韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 10집, 2000. 1. 293-302.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 10, Jan. 2000. 293-302.

GSP를 활용한 투시화법의 작도

계 영 희 (고신대학교)

GSP는 The Geometer's Sketchapd의 약자로 1994년 미국에서 연구 개발된 기하 프로그램이다. 기존의 정적인 평면 기하를 동적인 기하로 변환 할 수 있으므로 visual 세대인 현재의 학생들에게 학습에 대한 흥미를 유발시킬 수 있다.
본 논문에서는 특히 3차원 입체를 2차원 평면에 투영시키는 투시화법을 GSP를 도구로 구현해 보았다.

Ⅰ. 서 론

Solow(1984)는 수학 교육에서 증명을 가르치는 것이 왜 중요한가를 다음과 같이 주장하였다.

① 왜 수학을 배우는지를 알게 해주어 즐거움을 주고
② 어떤 명제나 정리가 참인지 거짓인지를 판단할 수 있게 해주고
③ 증명을 통해서 정리의 내용을 보다 잘 파악하고 기억할 수 있게 해주며
④ 수학적 언어를 사용한 수학적 서술 방법이 훈련되어지고
⑤ 체계적이고 논리적인 사고의 과정을 갖게 해주고
⑥ 정의감을 갖게 하여 진리를 사랑하게 된다.

수학교육에서 증명의 지도는 Solow의 주장이 아니더라도 고대 그리스이래 오늘날까지 꾸준히 그 중요성이 강조되어 왔다. 증명은 중·고등학교 수학에서 기하영역에 매우 적합한 교과과정이다. 그런데 문제점은 학생들이 증명을 연산이나 다른 영역보다 매우 싫어하고 흥미를 못 갖는 점이다. 일선 수학교사들은 수학을 교수할 때 특히 기하영역에서 어려움을 느끼며 곤혹스럽다고 주장한다(류성림, 1993).

본 연구자는 1994년 van Hiele 이론에 근거하여, 재직하고 있는 고신대학교 수학과 학생 115명을 대상으로 기하학의 발달 단계의 수준을 측정하였다. 그 결과 1수준(시각적 수준), 2수준(분석적 수준)을 거쳐 3수준(추상적 수준)에 도달한 학생이 대략 65% 정도였다(1학년은 약간 떨어짐). 수학을 전공하는 3, 4학년 학생들이 4수준(연역적 수준)과 5수준(수학적으로 엄밀한 수준)에 도달하지 못한 학생이 34%나 되었다. 대학에서 수학을 전공하기 이전, 중·고등학교 때부터 대수보다는 기하를 어렵게 느꼈으며 그 이유는 증명 때문이라고 풀이된다. 기하의 증명이 우수한 학생들에게는 지적 호기심과 탐구심을 충족시켜주지만 보통 이하의 학생들에게는 수학에 대한 두려움과 거부감을 주는 것이 사실이다.

2000년부터 연차적으로 시행될 우리 나라 제 7 차 교육과정에 의하면 앞으로는 단계형 수준별 교육과정으로 운영하며, 특히 수학은 계열성이나 실용성에 비추어 존재성이 약한 부분을 삭제, 경감하여 수학을 흥미롭고 여유 있게 학습할 수 있도록 한다. 또한 계산기나 컴퓨터 등 테크놀러지를 수학지도에 활용하며 정보화 사회에 대비한 컴퓨터 교육강화를 위해서는 초등학교 실과에서부터 컴퓨터 교육을 실시하고, 고등학교 2, 3학년에서는 선택 중심 교육과정의 도입으로 선택과목에서 컴퓨터를 심화학습 할 수 있도록 한다(강옥기, 1997). 따라서 기하수업에 컴퓨터 소프트웨어를 사용하는 것은 지극히 타당한 것으로 여겨진다. 중요한 것은 소프트웨어를 어떻게 활용하여 학생들의 욕구를 충족시키고 흥미를 끌며 교육의 목표를 달성하느냐에 있다. 최근 기하교육을 위한 소프트웨어로 많이 사용되는 것으로는 Geometric Supposer, Cabri-Geometry, Geometer's Sketchpad가 있다.

양기열(1998)은 Geometer's Sketchpad(GSP)가 Geometric Supposer와 Cabri-Geometry의 단점을 보완한 것으로써 변형된 여러 도형을 통해 학생들의 발견적 사고를 이끌어 낼 수 있으며 수학의 추상적인 내용을 시각화를 통하여 기하학습의 어려움을 완화시켜 준다고 한다.

지금까지 GSP와 관련된 국내에서의 선행연구로는 방승진(1997)이 민족사관고등학교 장학생 선발 프로그램 개발을 위한 연구에서, 문제 해결력과 창의력을 검사한 문항에 GSP를 활용하였고, 오연중(1997)은 황금비를 주제로 한 탐구수업에서 GSP를 활용하여 정오각형과 spiral을 그리게 하였다. 그의 연구에 의하면 GSP의 활용은 학생들의 독창적인 사고력을 증진시켰다고 한다. 또한 양기열(1998)은 중학교 1학년 기하교육에서 삼각형의 내심과 외심에 관한 내용을 GSP를 활용하여 소규모 집단 8명에게 교수한 연구 교안을 개발하였다. 그는 GSP가 탐구활동을 가능케 하였고 추상개념을 직관적으로 파악하게 하므로 증명의 어려움을 완화시켜 주었다고 주장하였다. 그리고 가장 최근의 연구로는 강순자(1999)의 연구가 있다. 그는 중학교 1학년 학생들에게 공간능력을 신장하기 위한 기하 학습자료의 개발로써 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체까지 구성하는 방법을 제시하였다. 도형의 이면이 보이지 않아 상상력에만 의존하였던 어려움을 GSP를 통하여 단번에 해결하여 준 좋은 결과물이라고 여겨진다.

본 연구에서는 수학 학습의 과정을 풍요롭게 할 GSP를 활용하여 투시화법(perspective drawing)의 작도를 제시하고자 한다.

Ⅱ. 투시화법의 이론적 배경

투시화법은 2차원 평면에 3차원 입체를 표현하기 위하여 연구 개발된 기법으로서 화가 알베르티(Alberti)와 듀러(Durer, 1471-1528)에 의하여 이론화된 원리이다. 16세기 透視畵法(원근법)의 거장으로는 미켈란젤로, 다빈치, 라파엘을 꼽는다. 이들의 투시화법은 화가들이 회화를 사실적, 입체적으로 표현하기 위하여 연구한 **artistic perspective drawing**이었다.

본 연구에서는 건축가와 기술자들이 상세하게 설계도를 그리고 과학자들이 그들 연구에 관한 과

정을 보이고자 할 때 이용되는 **mechanical perspective drawing**을 제시하고자 한다.

<그림 1>

<그림 1>을 살펴보자. 이미 우리는 건물의 꼭지점들이 평행하다고 알고 있다. 그러나 사진에 나타나는 건물의 꼭지점들과 건물의 투시도를 작도할 때 꼭지점들의 선은 두 점을 따라 사라진다. 이 사라지는 점을 투시화법에서는 **vanishing point(소슬점, 消失点)**이라 부른다. 그리고 두 번째로 깨닫게 되는 사실은 우리들 시야에서 멀리 떨어져 있는 건물은 가까이에 있는 건물보다 작게 나타난다. 그 이유는 무엇일까? 그 까닭은 우리 눈의 착각 때문이다. 따라서, 우리 눈의 착각을 이용하여 2차원 평면에 3차원 공간을 입체적으로 표현하고자 한 것이 투시화법이다. 500년 전에는 화가들이 중세의 평면적인 그림에서 벗어나 2차원 화폭에 사물을 사실적이고 입체감 있게 표현하려고 투시화법을 연구했으나, 오늘날은 2차원인 컴퓨터 모니터 위에 공간감과 역동성을 표현하려고 투시화법을 연구하는 것이다.

본 연구에서는 GSP를 활용하여 투시화법의 원리를 설명하고 trace기능을 사용하여 도형의 자취를 생생하게 보여줌으로써 더욱 현실감을 갖게 하고자 한다. 또한 자유로운 상상력을 자극함과 동시에 최근에 각광 받으며 산업 디자인 분야에 널리 애용되는 CAD, 3D-builder 등에 대한 이론적인 기초가 되는 수학적 원리를 설명 하고자 한다.

Ⅲ. 연구 내용

(1) GSP의 특징

Geometer's Sketchpad는 미국의 과학재단에서 VGP(visual geometry project)사업의 한 부분으로

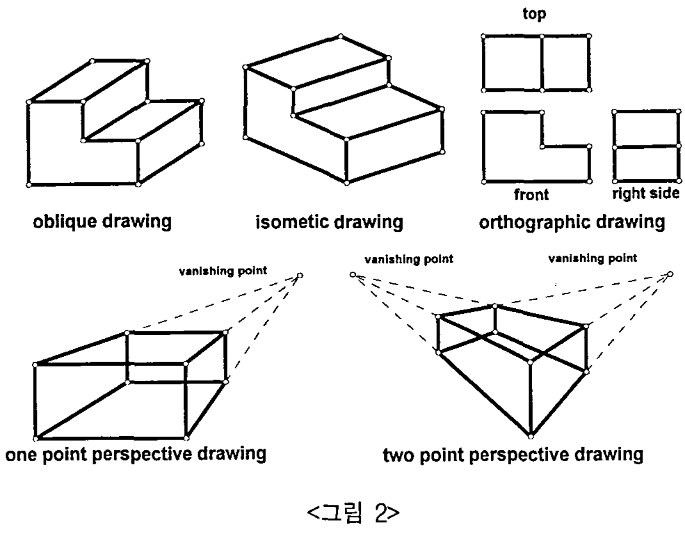
개발된 동적인 기하 소프트웨어이다. Nicholas Jachie가 1987년에 매킨토시용 GSP버전을 발표한 후 계속 새로운 버전을 발표하여 현재는 1995년에 발표된 GSP 3.1 버전을 사용하고 있다.

GSP의 특징을 살펴보면 다음과 같다.

① 도형의 특징을 잃지 않으면서 자유자재로 도형을 변화시킬 수 있다.
② Animation 기능과 trace 기능이 있어 학생들에게 기존의 정적인 기하를 동적인 기하로 변환시켜 이해시킬 수 있다.
③ Script 기능으로 작도의 순서를 기록, 재생할 수 있다.
④ 측정기능이 있으므로 측정을 통해 그려진 그림으로 가설을 세우고 그 가설을 증명도 할 수 있다.
⑤ 평행이동, 회전이동, 대칭이동, 확대·축소를 자유롭게 구사할 수 있다.
⑥ 계산기 기능으로 측정된 값을 비교할 수 있으며 새로운 측정도 가능하다.
⑦ 정의를 바탕으로 자와 컴퍼스를 이용하여 도형을 그리기 때문에 도형의 기본 개념과 성질을 정확히 파악할 수 있다.

(2) Mechanical Perspective Drawing의 종류

투시화법은 두 가지 유형으로 나뉜다. 하나는 예술가들이 사용하는 기법으로써 과정과 목적이 비기술적이고 정확성이 많이 요구되지 않는 artistic perspective drawing이고, 또 하나는 건축설계사나 엔지니어들이 사용하는 실제 물체 위의 점과 선이 정확히 요구되는 mechanical perspective drawing이다. 한편 mechanical perspective drawing은 다음과 같은 유형으로 분류된다.



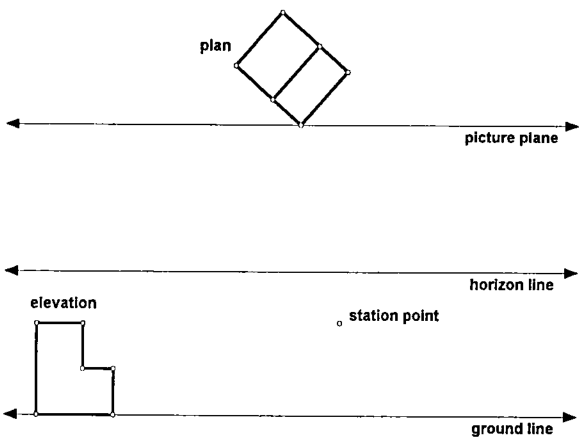
<그림 2>

<그림 2>를 살펴보자. Oblique drawing은 정면에서 바라보는 작도로써 각각의 모서리들은 모두 평행하지만 모서리의 연장선들은 한 개의 vanishing point에 모이지 않는다. 정면에서 바라보았지만

옆과 위도 볼 수가 있다. Isometric drawing은 임의의 각도에서 바라보는 작도법인데 모서리들은 모두 평행사변형으로 나타나며 Oblique drawing과 마찬가지로 모서리의 연장선은 수렴하지 않는다. Oblique과 isometric drawing 사이에 별 차이점은 없으나 사물을 정면에서 바라보기 때문에 oblique drawing이 Isometric drawing보다 작도하기 편리하다. Orthographic drawing은 사물의 top view(평면도), front view(입면도), side view(측면도)로 이루어져 있는데 이 방법은 건축가나 기술자들에 의해 이용된다. One point perspective drawing에서는 직육면체가 앞면과 뒷면은 직사각형으로 작도되지만 나머지 네 면은 직사각형이 아니다. 왜냐하면 한 개의 vanishing point에 직육면체의 모서리들이 수렴해야 되기 때문이다. 그리고 two point perspective drawing에서는 vanishing point가 두 개으므로 직육면체의 모든 면은 임의의 4각형으로 나타난다. Drawing의 유형을 정리하여 그 차이점을 살펴보면 다음과 같다.

화법 (Kind of drawing)	소슬점의 수 (Number of vanishing point)	측량 가능성 (All lines are measurable)	실제모습인가? (Realistic appearance)
Oblique	0	있다.	아니다.
Isometric	0	있다.	아니다.
One-point Perspective	1	없다.	이다.
Two-point perspective	2	없다.	이다.

위에서 본 이 유형들은 GSP상에서 투시화법을 작도할 때와 약간의 차이를 보이는데 그 차이점은 vanishing point이다. 우리가 바라보는 모든 사물의 평행선들은 vanishing point를 가지고 있는데 땅과 평행하는 선들은 horizon line위에 vanishing point를 가지게 된다. 많은 빌딩이 있는 사진을 보게되면 건물의 모서리 부분들이 한 점 또는 두 점 더 많게는 세 점 이상의 점을 향해 평행하게 뻗어 있는 것을 볼 수 있다. 결국 GSP를 활용한 투시화법의 작도는 vanishing point를 이용한 작도로서 vanishing point는 한 개 또는 두 개 이상으로도 구현될 수 있다. 사물을 투시화법으로 작도하기 위해서 우리는 <그림 3>같은 layout을 사용한다.



<그림 3>

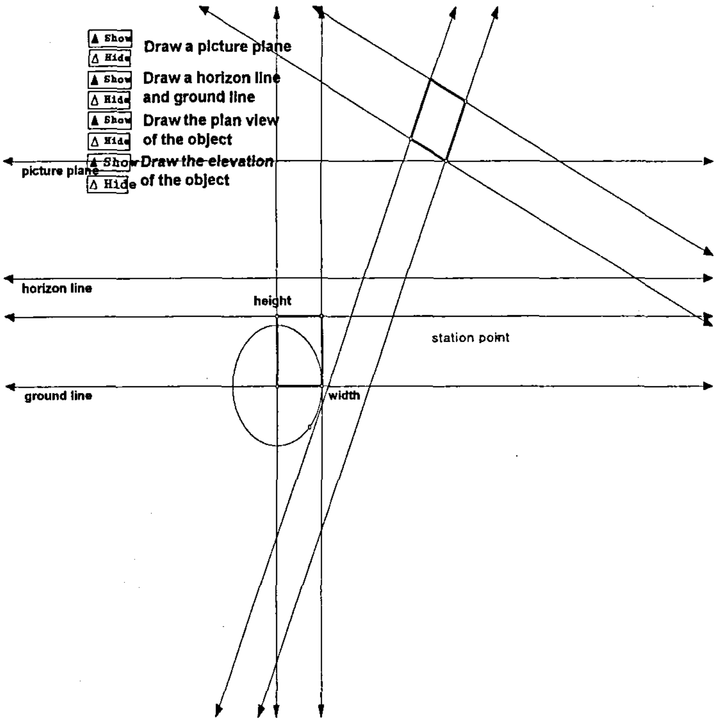
이때 다음과 같은 몇 가지 성질이 요구된다.

① 관찰자가 유리창 밖에서 사물을 보지만 실제로 그려지는 그림은 유리 평면에 그려지는 것이다. 여기서 유리 평면을 picture plane이라 한다.

② 사물의 모든 차원(dimension)은 layout에 표현되어야 한다.

③ Plan view와 elevation view인 2차원 도형으로 3차원을 구성할 수 있다.

④ 관찰자의 시선이 대응되는 점을 station point라 하고 picture plane상의 측면도를 elevation이라 한다.



<그림 4>

⑤ Top view는 plan view, station point, picture plane의 변을 표현하는 직선을 포함하고, side view는 elevation view, ground line, horizon line를 포함한다.

⑥ Plan view로는 사물의 길이와 너비를 알 수 있다. Ground line은 ground plane을 표현하는 직선이고, elevation은 그 직선에 있다. Horizon line은 관찰자의 눈 높이가 있는 직선이다. 따라서 vanishing point는 horizon line 위에 존재하게 된다.

⑦ Plan은 스크린 상의 거의 모든 곳에 둘 수 있지만 picture plane 중앙에 plan의 모퉁이가 오게 하는 것이 편리하다. 그리고 station point의 위치는 사물 앞에 서 있는 관찰자가 어디 있는가에

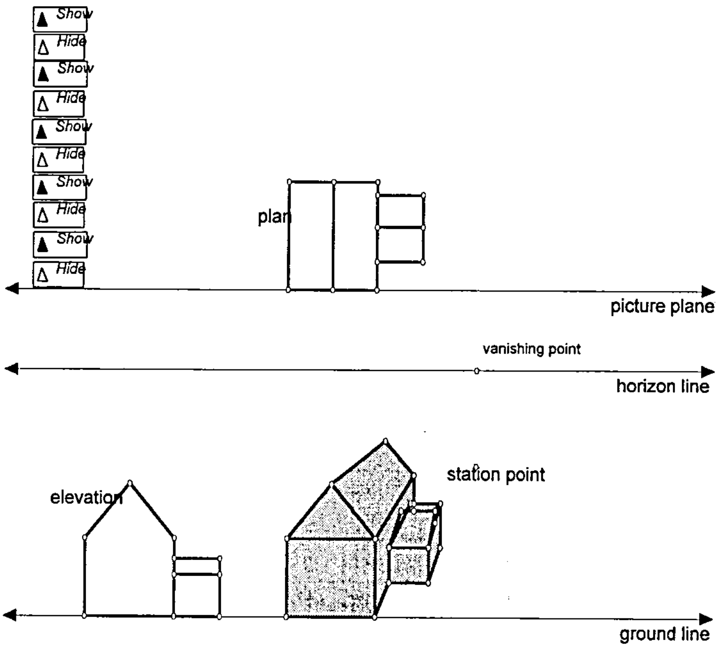
따라 plan과 관련이 있다.

⑧ 관찰자의 눈 높이에 의해 ground line의 위치가 결정이 되므로 horizon line은 ground line 위에서의 관찰자의 눈 높이이다. 관찰자의 눈 높이와 plan의 각도는 30° ~45° 가 가장 편리하다.

<그림 3>과 같은 layout을 만든 후에 <그림 4>와 같은 drawing을 한다.

(3) One Point Vanishing Point를 갖는 작도

이제는 작고 예쁜 집을 한번 작도해 보자. 한 개의 vanishing point를 갖는 one-point perspective drawing이다. 이 때 물체의 모서리 부분들이 한 점의 vanishing point에 모두 모이게 된다. 예를 들면 다음과 같은 집 모양의 작도가 이 형태에 속한다.

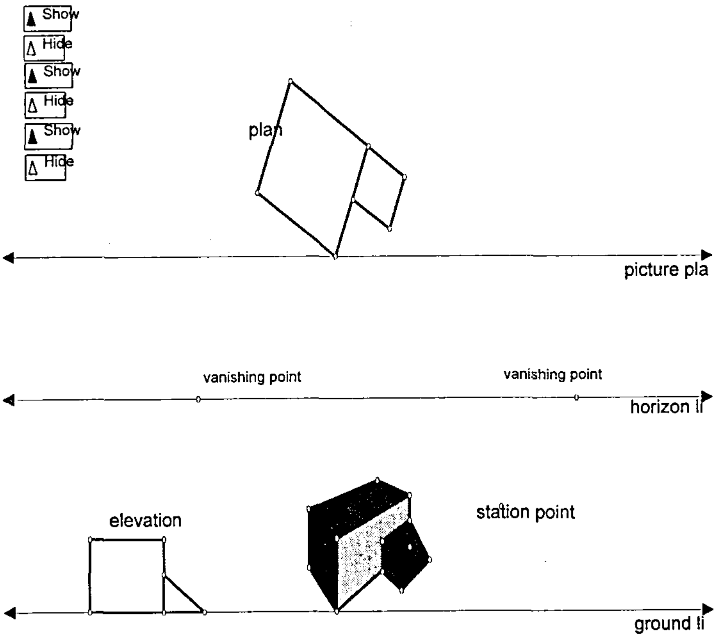


<그림 5>

(4) Two Point Vanishing Point를 갖는 작도

Two-point perspective drawing은 두 개의 vanishing point를 가지는 작도법으로 한 점 투시도 작도법과 같은 방법으로 하면 된다. 보편적으로 두 점 투시도 작도법은 모든 사물에 다 적용될 수 있

다. 왜냐하면 평소에 우리가 사물들을 바라볼 때 우리 눈에 나타나는 현상과 상당히 근사하기 때문이다.



<그림 6>

Ⅳ. 결 론

제 7차 교육과정에 의하여 2002년부터 시행되는 고등학교 수학교육과정은 수요자 중심으로 교육의 방향이 바뀌어 1학년에게 (일반)수학을, 2, 3학년에게는 일반선택 과목으로 실용수학을, 심화선택 과목으로는 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 확률과 통계, 미적분, 이산수학을 제시하게 된다.

이제 학생들은 능력에 맞게 수준별 수업을 들을 수가 있게 된다. 본 연구에서는 이와 같이 변모해 가는 고등학교 수학교육과정에 테크놀러지를 이용한 수학 즉, 전산수학 과목의 한 영역으로 GSP를 활용한 기하 교육에 관하여 조사·연구하였다. 그 동안 국내에서 연구된 결과에 의하면, Geometer's sketchpad(GSP)를 사용하여 중학교 학생들에게 교수한 결과 변형된 여러 도형을 통하여 학생들은 발견적 사고를 이끌어 낼 수 있게 되었고 수학의 추상적인 시각화가 기하학습의 어려움을 완화시켜 주었다고 한다. 또한 영상매체에 익숙한 청소년들에게 animation 기능과 trace 기능 등으로 관심을 끌고 흥미를 유도하여 수학에 대한 두려움이 없어진다고 한다.

본 연구에서는 mechanical perspective drawing의 작도법을 수학적인 근거를 바탕으로 설명하였다. 가령 직육면체를 그릴 때 isometric drawing에서는 평행선의 모서리들은 평행하게 나타나므로 소슬점이 없으며 실제 모습으로 보이지 않지만 길이를 잴 수 있는 측량 가능성이 있다. 그리고 oblique drawing에서도 평행선의 모서리들은 평행하고 소슬점이 없으며 실제 모습이 아니고 측량 가능성이 있는 점은 isometric과 같다. 그러나 isometric drawing은 정면에서 바라보는 것을 묘사하기 때문에 oblique drawing보다 편리한 점이 있다. 한편 같은 직육면체를 작도하더라도 소슬점을 하나만 염두에 두고 그린 one point perspective drawing은 실제 모습처럼 작도가 되지만 측량 할 수가 없는 단점이 있고 소슬점 두 개를 예측하고 그린 two point perspective drawing도 실제 모습으로 작도되더라도 실제 길이를 측량 할 수 없는 단점이 있는 것을 알게 되었다.

본 연구에서는 one point perspective drawing과 two point perspective drawing으로 작은 집을 작도해 보았다. 이러한 실험은 대학의 수학과에서 기하학 교과목을 컴퓨터로 활용하고자 할 때 학생들에게 그룹의 과제로 내주어도 좋은 영역이라고 생각된다. 또한 수준별 선택형 수업이 실시되는 고등학교 학생들에게도 흥미 있는 분야가 될 것이다. 특히, 건축, 토목, 기계공학을 비롯하여 멀티미디어, 영상 처리 등 산업디자인 분야를 전공하고자 하는 고등학생들에게 새로운 관심을 제공할 수 있으리라고 사료된다.

참 고 문 헌

강옥기 (1997). 수학교육에서의 컴퓨터의 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **35(1)**, 서울: 한국수학교육학회, 15-23.

강순자 · 고상숙 (1999). 공간 능력을 신장하기 위한 기하 학습 자료 개발 : GSP를 이용하여 정다면체 구성, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **38(2)**, 서울: 한국수학교육학회, 178-187.

계영희 (1994). van Hiele 이론에 근거한 대학생의 기하 발달 수준의 측정, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **35(1)**, 서울: 한국수학교육학회, 45-50.

류성림 · 정창현 (1993). 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **32(2)**, 서울: 한국수학교육학회, 137-149.

양기열 · 주 미 (1998). 소프트웨어를 활용한 기하 교수 · 학습 방안, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **37(2)**, 서울: 한국수학교육학회, 215-225.

황 일 (1996). 수학교육에서의 컴퓨터의 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **35(1)**, 서울: 한국수학교육학회, 15-23.

Cathi Sanders(1995). *Perspective Drawing with the Geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press, C.A.

Eugene Klotz & Doris Schattschneider (1995). *The Geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press, C.A.

Gutierrez, A. et al. (1991). An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of the van Hiele Levels, *Journal for Research in Mathematics Education* **22**, 3.

Solow, D.(1984). Reading, writting and doing mathematical proofs. *Proof Techniques for Geometry*, Dale Seymour Publication. 1-3.

Usiskin, Z. (1982). *van Hiele Levels and Achievement in Secondary of Chicago.*(ERIC ED220288)