

그래프 마법사와 함수교육

주관: 교육소프트 연구소

최근 10 여년 동안 교육 현장의 각 부분에 여러가지 종류의 테크놀로지가 도입되면서, 교육의 내용과 방법에 있어서 점진적인 변화가 나타나고 있다. 예를들어, 수학 과목에 있어서는 그래픽 계산기, 도형 및 기하 학습 프로그램, 스프레드 시트, 함수 그래픽 프로그램 등의 도입으로 교과 과정 전반에 걸친 변화가 일고 있는데, 처음에는 이들 테크놀로지가 단순히 기존의 수업에서 수많은 반복을 요하거나, 지필식 방식으로는 정확하게 나타내기 어려운 도형이나 그래프를 빠르고 정확하게 그려내 주는 보조수단으로만 사용되었지만, 시간이 지나면서 이들 테크놀로지에 대한 활용도가 높아지게 되고, 이들 테크놀로지에 대한 교사들의 활용능력이 증대됨에 따라서, 이러한 테크놀로지가 단순한 보조수단에 머무르지 않고 주제에 기술이나 개념을 설명하는 방법 자체를 변화시키고 있다.

예를들어, 함수 교육에 있어서 그래프 프로그램이 사용될 때에도, 초기 단계에서는 이들 함수의 개념을 설명할 때에는 거의 집합론이나 대수학적인 방법을 사용하고, 최종 단계로 이들 함수를 좌표계 위에 표현하기 위한 보조수단으로 잠깐씩 사용되는 경우가 대부분이었어나, 최근들어서는 함수 학습의 초기과정부터 곧바로 이들 그래프 프로그램을 적극적으로 도입하여 학습자로 하여금 다양한 그래프 조작을 하게 함으로써, 어려운 집합론이나 대수학적인 개념을 도입하지 않고서도 함수에 대한 개념을 시각적이고 직관적으로 파악하도록 하는 학습 방안들이 제시되고 있는 것이다.

본 고에서는 현행 중고등학교 함수 교육 과정에서 그래프에 대한 다양한 조작 기능을 제공함으로써 학습자로 하여금, 제시되는 함수에 대한 시각적이고 직관적인 이미지를 가질 수 있도록 하기 위해서 개발된 '그래프 마법사' 라는 프로그램을 소개하고자 한다.

그래프 마법사와 함수교육

류 재 구 (교육소프트 연구소)

1. 서론

최근 10 여년 동안 교육 현장의 각 부분에 여러가지 종류의 테크놀로지가 도입되면서, 교육의 내용과 방법에 있어서 점진적인 변화가 나타나고 있다. 예를들어, 수학 과목에 있어서는 그래픽 계산기, 도형 및 기하 학습 프로그램, 스프레드 시트, 함수 그래픽 프로그램 등의 도입으로 교과 과정 전반에 걸친 변화가 일고 있는데, 처음에는 이들 테크놀로지가 단순히 기존의 수업에서 수많은 반복을 요하거나, 지필식 방식으로는 정확하게 나타내기 어려운 도형이나 그래프를 빠르고 정확하게 그려내주는 보조수단으로만 사용되었지만, 시간이 지나면서 이들 테크놀로지에 대한 활용도가 높아지게 되고, 이들 테크놀로지에 대한 교사들의 활용능력이 증대됨에 따라서, 이러한 테크놀로지가 단순한 보조수단에 머무르지 않고 주제에 기술이나 개념을 설명하는 방법 자체를 변화시키고 있다.

예를들어, 함수 교육에 있어서 그래프 프로그램이 사용될 때에도, 초기 단계에서는 이들 함수의 개념을 설명할 때에는 거의 집합론이나 대수학적인 방법을 사용하고, 최종 단계로 이들 함수를 좌표계 위에 표현하기 위한 보조수단으로 잠깐씩 사용되는 경우가 대부분이었으나, 최근들어서는 함수 학습의 초기과정부터 곧바로 이들 그래프 프로그램을 적극적으로 도입하여 학습자로 하여금 다양한 그래프 조작을 하게 함으로써, 어려운 집합론이나 대수학적인 개념을 도입하지 않고서도 함수에 대한 개념을 시각적이고 직관적으로 파악하도록 하는 학습 방안들이 제시되고 있는 것이다.

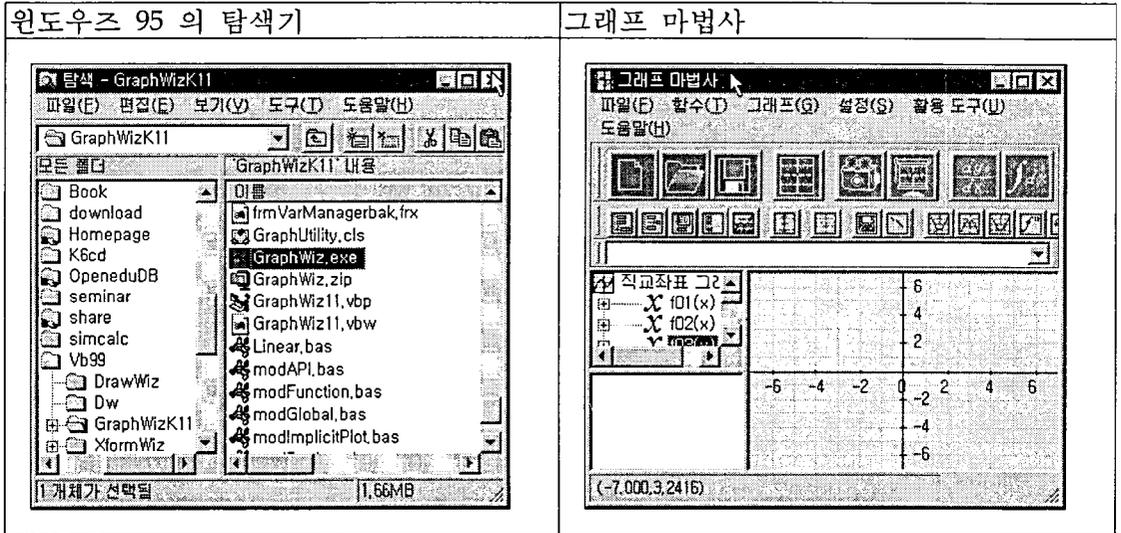
본 고에서는 현행 중고등학교 함수 교육 과정에서 그래프에 대한 다양한 조작 기능을 제공함으로써 학습자로 하여금, 제시되는 함수에 대한 시각적이고 직관적인 이미지를 가질 수 있도록 하기 위해서 개발된 '그래프 마법사' 라는 프로그램을 소개하고자 한다.

2. 그래프 마법사의 특징

1) 사용자 인터페이스의 특징

그래프 마법사 사용자 인터페이스의 전체적인 구성은 윈도우즈에서 제공하는 탐색기와 비슷하게 되어있다. 이것은 현재 윈도우즈라는 운영체제를 사용하는 사람이라면 누구나 사용에 부담을 느끼지

않는 구조의 인터페이스를 제공함으로써, 그래프 마법사를 처음으로 접하는 사람들이 프로그램에 대해서 느끼는 부담을 최소화하고, 프로그램을 배우는데 소요되는 시간과 노력을 가능한 한 줄이고자 하는 의도에서 비롯된 것이다.



2) 기능상 특징

그래프 마법사의 기능은 크게 두 가지 부분으로 나눌 수 있는데, 한가지는 사용자가 입력한 함수 식을 그래프로 그려내는 것이고 다른 하나는 이미 그려진 그래프를 대상으로 여러 가지 분석기능을 수행하는 것이다. 그리고, 그래프에 대한 분석 기능에서는 일반적인 교육용 그래프 프로그램에서와 같이 미분 그래프, 접선의 표시, 좌표 값 표시와 같은 정적인 기능들은 물론, 사용자가 마치 TV 나 VTR 의 리모콘을 사용하는 것처럼 편리하고 직관적으로 그래프의 성질을 학습할 수 있는 기능들을 갖추고 있다.

3) 구현 가능한 그래프의 종류

대부분의 교육용 그래프 프로그램들이 직교좌표 계에서 표현이 가능한 그래프 기능만을 제공하는데 비해서, 그래프 마법사에서는 직교좌표 그래프뿐만 아니라 매개변수, 극좌표, 음함수에 대한 그래프까지도 구현이 가능하다. 그래프 마법사에서 제공하는 그래프의 종류 및 구현방법에 대해서 간단히 정리하면 다음과 같다.

① 직교좌표 그래프 : $y = f(x)$ 형식으로 나타낼 수 있는 함수 식에 대한 그래프를 말하며, 그래프 마법사에서는 직교좌표 계에 대해서는 반드시 x 라는 이름을 가진 독립변수만을 사용할 수 있도록 되어있다.

② 매개변수 그래프 : $c = (x(t), y(t))$ 형식으로 나타낼 수 있는 함수 식에 대한 그래프를 말하며, 그래프 마법사에서는 직교좌표 계에 대해서는 반드시 t 라는 이름을 가진 독립변수만을 사용할 수 있도록 되어있다.

③ 극좌표 그래프 : $r = f(\theta)$ 형식으로 나타낼 수 있는 함수 식에 대한 그래프를 말하며, 그래프 마법사에서는 직교좌표 계에 대해서는 반드시 d 라는 이름을 가진 독립변수만을 사용할 수 있도록 되어있다.

④ 음함수 그래프 : $f(x,y) = c$ 와 같은 형식으로 나타낼 수 있는 함수 식에 대한 그래프를 말하며, 그래프 마법사에서는 음함수에 대해서는 반드시 x, y 라는 이름을 가진 독립변수만을 사용할 수 있으며, 문자식은 좌변에 입력하고 상수는 우변에 입력하도록 되어있다.

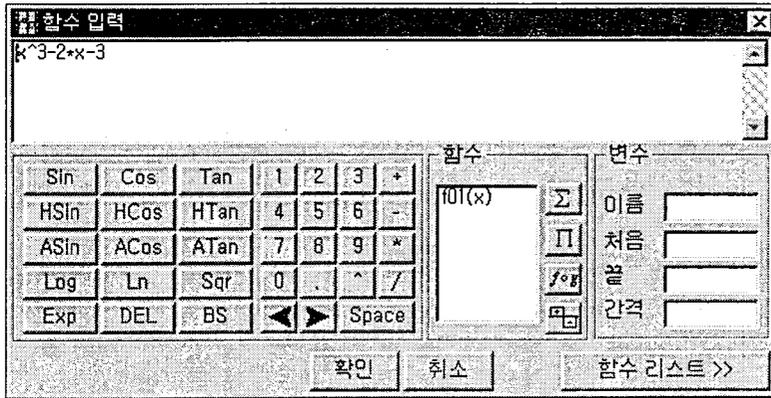
3. 그래프 마법사의 기능

그래프 마법사의 기능은 크게 두 가지 부류로 나눌 수 있는데, 한가지는 함수식의 입력 및 그래프 그리기와 관련된 기능이고, 다른 하나는 이미 그려진 그래프에 대한 분석을 수행하는 기능인데, 이들 기능들을 종류별로 나열하면 다음과 같다.

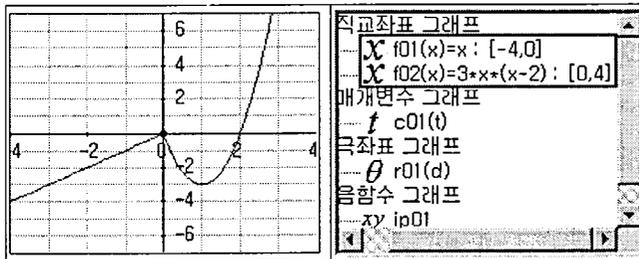
1) 함수의 입력 및 그래프 그리기와 관련된 기능

함수 입력 란 : 키보드를 사용해서 가장 간단히 함수 식을 입력할 수 있는 기능으로, 이곳에 함수 식을 입력한 다음 엔터키만 누르면 그 함수 식에 대한 그래프가 그려진다.



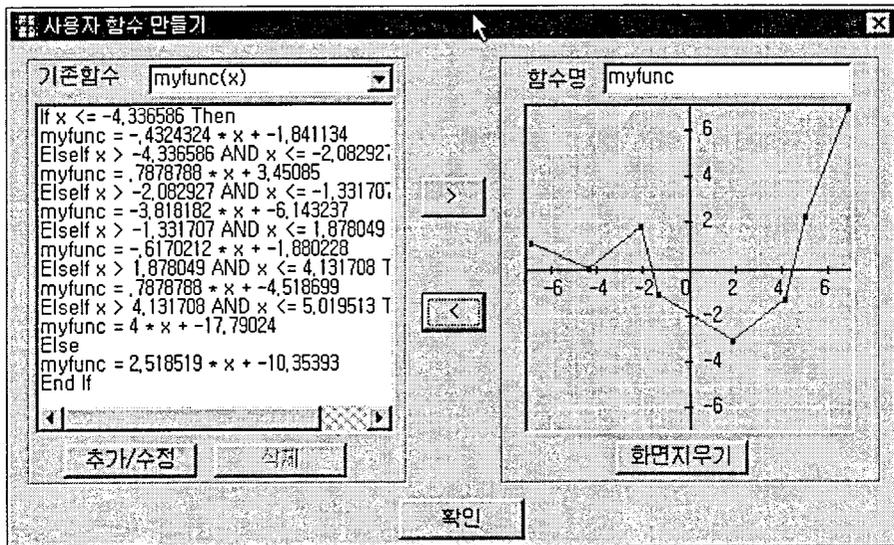


함수 입력 패널 : 여러 가지 복잡한 함수식들의 입력을 좀 더 편리하게 할 수 있도록 만든 윈도우.



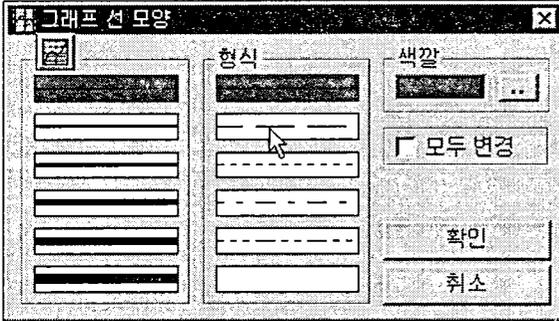
구간별 그래프 그리기 : 각각의 그래프마다 별도의 정역을 명시해서, 그 정역에 해당되는 그래프만을 그릴 수가 있다.

사용자 정의 함수 만들기 기능 : 복잡한 모양의 함수를 마우스로 그려주기만하면 그 함수를 그래프 마법사에서 조작이 가능한 상태로 변환해주는 기능



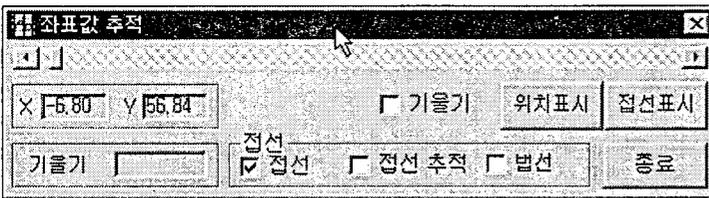


함수 노드의 추가/삭제/편집 기능 : 새로운 함수 식을 추가하거나, 기존에 입력된 함수 식을 수정하거나 삭제하는데 사용되는 기능.

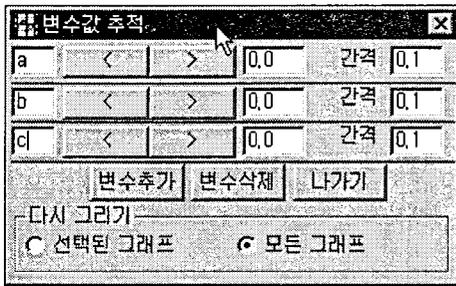


그래프 스타일 변경 기능 : 이미 그려진 그래프의 색상, 굵기, 선의 종류 등을 손쉽게 변경할 수 있는 기능.

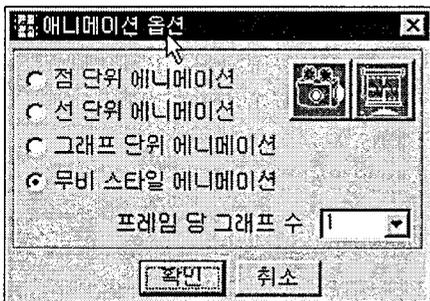
2). 함수에 대한 분석 기능



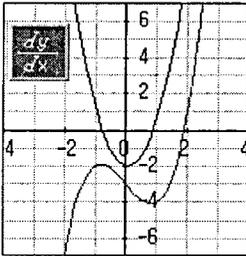
좌표 값 추적 기능 : 사용자가 지정한 지점에 대한 좌표 값, 접선, 법선, 기울기 등을 보여주는 기능.



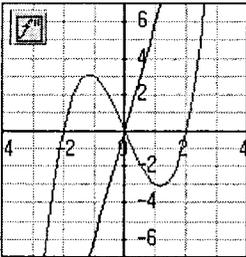
계수 값 추적 기능 : $a x^2 + b x + c$ 와 같이 여러가지 문자형 변수가 포함된 수식을 입력한 다음, 그 변수의 값을 변경해가면서 그에 따른 그래프 모양변화를 관찰할 수 있도록 만든 기능.



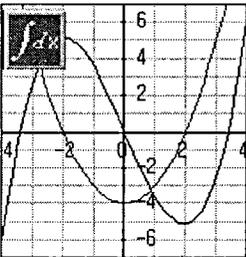
애니메이션 및 슬라이드 쇼 기능 : 사용자가 입력한 여러 개의 함수를 한꺼번에 그리지 않고, 그들 각각의 함수를 그리는 과정을 보여주거나, 하나의 화면에 사용자가 원하는 개수만큼의 함수를 묶어서 애니메이션 형식으로 보여주는 기능.



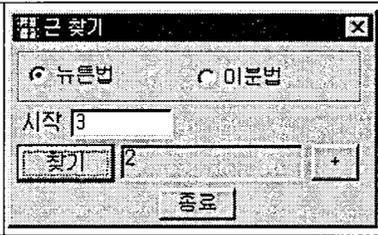
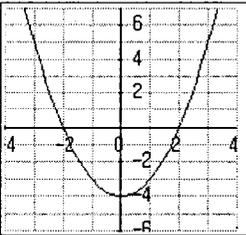
1 계 미분 기능 : 사용자가 선택한 그래프에 대한 1 계 미분 그래프를 그려 준다.



2 계 미분 기능 : 사용자가 선택한 그래프에 대한 2 계 미분 그래프를 그려 준다.

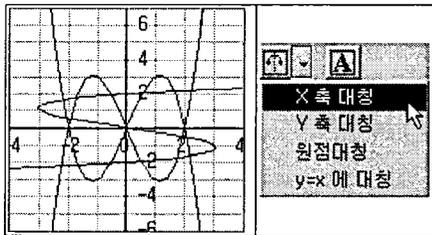
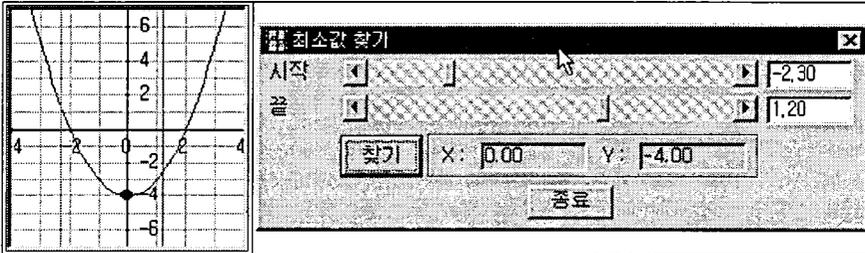


그래프 적분 기능 : 사용자가 선택한 그래프에 대한 적분 그래프를 그리고, 또 사용자가 지정한 범위 내에서의 적분 값을 계산해준다.



근 찾기 기능 : 사용자가 선택한 그래프에 대한 근을 구해주는 기능을 한다.

최대 최소값 구하기 : 사용자가 지정한 구간 내에서의 최대값이나 최소값을 구해주는 기능을 한다.



대칭 그래프 그리기 : 사용자가 선택한 그래프를 여러 가지 대칭 선과 대칭점을 기준으로 대칭 이동한 그래프를 그려준다.

4. 결론

1999년 6월에 그래프마법사V1.0 그리고 9월에 그래프마법사V2.0이 출시된 이래 현재 약 400여개 학교에서 구입을 한 상태이다. 하지만, 이들 구입학교에서 실제로 어느 정도 수업에 활용하고 있는지에 대해서는 아직 정확히 조사가 되지 않은 상태이므로, 그래프마법사의 학습효과를 실제 교실 내에서의 수업결과를 바탕으로 어떤 결론을 내린다는 것은 불가능한 상태이지만 그동안 본 연구소에서 교사들을 대상으로한 각종 워크숍을 통해서 얻었던 반응들을 정리해보면 다음과 같다.

첫째, 그래프마법사는 비슷한 목적으로 사용이 가능한 타 소프트웨어보다 사용이 간편하여 배우는데 부담이 없기 때문에 아주 짧은 시간에 수업시간에 활용 할 수 있을 정도의 조작능력을 습득할 수 있다는 것이다. 이는 개발 당시부터 타 소프트웨어, 예를들면 그래픽 계산기, MathView, Maple, Mathematica, EquationGraph 등과 비교해가면서 이들의 사용상의 불편한 점들을 개선하는 방향에 중점을 둔 결과라고 할 수 있다.

둘째, 그래프마법사는 단순히 사용자가 입력한 함수를 그래프로 나타내주는 기능뿐만 아니라, 이미 그려진 그래프를 대상으로 한 다양한 분석 및 조작 기능들을 갖추고 있어서, 사용자가 함수에 대한 개념을 여러가지 방향으로 확장시키는데 도움이 된다는 것이다. 그래프 마법사에는 근찾기, 최대, 최소값 찾기, 두 그래프의 교점 찾기, 미분 그래프 그리기, 적분 그래프 그리기, 계수값 추적, 점선 표시 및 기울기 표시, 좌표값 추적, 계수값 추적 등 현재 함수 학습 과정에서 필요한 거의 모든 분석 기능들을 갖추고 있으며 이들 기능을 구현하기 위한 사용자 인터페이스 또한 텔레비전의 리모콘과

같은 개념으로 설계되어 있기 때문에 손쉽게 배울수 있고, 또 사용자가 지정한 조작들이 실시간으로 제시되기 때문에 '사용자가 가한 조작(S) 과 그에 따른 반응(R)' 사이의 관계(S-R)가 거의 자동적으로 학습되는 것이다.

세제, 함수를 생각할 때는 무조건 그 내용을 하나의 정형화된 수식으로 표현해야만 한다는 강박관념이 있기 때문에 사고의 폭이 제한되고, 또 실제로 머리속으로 어떤 아이디어가 있다고 하더라도 이 아이디어를 구체적으로 표현하는 단계에서는 수식화하는데 대한 부담감 때문에 이들 아이디어를 더 이상 확장시키지 못하는 경우가 많다. 그런데, 그래프 마법사에는 이들 함수를 미리 정해진 수식이 아니라 마우스를 사용해서 사용자가 머리속에 그리고 있는 그래프의 모양을 대략적으로 그려주기만하면, 그 그래프를 하나의 함수로 만들어주고, 이렇게 만들어진 함수에 대한 그래프를 그리거나, 미적분을 수행하거나, 다른 함수들과의 합성에 사용하는 등의 모든 조작들이 가능하도록 만들어 두었기 때문에 함수에 대한 직관적인 개념이해 뿐만 아니라, 직관적인 수준에서의 개념확장 및 응용에도 크게 도움이 된다.