{\omega C}{(K - \omega^2 M)^2 - (\omega C)^2} \quad (12)$$

공진점 근처의 진동수를 선택한다. 실험에 이용된 장치는 Fig. 3과 같다. 정확한 타격(hammering)이 어려운 양 끝점을 제외한 9개의 절점에서 1차(20Hz)와 2차(122.5Hz) 고유진동수에 근접한 진동수(25, 125Hz)로 측정된 주파수응답함수의 데이터를 이용한다.

Fig. 5는 개선 결과로부터 얻은 파라미터값에 의하여, 15번 자유도에 가진하고, 5번 자유도에서 측정하여 구한 FRF곡선이 측정FRF곡선에 근접한 개선결과를 나타낸다. Table 2는 가진진동수와 측정데이터의 수에 따라 달라지는 개선결과를 나타낸다. 결국, 응답은 실험데이터에 근사하게 개선시

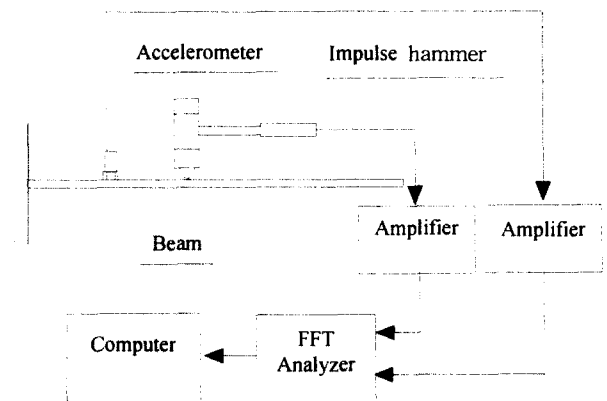


Fig. 4 Schematic of measurement apparatus

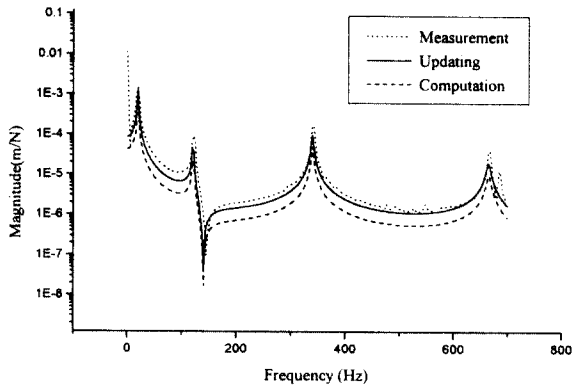


Fig. 5 FRF curve of receptance

Table 2 Updating results

	Exciting frequency		Measuring point (Displacement)	
	25, 125 Hz	25, 125, 345 Hz	7 point (7,9,11,13, 15,17,19)	9 point (3,5,7,9,11,13, 15,17,19)
Bending Rigidity EI (N · m ²)	83.66	86.29	84.28	87.65
Density, ρ (kg/m ³)	7495	7715.9	7593.2	7820

킬 수 있었으나, 추정되는 파라미터값은 Table 2 와 같이 명확하지 않았다. 그 이유는 역문제의 특성에 기인하는 것으로, 측정된 FRF를 만족하는 파라미터의 조합이 유일하지 않기 때문이다.

3.2 회전축계 적용

Fig. 6은 Lalanne의 회전체모델⁵⁾로써, 본 연구에서는 이 모델의 양 끝단을 4틸팅(tilting pad) 저널 베어링으로 대체하였다. 25,000rpm으로 회전시의 저널베어링 틈새 C_p 를 파라미터로 하여 오차를 부여하고, FRF감도법을 이용하여 개선을 수행하

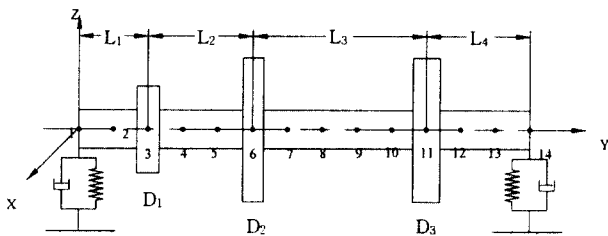


Fig. 6 Rotor model

였다. 베어링 틈새는 그 치수가 매우 적어 정확한 측정이 어렵고, 계속된 운전으로 인한 마모 등으로

변화하며, 작은 값의 변화로 전체 계의 고유치에 영향을 미친다.

대상모델은 3개의 원판이 부착된 길이 1.3m, 지름 0.1m의 축이며, 부착된 원판사이의 거리는 각각 $L_1= 0.2, L_2= 0.3, L_3= 0.5, L_4= 0.3$ m 이다. 물성치는 종탄성계수(E) = 200 GN/m², 밀도(ρ) = 7800 kg/mm³, 프아송비(ν) = 0.3이고, 원판 데이터는 Table 3과 같다.

Table 3 Disk data

Disk	D_1	D_2	D_3
Thickness(m)	0.05	0.05	0.06
Inner diameter(m)	0.05	0.05	0.05
Outer diameter(m)	0.12	0.2	0.2

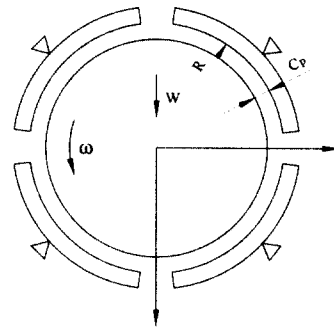


Fig. 7 Bearing geometry

Fig. 7은 베어링단면으로서, W 은 베어링부하, ω 은 저널에서의 회전 각속도, R 은 베어링 반경, C_p 는 베어링틈새를 각각 나타낸다.

양단에 같은 특성의 베어링이 사용되며, 저널베어링의 Sommerfelt수는 무차원 수로써

$$S = \frac{\mu NLD}{W} \left(\frac{R}{C_p} \right)^2 = 0.83239$$

이다. 이것을 유한차분법(FDM)으로 계산한 결과 데이터⁷⁾를 이용해서 강성과 감쇠계수를 구한다. 또한 곡선적합(curve fitting)을 통하여 틈새 C_p 의 변화값에 대한 강성과 감쇠계수의 변화기울기를 유도하여 FRF 감도를 구한다.

3.2.1 시뮬레이션

대상모델을 Timoshenko 보 이론으로 고유치 해석을 해서 모델개선을 수행한다. C_p 를 2.5×10^{-4} 에서 3.0×10^{-4} 로 20%의 오차를 부여한 값을 해석

모델에 적용해서 얻은 주파수응답함수를 측정데이터로 사용한다. 개선결과는 Fig. 8과 같이 정확히 오차값을 개선시킬 수 있었다.

거동에 맞추는 것은 가능하였으나, 실제 의미있고, 적용가능한 파라미터의 값을 얻는데는 사용된 데이터에 따라 달라지는 단점이 있다.

Table 4 Journal bearing design parameter

Viscosity(μ)	$9.37 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$
Diameter(D)	0.1005 m
Machined clearance (C_p)	$2.5 \times 10^{-4} \text{ m}$
Width(L)	$5.023 \times 10^{-2} \text{ m}$
Clearance ratio ($\Psi = C_p/R$)	0.004579
Load(W)	956.97 N
Rotating speed(N)	416.667 rps

참고문헌

1. J. E. Mottershead and M. I. Friswell, "Model Updating in Structural Dynamics: A Survey", Journal of Sound and Vibration, 167(2), pp. 347~375, 1993
2. M. Imregun, W. J. Visser and D. J. Ewins, "Finite Element Model Updating Using Frequency Response Function Data-I Theory and Initial Investigation", Mechanical System and Signal Processing, 9(2), pp. 187~202, 1995
3. R. M. Lin, M. K. Lim and H. Du, "Relationship Between Improved Inverse Eigensensitivity and FRF sensitivity Methods for Analytical Model Updating", Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of ASME, 1997
4. D. E. Newland, "Mechanical Vibration Analysis and Computation", Longman Scientific & Technical, pp. 226~274, 1989
5. M. Lalanne and G. Ferraris, "Rotordynamics Prediction in Engineering", John Wiley & Sons, 1990
6. Francois M. Hemez and Gregory W. Brown, "Improving Structural Dynamics Models By Correlating Simulated to Measured Frequency Response Functions", AIAA-98-1789, pp. 772~782
7. T. Someya(Ed.), Journal-Bearing Databook, Springer-Verlag, 1989
8. 박윤식, 박용화, "구조물 동특성 변경 관련 분야 및 동향", 한국소음진동공학회지, Vol. 9, No. 3~No. 4, pp. 457~460, pp. 669~680, 1999

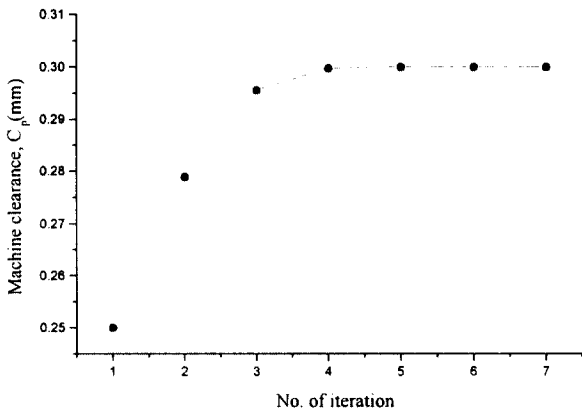


Fig. 8 Updating result with FRF sensitivity method

5. 결론

모델데이터는 동정 등의 과정이 필요하고 취득하는 데이터의 수에 있어서는 수치적으로 FRF감도법보다 좋지 않으므로, 본 연구에서는 FRF감도법으로 모델개선을 연구하였다. 기존의 감도식에서 실험치를 포함하여 개선된 Lin등의 감도식을 이용하고, 감쇠가 포함된 경우에 적용이 가능하도록 실수부와 허수부를 분리하는 방법을 제안하였다. 본 방법의 유효성을 시뮬레이션을 통하여 검증하였고, 실제 산업현장에서 중요한 역할을 하는 회전체에서 문제가 될 수 있는 저널베어링의 설계변수의 개선에 적용하여 그 응용이 가능함을 확인하였다. 실험으로 측정된 데이터를 이용해서 FRF감도법을 이용한 경우에 모델의 개선결과는 실제 구조물의