韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 10집, 2000. 1. 221-236.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 10, Jan. 2000. 221-236.

고등학교 수학에서의 미분 단원의 내용 구성에 관한 고찰

김 부 윤 · 김 윤 영 (부산대학교)

오늘날 우리의 교육은 교육과정에 나와 있는 내용의 구성에 대해서는 어떤 부분을 강조해야 하는가? 그리고 왜 강조해야 하는가?에 대해서 학생들에게 잘 전달하지 않은 채, 어려운 공식 · 원리 · 법칙 등의 유도와 문제풀이 등으로 인해 학생들은 점점 수학에 대해 흥미를 잃고 있다.
본 연구에서는 현행 고등학교 수학에서의 미분과 적분 단원의 내용 구성에 있어서 문제점을 살펴보고, 수학 학습이 학습자에게 좀더 의미 있는 활동이 되도록 미분과 적분 단원의 내용에 대한 바람직한 지도계열에 대해서 살펴보고, 지도시 특히 강조해야 할 점들을 대학수학에서의 이론적 배경을 토대로 살펴본다.

Ⅰ. 서 론

수학 교사들은 학생들로부터 왜 미분을 배우느냐는 질문을 종종 받지만, 어느 누구도 그런 학생들의 질문에 명확하게 대답을 하지 못한다. 무엇 때문에 이 단원을 학생들에게 가르쳐야 하고, 어떤 내용을 얼마나 깊이 있게 강조해서 가르쳐야 하는지를 교사들조차도 잘 모르기 때문이다. 따라서, 학생들은 수학을 자신의 학습이 무엇을 향해 가고 있으며, 왜 그렇게 하고 있는가에 대한 합리적이고 타당한 신념이 없이 기계적으로 공식을 암기하고 문제를 푸는 테크닉을 연습하는 과목으로 생각하고 있다.

한편, 현행 교육과정에서 수학 I 의 미분 단원 중 다항함수의 미분법을 대부분의 교과서에서는 다음과 같은 순서로 제시하고 있다(고등학교 교육과정(I), 1992) :

1. n이 자연수일 때, $(x^n)' = nx^{n-1}$
   c가 상수일 때, $(c)' = 0$
2. 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여
   $\{kf(x)\}' = kf'(x)$ (k는 상수)
   $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$ [합의 미분법]
   $\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$ [차의 미분법]
   $f(x) \cdot g(x)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ [곱의 미분법]

몫의 미분법
미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ $(g(x) \neq 0)$에 대하여

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

특히, $\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

그러나 이와 같은 스칼라곱의 미분법, 합의 미분법, 차의 미분법, 곱의 미분법, 몫의 미분법의 순으로의 전개는 수학적 지식의 빈곤에 기인한 잘못된 전개이다. 또한 미분을 활용해서 다항함수의 그래프를 그릴 때, 거의 대부분의 교과서에서는 다항함수의 그래프를 그리는 것을 4차까지로 한정하고 있는데, 이것은 수학사적인 입장에서 볼 때 수단과 목적이 전도된 결과라고 할 수 있다. 다시 말하면, 다항함수의 그래프를 그리는 본래의 목적은 5차 방정식의 근이 사칙연산과 거듭제곱근에 의해 구할 수 없다는 것을 증명하기 위해서 필요한 것임에도 불구하고, 5차 이상을 다루지 않고 있다.

본 논문에서는 미분 단원이 어떠한 역사적 · 이론적인 배경을 가지고 있으며, 또 미분법의 공식 가운데 합과 곱의 미분법을 다른 어떤 미분법보다 강조해서 학생들에게 지도해야 하는 이유를 제시한다. 또한, 도함수의 활용 중 함수의 그래프를 그릴 때, 반드시 5차 다항함수의 그래프를 그리는 것이 교육과정에 포함되어야 하는 이유에 대해 살펴본다.

이를 통해 수학 학습이 학습자에게 좀더 의미 있는 활동이 되도록 미분 단원을 지도하는데 도움이 되도록 하는데 그 목적이 있으며, 아울러 교수학습을 염두에 두고 선정된 내용을 교육적으로 정교화시키는 역할을 해야 할 數學科 교재론에서 대학수학과 중등수학과의 연계성에 관해서 아무리 강조해도 지나치지 않음을 역설하고자 한다.

Ⅱ. 미분법의 역사

스미스(D.E. Smith)는 미적분학의 발전에는 다음과 같은 4단계가 있다고 주장하고 있다(우정호, 1998).

① 제1단계는 고대 그리스나 3세기경의 중국에서이며, 원주율 π의 값을 구하는데 원에 내접 · 외접하는 정다각형을 쓰거나 약수를 갖는 수에서 약수를 자지지 않는 수로 바꾸어 나가는 과정에서 볼 수 있다.

② 제2단계는 무한소의 방법이며, 이것은 17세기의 케플러(Kepler), 카발리에리(Cavalieri)의 연구 가운데 나오며, 이것은 나중에 뉴턴과 라이프니츠에 의해 이용되는 단계이다.

③ 제3단계는 뉴턴에 의한 물체 운동의 연구에서 유율법(流率法)이라고 불리는 이론이며, 여기서 유(流 : fluent)라고 하는 것은 운동에 있어서 시간과 같이 변하는 양, 즉 시간의 함수이며, 유율(流率 : fluxion)이라는 것은 단 시간 내에의 흐름의 변화량으로 오늘날의 미분계수에 해당된다. 이에 대해 라이프니츠는 곡선에 접선을 긋는다는 기하학적인 면에서, 유율에 해당하는 미분계수의 생각에 이르고 있다.

④ 제4단계는 극한의 개념이며, 이것은 뉴턴에 의하여 이루어진 것이다.

Ⅲ. 합과 곱, 몫의 미분법

(1) 합과 곱의 미분법의 이론적인 배경

합과 곱의 미분법을 대학 수학의 측면에서 살펴보기로 하자.

【정의】 (Amitsur-Kasahara) R을 환(ring)(+와 ·를 가진 대상)이라고 하자. $a,b \in R$에 대하여 함수 $\delta : R \to R$가 다음 조건

(i) $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$

(ii) $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$

을 만족하면 미분(derivation)이라고 한다(Fraleigh, J.B., 1989; Hungerford, T.W., 1973).

미분방정식

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \ \cdots \ (*)$$

에서 $D = \dfrac{d}{dx}$ 라 하면, (*)는 $D^2y - 3Dy + 2y = 0$이다. 따라서 $(D^2 - 3d + 2)y = 0$이고 $(D-1)$ $(D-2)y = 0$이다. 이 미분방정식에서 미분연산자 $D^2 - 3D - 2I$를 얻는다. 이처럼 미분방정식이 주어지면 그것은 미분연산자로 표현이 가능하다.

이러한 사실로부터, Amitsur와 Kasahara는 다음과 같은 것을 생각했다 :

$D : R \to R$이 미분(derivation)이라고 하고, $a_n \neq 0, b_n \neq 0$일 때, 집합

$$A = \{a_0 + a_1D + a_2D^2 + \cdots + a_nD^n \mid n = 0,1,2,\cdots,a_0,\cdots,a_n \in R\}$$

에서의 연산을 생각해 보자.

먼저 $a_0 + a_1D + a_2D^2 + \cdots + a_nD^n = b_0 + b_1D + b_2D^2 + \cdots + b_mD^m$일 필요충분조건을 $m = n$이고 $a_k = b_k$라고 정의하자. 그러면 합 +와 분배법칙이 성립하는 곱 · 에 대하여,

$$\begin{aligned}
(Da)(b) &= D(ab) = aD(b) + D(a)b \\
&= (aD)(b) + (D(a))b = (aD + D(a))(b) \\
D^2a &= D(Da) = D(aD + D(a)) = (Da)D + DD(a) \\
&= (aD + D(a))D + D^2(a) = aD^2 + D(a)D + D^2(a)
\end{aligned}$$

이다. 그러면 A는 환(ring)이며, 이런 환을 미분연산자환(differential operator ring)이라고 한다.

Kasahara는 어떤 미분함수 $\delta : R \rightarrow R$에 대하여, A를 일반적인 대상이라 할 때,

$$A \rightarrow \{a_0 + a_1\delta + a_2\delta^2 + \cdots + a_n\delta^n \mid n = 0,1,2,\cdots, a_0, \cdots, a_n \in R\}$$

가 전사함수(onto function)임을 보였다.

이런 Amitsur과 Kasahara의 작업을 통해서 볼 때, 미분에서 가장 강조해야 할 점들은 다음과 같은 합과 곱의 미분이다 :

(1) $(f(x) + g(x))' = f(x)' + g(x)'$
(2) $(f(x)g(x))' = f(x)g(x)' + f(x)'g(x)$

(2) 합과 곱의 미분법의 대수적인 고찰

【정의】 R을 가환환(commutative ring)이라고 하자. R의 부분집합 I가 $(I,+)$가 $(R,+)$의 부분군(subgroup)이 되고, 어떤 $a \in I$와 $r \in R$에 대하여 $ar \in I$일 때, I를 ideal이라고 한다(Fraleigh, J.B., 1989; Hungerford, T.W., 1973).

【정리】 R의 아이디얼(ideal) M이 최대 아이디얼(maximal ideal)일 조건은, $M \sqsubseteq K \sqsubseteq R$인 R의 아이디얼 K가 존재하면 $K = M$이거나 $K = R$이다.

【예】 $R = \mathbb{Z}$ (정수환)라면 모든 최대 아이디얼의 집합은 $\{p\mathbb{Z} \mid p$: 소수$\}$이다.

또한, 다음 사실을 알고 있다.

【정리】 R이 가환환일 때 R이 단지 두 개의 아이디얼 O(최대 아이디얼)과 R을 가질 필요충분조건은 R이 체(field)이다. 즉 R이 단순(simple)일 필요충분조건은 R이 체이다.

여기서 R이 가환이 아니더라도, 위의 정리는 성립하는가? 즉, R이 단순(simple)일 필요충분조건은 R이 나눗셈 환(division ring)이더라도 성립되는가? 이것은 성립하지 않는다. 예를 들어, $R = Mat_2(\mathbb{R})$일 때, R은 단순이지만, 나눗셈 환은 아니다.

그러면, 정역(integral domain)이 되는 단순환(simple ring)은 존재하는가? 하는 문제를 생각해 볼

수 있는데, 이것은 합과 곱의 미분법에 의해 가능하다. 예를 들어, $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$에서

$$D(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$

라고 정의하면, D는 $\mathbb{R}[x]$에서 미분(derivation)이 된다. 그러면, D가 정의된 $\mathbb{R}[x]$ 상에서 미분연산자환(differential operator ring)을 생각해 보자. $D : R \to R$ 이 미분(derivation)이라고 하고,

$$A = \{a_0 + a_1D + a_2D^2 + \cdots + a_nD^n \mid n = 0,1,2,\cdots,a_0,\cdots,a_n \in R\}$$

라 하자. $a_n \neq 0, b_n \neq 0$일 때,

$$a_0 + a_1D + a_2D^2 + \cdots + a_nD^n = b_0 + b_1D + b_2D^2 + \cdots + b_mD^m$$

일 필요충분조건을 $m = n$이고 $a_k = b_k$라고 정의하면, 합 +와 분배법칙이 성립하는 곱 · 에 대하여, $(Da)(b) = (aD + D(a))(b)$, $D^2a = aD^2 + D(a)D + D^2(a)$이라는 사실은 앞에서 살펴보았다. 이제 이것을

$$A = \{a_0(x) + a_1(x)D + \cdots + a_n(x)D^n \mid n = 0,1,2,\cdots,a_i(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$

를 얻기 위해 D가 정의된 $\mathbb{R}[x]$에 적용시켜 보자. 각 성분별로 정의되는 합 +와 결합법칙이 성립하는 곱 · 에 대하여 $Da(x) = a(x)D + D(a(x))$라고 하면, 미분연산자환은 정역(integral domain)인 단순환이지만 나눗셈 환은 아니다.

이런 모든 사실들은 합과 곱의 미분법에 달려 있다.

보다 일반적으로 전개하기 위해서, 다음과 같은 두 개의 미분 D_1과 D_2를 살펴보자 :

$$D_1 : \mathbb{R}[x_1,x_2] \to \mathbb{R}[x_1,x_2]$$

$$f(x_1,x_2) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1,x_2)$$

$$D_2 : \mathbb{R}[x_1,x_2] \to \mathbb{R}[x_1,x_2]$$

$$f(x_1,x_2) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1,x_2)$$

$$A_2 = \{ a_{00}(x_1,x_2) + a_{10}(x_1,x_2)D_1 + a_{01}(x_1,x_2)D_2 + \cdots$$
$$+ a_{mn}(x_1,x_2)D_1^mD_2^n \mid m,n = 0,1,2,\cdots,a_i(x_1,x_2) \in \mathbb{R}[x_1,x_2]\}$$

라 두고, 각 성분별로 정의되는 합 +과 결합법칙이 성립하는 곱 ·에 대하여

$$D_1 a(x_1, x_2) = a(x_1, x_2)D_1 + D_1(a(x_1, x_2))$$
$$D_2 a(x_1, x_2) = a(x_1, x_2)D_2 + D_2(a(x_1, x_2))$$

이고, $D_1 D_2 = D_2 D_1$ 이다. 그러면, A_2는 또한 단순 정역(simple integral domain)이지만 나눗셈 환은 아니다. 일반적으로, A_n은 단순 정역이지만 나눗셈 환은 아니다.

【정리】 (Reinhart) A_n의 우대역차원(右大域次元 ; right global dimension)은 n이다. 즉 A_n은 n개의 부정원(undeterminate)을 가진 $\mathbb{R}$ 에서의 다항식환(polynomial ring)과 같다.

이 정리는 미분방정식에서 미분연산자를 다루는 데 많은 정보를 제공해 준다.

(3) 몫의 미분법

【정의】 R이 환(ring)이라고 가정하면, $a \in R$가 다음 조건

(i) $ax = 0$ 이면 $x = 0$ 이고

(ii) $ya = 0$ 이면 $y = 0$ 이다.

를 만족할 때, $a \in R$를 정칙(regular)이라고 한다. 특히 정칙인 모든 $a, b \in R$에 대하여, $aR \cap bR \neq 0$ 일 때, 환(ring)을 right Ore라고 한다(Fraleigh, J.B., 1989; Hungerford, T.W., 1973).

R이 right Ore라고 하면,

$$O(R) = \{ab^{-1} \mid a, b \in R,\ b : \text{regular}\}$$

는 환(ring)이다. $D : R \to R$이 미분(derivation)이라고 하면 D는 환 $O(R)$에서의 미분으로 확장될 수 있다. 즉 $ab^{-1} \in O(R)$에 대하여,

$$D(ab^{-1}) = -ab^{-1}D(b)b^{-1} + D(a)b^{-1}$$

라고 정의하면, 물론 D는 $O(R)$ 상에서 미분(derivation)이 된다. 또한 앞에서와 같이 이런 D는 유일하게 존재한다.

(4) 시사점

이상을 정리하면, 미분 단원에서 다항함수의 미분법을 지도할 때에는 다음과 같은 순서에 따라 하

는 것이 좋을 것으로 생각되며, 특히 합과 곱의 미분법을 강조해서 지도해야 할 것으로 사료된다.

1. $D(a+b)=D(a)+D(b)$ [합의 미분법]
2. $D(ab)=aD(b)+D(a)b$ [곱의 미분법]

합과 곱의 미분법에서 다음을 얻을 수 있다.

3. $Q(R)$이 존재한다면, $D(ab^{-1})=-ab^{-1}D(b)b^{-1}+D(a)b^{-1}$ [몫의 미분법]

【정의】 만약 R이 가환환 K에서

$$k(ab)=a(kb)=(ka)b \qquad k\in K,\ a,b\in R$$

을 만족하는 벡터공간일 때, 환 R을 K에서 대수(algebra)라고 한다(Fraleigh, J.B., 1989; Hungerford, T.W., 1973).

이 경우에 만약 $D:R\rightarrow R$가 다음과 같은 성질

(1) $D(a+b)=D(a)+D(b)$
(2) $D(ab)=aD(b)+D(a)b$
(3) $D(ka)=kD(a) \quad k\in K,\ a\in R$

을 만족한다면, 함수 D는 algebra derivation함수이다.

이상의 관점에서, 다음과 같은 식이 마지막으로 설명될 수 있다.

4. $(cf)'=cf'$
5. 합과 곱의 미분법 및 몫의 미분법에 의해,

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)'=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$$

이라는 사실을 알 수 있다. 왜냐하면

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)'=(a_0)'+(a_1x)+(a_2x^2)'+\cdots+(a_nx^n)'$$

과 $(a_0)'=0,\ x'=1,\ (x^2)'=2x,\ \cdots$ 등이 성립하기 때문이다.

Ⅳ. 그래프의 개형

여기서 살펴볼 것은 세 개의 실근을 가지는 인수분해가 되지 않는 5차 다항함수의 그래프를 그리는 것이 미분법의 응용 중 그래프를 그리는 단원에 반드시 넣어야 하는 이유를 제시한다.

(1) 역사적인 배경

미분에서 그래프의 개형을 지도할 때, 어떤 것이 다루어져야 하는가? 에 대해 알아보자. 20세기 중반에 아벨(Abel)에 의해 400년 동안 해결되지 않았던 문제인 '5차 방정식은 사칙연산과 거듭제곱근에 의해 근을 구할 수 없다'는 것이 증명됨으로써, 지금까지의 현대수학의 진보와 발전은 가속화되었다.

이런 5차 방정식의 불가해성의 증명은 3개의 실근과 2개의 허근을 가지는 5차 다항함수의 그래프를 그려봄으로써 가능했는데, 이것은 수학에서의 혁명이라고 할 수 있다 : 아벨은 드 모르강(De Morgan)에 의해 개발된 강력한 도구 — 다항방정식의 문제를 푸는데 드 모르강의 생각 — 를 사용했다. 사실 그는 다항방정식을 푸는데 변환군(transformation group)이라는 새로운 도구를 사용했다.

$\mathbb{Q}[x]$에 있는 4차 이하의 다항식은 근을 구할 수 있는데, 주된 아이디어는 다음과 같다 :

먼저, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $y=x+\alpha$라 두면, $x=y-\alpha$이다. 이것을 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면, $0=a(y-\alpha)^2+b(y-\alpha)+c$이다. 이 방정식에서 $0=ay^2+\beta=a(x+\alpha)^2+\beta$이기 때문에 일차항을 0으로 두면 α를 구할 수 있고 따라서 근을 구할 수 있다.

이런 아이디어로 3차와 4차 방정식을 해결하는 것은 Cardan-Ferrari에 의해 확장되어졌으며, 3차 방정식에서는 2차항을, 4차 방정식에서는 3차항을 0으로 두면 된다.

(2) 이론적인 배경

5차 방정식의 불가해성을 증명하는데 필요한 이론적인 배경을 살펴보자.

$A=\{1,2,3,\cdots,n\}$라 하고 $S_n=\{f \mid f: A \to A : 1-1 \text{ 대응}\}$이라고 하면, $(S_n, \circ)$는 군이 되는데, 특히 이 군을 대칭군(symmetric group)이라고 한다. 물론 여기서 $\circ$는 함수의 합성이다. 이제부터 S_n에 대해 살펴 보자. $f(x)=a_0+a_1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \in \mathbb{Q}[x]$일 때, 가우스(F.Gauss)는 그의 박사논문에서 $f(x)$의 모든 근들이 $\mathbb{C}$에 있다는 것을 증명했으며, 그후 루빌(Liouville)은 Maximum Modulus theorem에 의해 이런 가우스의 정리를 증명했다. 크로네커(Kronecker)는 $n \geq 5$일 때, +, -, ×, ÷, $\sqrt[n]{\ }$, $(\ )^k$ 등에 의해 근들을 계산할 수 있는가? 라는 의문을 제기했다.

먼저 $f(x)$의 근들을 계산하기 위해, 먼저 $f(x)$가 기약(irreducible)이라고 가정하자.

1. $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$가 기약이라고 하면, $\mathbb{C}$ 에 있는 $f(x)$의 모든 근들은 서로 다른 근이다. 왜냐하면, $f(x) = a_0 + a_1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$에서

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$

이다. $\alpha \in \mathbb{C}$ 가 $f(x)$의 근이라고 하면, $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$이고,

$$f'(x) = k(x-\alpha)^{k-1}g(x) + (x-\alpha)^k g'(x)$$

이다. 만약 $k \geq 2$이면, $f'(\alpha) = 0$이다. 만약 $k = 1$이면, $f(x) = (x-\alpha)g(x)$이고 $g(\alpha) \neq 0$이므로 $f'(x) = g(x) + (x-\alpha)g'(x)$이다. 따라서 $f'(\alpha) = g(\alpha) \neq 0$이다.

역으로, $f'(\alpha) \neq 0$이면 α는 중복근(multiple root)이 아니다.

2. $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n\}$을 $\mathbb{C}$ 에서의 모든 근들의 집합이라고 하면, $i \neq j$에 대하여 $\alpha_i \neq \alpha_j$이다. K가 $\mathbb{Q}$ 에서의 $f(x)$의 분해체(splitting field)라고 하고,

$$\begin{aligned} G &= Aut_{\mathbb{Q}}(K) \\ &= \{\sigma \mid \sigma : K \to K : \text{체동형사상, 모든 } a \in \mathbb{Q} \text{에 대하여 } \sigma(a) = a\} \end{aligned}$$

라고 하자. 여기서 연산 $\circ$를 동형사상(automotphism)들의 합성이라고 하면, $(G, \circ)$는 군이 되고, 이 군을 $\mathbb{Q}$에서의 $f(x)$의 갈로아 군(Galois Group)이라고 한다.

실제로, 이런 군의 모양은 원시적인 단계의 군이다. $\sigma(\alpha_1)$을 살펴보자 :

$$0 = f(\alpha_1) = a_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + \cdots + a_n\alpha_1^n$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(0) = \sigma(a_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + \cdots + a_n\alpha_1^n) \\ &= \sigma(a_0) + \sigma(a_1\alpha_1) + \sigma(a_2\alpha_1^2) + \cdots + \sigma(a_n\alpha_1^n) \\ &= \sigma(a_0) + \sigma(a_1)\sigma(\alpha_1) + \sigma(a_2)\sigma(\alpha_1^2) + \cdots + \sigma(a_n)\sigma(\alpha_1^n) \\ &= \sigma(a_0) + \sigma(a_1)\sigma(\alpha_1) + \sigma(a_2)\sigma(\alpha_1)^2 + \cdots + \sigma(a_n)\sigma(\alpha_1)^n \\ &= f(\sigma(\alpha_1)) \end{aligned}$$

따라서, $\sigma(\alpha_1) \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n\}$이다. 같은 방법으로 하면,

$$\sigma(a_i) \in \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$$

이다. 따라서, $\sigma\mid_{\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}} : \{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\} \to \{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$는 1-1 대응(1-1 & onto function)이 된다. 그러므로 $\sigma \in Aut_{\mathbb{Q}}(K)$에 대하여, $\sigma\mid_{\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}}$는 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$에서 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$로 가는 1-1 대응이 된다.

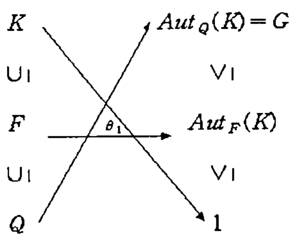
만약 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 대신에 $\{1,2,3,\cdots,n\}$라고 하면, 대응

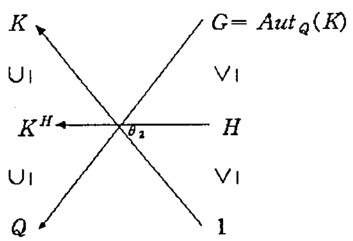
$$\begin{aligned} Aut_{\mathbb{Q}}(K) &\to S_n \\ \sigma &\mapsto \sigma\mid_{\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}} \end{aligned}$$

로부터 $Aut_{\mathbb{Q}}(K)$는 S_n의 부분군으로 간주할 수 있다.

드 모르강의 아이디어로부터 갈로아는 다음과 같은 연결을 생각했다 :

$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$가 기약이라고 하고, K가 $\mathbb{Q}$ 에서의 $f(x)$의 분해체라고 하자. 또한 $G = Aut_{\mathbb{Q}}(K)$라고 하면,





$K^H = \{k \in K \mid \sigma(k) = k,$ 모든 $\sigma \in H$ 에 대하여$\}$

θ_1 : 부분체 $\to$ 부분군, θ_2 : 부분체 $\leftarrow$ 부분군

라고 하면, θ_1과 θ_2는 순서가 바뀐 1-1 대응이고, $\theta_1^{-1} = \theta_2$이다.

(자세한 것은 Galois Fundamental Theorem을 참고하라)

이런 연결로 Galois와 Abel은 다음을 증명했다.

【정리】 (Galois-Abel) $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$가 기약이라고 하면, 다음 사실은 동치이다 :

(1) $f(x)$의 모든 근들은 $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt[n]{\ }$, $(\ )^k$ 등에 의해 근들을 계산할 수 있다. 즉 $f(x)$는 근의 공식에 의해 풀 수 있다.

(2) $Aut_{\mathbb{Q}}(K)$는 가해군(可解群 ; solvable Group)이다.

【정의】 (1) 어떤 군 G에 대하여, G의 부분군 N이 모든 $g \in G$에 대하여,

$$Ng = gN$$

을 만족할 때, 정규부분군(normal subgroup)이라고 한다. 여기서, $Ng = \{xg \mid x \in N\}$이고 $gN = \{gx \mid x \in N\}$이다. 이것을 $N \trianglelefteq G$로 나타낸다(Fraleigh, J.B., 1989; Hungerford, T.W., 1973).

【정의】 (2) $N \trianglelefteq G$이고 $G/N = \{gN \mid g \in G\}$라고 할 때, G/N에서 연산 $\circ$를

$$(g_1 N) \circ (g_2 N) = (g_1 g_2) N$$

으로 정의하면, $(G/N, \circ)$는 군이 되고, 이것을 G modulo N의 인자군(因子群 ; factor group)이라고 한다(Fraleigh, J.B., 1989; Hungerford, T.W., 1973).

【정의】 (3) $G_0/G_1, G_1/G_2, \cdots, G_{n-1}/G_n$들이 가환군(Abelian group)일 때, 다음과 같이

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq G_3 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_n = 1$$

감소하는 체인(chain)이 존재하면, 군 G를 가해군이라고 한다(Fraleigh, J.B., 1989; Hungerford, T.W., 1973).

【정리】 (4) 가환군은 가해군이다. 왜냐하면, G를 가환군이라고 하면, $G \trianglerighteq 1$이고 $G = G/1$이 가환군이기 때문이다. 특히 S_1, S_2는 가환군이기 때문에 가해군이다.

【정리】 (5) $H \leq G$이고, G가 가해군이면, H도 가해군이다.

【참조】 (6) (4)과 (5)에 의해, $f(x) = ax + b \in \mathbb{Q}[x]$, $g(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Q}[x]$는 근의 공식에 의해 풀 수 있다. 왜냐하면 K, F를 각각 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax^2 + bx + c$의 $\mathbb{Q}$에서의 분해체라고 하면, $Aut_{\mathbb{Q}}(K) \leq S_1$이고 $Aut_{\mathbb{Q}}(F) \leq S_2$이다. S_1, S_2가 가해군이기 때문에 $Aut_{\mathbb{Q}}(K)$와 $Aut_{\mathbb{Q}}(F)$은 가해군이므로 $f(x) = ax + b$와 $g(x) = ax^2 + bx + c$는 근의 공식에 의해 풀 수 있다.

【정리】 (i) $(S_2, \circ)$는 가해군이다.

(ii) $(S_3, \circ)$ 가해군이다(Cardan).

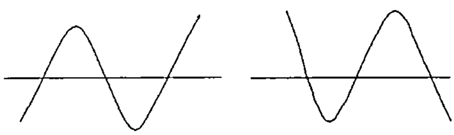
(iii) $(S_4, \circ)$는 가해군이다(Ferrari).

【정리】 (Abel) S_n $(n \leq 5)$은 가해군이 아니다.

(1) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \in \mathbb{Q}[x]$, $a_5 \neq 0$는 기약이라고 하자.

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ 와 $\alpha_4, \alpha_5 \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{R}$ 에 대하여 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} \subseteq \mathbf{C}$ 를 $f(x)$의 해집합이라고 하자.

(3) K를 $\mathbb{Q}$ 에서의 $f(x)$의 분해체라고 하면, $G = Aut_{\mathbb{Q}}(K) \cong S_5$이다. 이 경우 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다 :



$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$의 기약성(irreducibility)을 판정하는 데는 Eisenstein의 판정법이 있다.

【정리】 (Eisenstein's Criterion) $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in \mathbf{Z}[x]$라고 하자.

$p \mid a_0, p \mid a_1, \cdots, p \mid a_{n-1}, p \nmid a_n$이고 $p^2 \nmid a_0$인 소수 p가 존재하면, $f(x)$는 $\mathbb{Q}[x]$에서 기약이다.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ 와 $\alpha_4, \alpha_5 \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{R}$ 인 해를 가지는

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \in \mathbb{Q}[x] \quad (a_5 \neq 0)$$

가 기약이라고 하자.

$\tau : K \to K$	$\sigma : K \to K$
$\alpha_1 \mapsto \alpha_1$	$\alpha_1 \mapsto \alpha_2$
$\alpha_2 \mapsto \alpha_2$	$\alpha_2 \mapsto \alpha_3$
$\alpha_3 \mapsto \alpha_3$	$\alpha_3 \mapsto \alpha_4$

$\alpha_4 \mapsto \alpha_5$ $\qquad\qquad$ $\alpha_4 \mapsto \alpha_5$

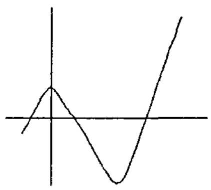
$\alpha_5 \mapsto \alpha_4$ $\qquad\qquad$ $\alpha_5 \mapsto \alpha_1$

라고 하면, $\sigma^5 = 1$이고 $\tau^2 = 1$이다. 또한 $G = \langle \sigma, \tau \rangle \subseteq S_5$이다.

$$S_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

이기 때문에 $G = S_5$이다.

【예제】 $f(x) = x^5 - 10x^4 + 2x^3 - 24x^2 + 2$일 때, $p = 2$라고 두면, $p^2 \nmid 2$이므로 Eisenstein의 판정법에 의해 $f(x) = x^5 - 10x^4 + 2x^3 - 24x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$는 기약이다. 이 경우 $f(x)$의 그래프 모양은 아래와 같다 :



따라서, $x^5 - 10x^4 + 2x^3 - 24x^2 + 2 = 0$는 $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt[n]{\ }$, $(\ )^k$ 등에 의해 근들을 계산할 수 없다.

(3) 시사점

고등학교 수학 수업에서 다항함수의 그래프의 개형을 그리는 것은 매우 중요하다. 왜냐하면, 4차 방정식을 푼 이후 5차 방정식을 풀기까지는 거의 400년의 걸렸다. 5차 방정식의 불가해성이 증명됨으로 인해 수학에서 현재까지 거대한 양의 지식의 발전이 있었고, 앞으로도 더욱 발전해 갈 수 있다.

결론적으로, 다항함수의 그래프의 개형을 그리는 것을 지도하는 궁극적인 목적은

$$y = x^5 - 10x^4 + 2x^3 - 24x^2 + 2 \quad \cdots \ (*)$$

와 같은 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있어야 한다는 것이다. 만약 현행 고등학교 수학교육과정에서 (*)와 같은 함수의 그래프의 개형을 그리는 것이 나와 있지 않다면, 이러한 것을 반드시 수학교육과정 속에 포함시켜야 할 것이다.

더욱이, 그래프의 개형을 그리는 데는 다항함수 뿐만 아니라, 다음과 같은 함수의 개형을 그릴 수 있으면 더욱 좋다 :

(1) 우함수. 즉, $f(x)=f(-x)$
(2) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$
(3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

다항함수 이외의 함수의 그래프의 개형을 그리는 목적은 통계에서 분포함수(distribution function)의 도입을 하기 위해서이다. Heaviside의 실험에 의해 발견된 한 가지 전형적인 분포함수는 $y=e^{-x^2}$이다. 그러므로, 현행 수학교육과정에서 $y=e^{-x^2}$의 그래프의 개형을 그리는 것이 강조해서 지도하여야 한다.

Ⅳ. 결론 및 제언

교과서에 주어져 있는 내용을 자신이 가르칠 전부라고 생각하고 단순히 그 내용을 일러주어 그것을 학생들이 알게 하는 일이 자신이 해야 할 일의 알파와 오메가라고 생각하는 교사라면, '왜 이것을 가르쳐야 하는가?'와 같은 질문을 던지는 일은 하지 않을 것이다. 그러나 교과서에 있다는 것이 그것이 학생들이 배워야 한다는 정당한 이유가 되는가? 그 내용은 왜 교과서에 기록되었는가? 그것이 수학에 들어있기 때문이다. 그것이 수학에 있다는 것이 학생들이 그것을 배워야 한다는 최종적이고 정당한 이유가 될 수 있는가?(임재훈, 1997).

교육과정의 개정 논의에서 '어떤 내용을 넣고, 어떤 내용을 뺄 것인가' 하는 문제를 제대로 논의하고 결정하기 위해서는 원칙적으로 '왜 이것이 아니라 저것을 가르쳐야 하는가?'라는 질문을 취급하지 않을 수 없다. 그런데 이 질문을 제대로 다루기 위해서는 먼저 그 각각의 내용, 곧 이것과 저것이 지닌 교육적 가치가 밝혀지지 않으면 안 된다. 그러므로 '어떤 내용을 넣고 어떤 내용을 뺄 것인가?' 하는 질문은 궁극적으로 각각의 수학 토픽을 '왜 가르쳐 왔으며, 왜 가르쳐야 하는가?'라는 질문으로 환원된다. 교육과정 개정의 내용 선정의 논의가 의미 있게 이루어지기 위해서는 수와 연산, 도형, 측정과 같은 거시적인 영역 수준에서부터 각각의 단원을 구성하고 있는 세부적인 수준에 이르기까지 여러 수준에서 수학 교과내용의 교육적 가치와 의의가 연구되지 않으면 안 된다. 이러한 영역은 교육과정 논의의 본질적인 연구영역이면서도 이제까지 연구의 손길이 잘 미치지 않는 사각지대였다(김부윤·박영식·신현성, 1996).

대학의 대부분의 학과에서는 학생의 장래의 목적과 가르치는 교수의 목적이 거의 일치하고 있다고 하겠다. 그러나 교사가 되기를 희망하는 학생과 가르치는 교수의 목적은 상당히 거리가 있다고 생각되며, 더욱이 수학자가 되기를 희망하는 학생들의 목적과도 거리가 있다고 생각된다. 하지만 대부분의 사범대학 학생들은 이러한 갭을 메우려는 노력은 별로 하지 않고, 현장에 나가서는 중등수학을 가르치

는데는 대학수학이 별로 소용없다고 하는 말을 하는 경우가 허다하다(김부윤 · 위성미, 1997).

이렇게 된 이유를 생각해 보면, 대학에서의 數學科 교재론이 제대로 착근되지 못했기 때문이 아닌가 한다. 數學科 교재론이란 교수학습을 염두에 두고 선정된 내용을 교육적으로 좀더 정교화시키는 역할을 하는 분야이다. 즉 학문으로서의 수학을 전담하는 수학자의 복잡한 사고과정에서부터 출발하여 학생의 학습활동이라는 종착역에 이르기까지의 복잡하고도 다원적인 변용(variation)의 과정을 고찰하는 것으로, 교수학적 변환론은 그 이론적 근거를 제공한다는 측면에서 數學科 교재론의 중핵을 차지한다고 볼 수 있다. 따라서 수학교육철학이나 인지심리학의 바탕 위에서, 수학 본래의 것도 지키면서 어떻게 내용을 학생이 이해하기 쉽도록 변모시킬 것인지를 연구하는 것이 數學科 교재론의 주요 관심사이다(박경미, 1996). 대학수학을 깊이 공부하면 할수록 중등수학과의 연결고리를 많이 찾을 수 있고, 교사양성교육은 내실이 더할 것임은 분명하다. 중등학교 학생들의 수학에의 흥미는 가르치고 있는 사람 자신으로부터 나온다는 평범한 사실을 사범대학 학생이나 교수들이 깊이 깨닫는 것, 이것이 연결고리를 찾는 첫걸음이 아닐까?

본 논문에서는 현행 고등학교 수학교육과정에서 미분 단원의 지도에 있어서의 문제점을 살펴보고, 미분법의 합과 곱의 공식을 왜 강조해서 지도해야 하는지, 미분법의 공식은 수업시간에 어떤 위계로 전개해야 하며, 그래프의 개형을 지도할 때 5차 다항함수의 그래프 그리는 것을 반드시 지도해야 하는 역사적 배경 및 이유를 이론적으로 고찰해 보았다.

사실 수학은 높은 산을 오르는 일에 비유할 수 있다. 전체적인 산의 형세를 알지 못하고 산을 오르다보면, 자신이 정말로 정상을 향해 똑바로 나아가고 있는지, 혹은 자신이 바라보는 시각에서 산의 전체적인 형세를 판단해 버리기 쉽다. 학생들도 수학을 공부할 때, 어떤 단원을 왜 공부해야 하는지, 그리고 어떻게 해서 그런 개념들이 생기게 되었는지 알지 못하고 수학을 접하기 때문에, 수학은 이해할 수 없는 복잡한 공식과 계산들이 가득한 어려운 과목이라는 생각을 하게 되고 흥미를 잃어버리게 되는 것이다.

따라서 수학교사들은 학생들이 수학에 등을 돌리는 것을 더 이상 방치해 두어서는 안 된다. 흥미롭고 새로운 교구를 개발하고 사용해서 수업시간에 학생들의 시선을 집중시키는 것이 일시적인 방법이라면, 수학사와 수학의 깊은 지식으로 산의 전체적인 형세를 설명하고 안내해 주는 것은 학생들을 수학에 흠뻑 빠지게 하는 것이 될 수 있다. 따라서 수학을 떠나 버린 학생들을 다시 불러모으기 위하여 다음의 몇 가지를 제언하고자 한다.

첫째, 교사는 수학자가 되어야 한다. 보다 많이 알아야 제대로 학생들을 가르칠 수 있다. 각 단원의 등장 배경을 알고, 왜 그런 개념을 학생들이 지금 배우지 않으면 안 되는지를 인식하고 지도해야 할 것이다. 교과서에서 잘못된 부분이 있다면 이를 지적하고 바르게 가르칠 수 있는 교사가 되지 않으면 학생들을 수학시간에 집중시키지 못할 것이다.

둘째, 연구하는 교사가 될 수 있도록 행정적인 뒷받침이 이루어져야 한다. 과중한 업무와 그에 따른 스트레스로 인해 교재연구를 할 시간조차도 없는데, 어떻게 공부하고 연구할 수 있겠느냐고 하는 일선교사들의 말은 단순한 투정이 아니다. 교사의 가장 근본적인 권리이자 의무는 학생을 지도하는 것이다. 이것이 기타 행정적인 업무로 인해 수업 뒷전으로 밀리는 것을 더 이상 방치해서는 안 된다. 또한 교사들의 재교육을 위한 교재개발에 관한 다양한 연수프로그램이 마련되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

김부윤 · 박영식 · 신현성 (1996). 數學敎育課程論, 보성각.

김부윤 · 위성미 (1997). 대학수학과 중등수학과의 연계성에 관한 一考察, 대한수학회 수학교육논총 **15**, 121-133.

박경미 (1996). 수학교육학의 학문적 정체성 탐구를 위한 소고, 1996년도 추계수학교육학연구발표대회논문집, 대한수학교육학회, 327-346.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

임재훈 (1997). 심리학 중심의 수학교육 연구와 수학 중심의 수학교육 연구, 대한수학교육학회 논문집 **7(1)**, 279-293.

고등학교 교육과정(Ⅰ) (1992). 대한교과서주식회사.

John B. Fraleigh (1989). *A First Course in Abstract Algebra*, 4th ed., Addition-Wesley Pub. Co..

Hungerford, T.W. (1973). *Algebra*.