韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 10집, 2000. 1. 201-219.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 10, Jan. 2000. 201-219.

구성주의 관점에서의 수학적 모델링을 통한 수학 교수 · 학습의 전개[1)]

정 두 영 (부산과학고등학교)
김 도 상 (부경대학교)

학생들이 실세계와 수학적 세계사이를 연관시켜 사고하고 해석하는 방법 및 실제 문제를 해결하는 일반적인 전략의 방법론의 하나가 수학적 모델링(Mathematical modelling)이라고 볼 수 있다. 한편, 수학 교수 · 학습 과정에서 구체적인 조작 활동을 통하여 학생 스스로가 지식을 '구성(construction)' 할 수 있도록 해 주어야 한다는 구성주의적 사조가 대두되고 있는데, 본 논문에서는 구성주의적 관점에서 수학적 모델링을 통한 수학 교수 · 지도를 위한 활용 방안을 한 예시를 통해서 고찰해 보고자 한다.

Ⅰ. 연구의 필요성

현재 한국 중등학교 수학교육은 수학적 지식이 구체적 조작 없이 수동적으로 교사로부터 학생에게 옮겨지는 교사 중심적 수업에 의존하며, 학생들은 수학하는(doing mathematics) 것이 아니라 단순히 교사의 행동을 모사(copy)하는데 그치고 있을 뿐이다. 이로 말미암아 새로운 수학 개념이 확고한 수학적 지식으로 자리를 잡지 못하고, 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 현상(경험)들과 수학 학습 내용간의 괴리로 인해 이 둘은 제대로 접목되지 못하고 있다. 기존 교육 환경이 지닌 문제점에 대한 대안으로 학생 중심의 교육 환경을 강조하는 구성주의 패러다임이 최근 강조되고 있다. 미국의 NCTM (1989)의 규준들을 비롯한 각국의 수학교육 개혁은 학습자 중심의 구성주의 정신 아래 이루어지고 있다. 한국에서도 전달자 중심에서 학습자 중심으로 닫힌 교육에서 열린 교육으로 전환을 서두르고 있다. 기본적으로 교과를 중시하면서 방법면에서 학생 개개인의 능력과 관심을 존중하고, 학습에 대한 내재적 흥미를 북돋우기 위한 문제의식에서 출발한 교육이다. 이러한 개념은 학습자가 스스로 지식을 구성한다는 구성주의 패러다임과 그 맥을 같이 하고 있다.

과학 기술의 발달의 발달로 인해 지식, 정보가 빠른 속도로 팽창하고, 컴퓨터와 정보기술의 발달로 인간 생활의 패러다임이 변화되고 있으며, 그에 따라 교육 패러다임의 변화가 요구된다. 이러한 가운데 전세계적으로 1980년대 이후의 학교수학은 학생들이 미래의 시민으로서 그들이 친숙하지 않은 상황들에 효과적으로 대응할 수 있는 능력과 창조적으로 활동할 수 있는 기회를 마련해 주어야 하고, 수학의 실제적인 응용 가능성을 경험하는 기회를 주어야 한다는 점을 강조하면서 문제 해결력 교육

1) 이 논문은 1999년도 부경대학교 중등교원 협동연구비 지원에 의하여 연구되었음.

을 중시하고 있다.

그러나 문제해결 또는 수학의 응용을 목적으로 하는 교과서의 문제들은 지나치게 유형화되고 비현실적이어서 학생들이 수학이 자신들의 생활과는 전혀 무관하고 재미없는 과목이라는 배타적인 수학관을 갖게 되는 원인이 되고 있다(조완영 · 권성룡, 1998). 이러한 수학에 대한 인식을 새롭게 하고 학생들의 문제 해결력을 배양할 수 있는 방법론으로서 중요하게 부각되고 있는 것이 '수학적 모델링(Mathematical modelling)'인데, 학생들이 실세계와 수학적 세계사이를 연관시켜 사고하고 해석하는 방법 및 실제 문제를 해결하는 일반적인 전략을 배우는 것이며, 이 일반적인 전략이 바로 수학적 모델링이라고 볼 수 있다. 학생들의 일상 생활과 관련이 있고 학생들이 흥미롭게 여기며, 장차 발생할 수도 있는 문제 상황들을 학생들 스스로 탐구하고 해결하는 활동으로서의 수학적 모델링 상황은 학생들 스스로의 활동과 반성을 통한 지식의 자기 구성이라는 구성주의 관점에서의 수학 교수 · 학습의 풍부한 자원이 될 수 있다고 본다.

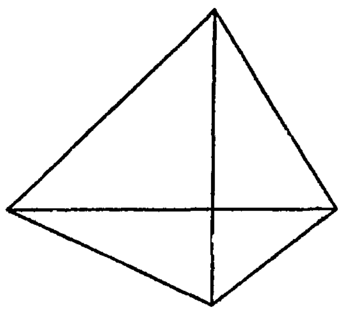
Ⅱ. 수학교육에서의 구성주의

지식의 생성과 존재에 관한 학문을 인식론이라고 한다. 인식론을 여러 방면으로 접근을 할 수 있지만, 크게 객관주의와 구성주의로 나눌 수가 있다. 지식이 인간의 경험을 떠나 객관적으로 만들어지고 객관적으로 존재한다고 보는 관점을 객관주의라고 부르며, 지식은 인간의 경험을 바탕으로 내적으로 만들어지고 사회적인 환경의 영향을 받아 변화한다는 견해를 구성주의라고 부른다. 객관주의 견해가 교육에 적용되었을 때는, 인간에게 필요한 모든 지식을 나열해 놓고, 교과서라는 곳에 체계적으로 정리해서 가능하면 짧은 시간에 많은 양을 전달하고, 또 그것을 학습자가 잊어버리지 않도록 하기 위해서는 수많은 강화와 보조 학습자료가 동원된다. 구성주의 견해가 교육에 적용되었을 때는, 어떤 지식이 실생활과 관련이 있는가를 알아야 한다. 먼저 어떤 지식이 학생에게 의미가 있고, 유용한 것인지를 찾아야 한다. 수업에서는 학생들의 의미 세계에 대한 자신들의 탐구 과정으로 이어져서, 자기 학습 능력이 수업의 성패를 좌우하기 때문에 학습 방법의 학습이 이루어지고, 학습 환경이 매우 중요한 역할을 하게 된다. 학생들은 주어진 정보를 이용하여 자기 지식을 만들어 가며, 이 과정에서 개별화 · 개성화 교육도 이루어지는 것이다. 평가도 어떤 지식을 어떻게 창출해서 어떻게 활용하는 가가 중요하기 때문에 지식의 형성 과정에 관심을 두게 되고, 또한 그 결과가 중요한 것이 된다.

오늘날의 수학교육계에서 점차 광범위하게 받아들여지고 있는 핵심적인 사조의 하나는, 수학 교수 · 학습의 과정에서 구체적인 조작 활동을 통하여 학생 스스로 수학 지식을 '구성'할 수 있게 해 주는 것이다. 지식이 학생에 의해 자주적으로 '구성'된다고 해서, 그것이 결코 학생의 내면 세계에서 지식이 저절로 구성된다는 것을 의미하지는 않는다. 학생에 의한 수학 지식의 자주적 구성이란 바로 '교사의 안내에 의한 자주적 구성'이라고 할 수 있다. 교사는 학생들에게 스스로 지식을 구성해 나갈 수 있게 하는, 적절한 환경을 마련해 주고 고무해야만 한다. 그뿐만 아니라 교사는 학생 개개인의 사고

과정을 관찰 분석하여 학생 스스로가 자신의 사고 과정에서 발생하는 여러 오류를 반성할 수 있도록 해야 한다. 그러한 과정을 통해서 학생 스스로 수학 지식을 자주적 구성, 즉 '재발명'할 수 있도록 도와주어야 한다. 학생 스스로 문제를 의식하고, 능동적으로 그것을 해결할 수 있도록 해줌으로써, '수학하는' 즐거움을 주어야 한다.

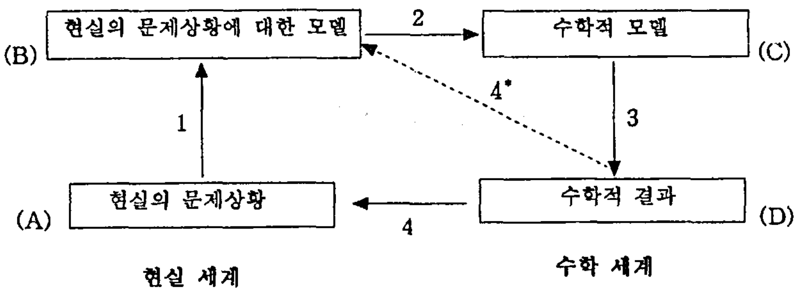
이러한 바탕 속에서 박영배(1996)는 구성주의적 수학 교수·학습 원리로서, 학생 중심적 개별화의 원리, 발문 중심적 상호 작용의 원리, 의미 지향적 활동의 원리 그리고 반영적 추상화의 원리를 추출하고, 교수·학습의 유형으로 갈등 교수·학습 방법과 문제 중심 교수·학습 방법을 제시하였다. 추출한 네 가지 구성주의적 수학 교수·학습의 원리가 수업에서 적용되어지는 것을 나타내는 수업 모델을 아래와 같이 제시하였다.



Ⅲ. 수학적 모델링을 통한 지도

Burghes(1986), Blum(1989)의 견해를 중심으로 수학적 모델링의 과정을 살펴보면, 우선, 학생이 실세계로부터 무엇인가의 문제를 가졌다고 하자. 여기서는 그것을 '실제 문제'라고 한다. 수학 외의 세계, 즉, 초등학교에서부터 대학에 이르기까지의 수학이 아닌 다른 과목이나 학문, 또는 일상 생활이나 우리들의 신체 주위의 세계로부터 발생하는 문제를 가르친다. 학생은 그 문제를 해결하려고 하면서 여러 가지 시행착오를 한다. 그래서 간단히 해결이 되면, 특별히 문제될 것은 없지만, 생각하기가 어렵게 된다든지 답답하다든지 해서 풀 수 없는 상태가 되는 경우가 많다. 그때 하나의 방법으로서 '수학화'를 들 수 있다. 수학화라는 것은 '실제 문제'의 자료, 개념, 관계, 조건, 가정을 수학의 세계에로의 단순화, 이상화, 구조화시켜서 수학적 문제를 만들어 내는 것이다. 이렇게 수학화해서 생긴 모델을 '수학적 모델'이라고 부른다. 이것은 통상의 교과서 등에서 볼 수 있는 수학 문제에 해당한다. 다음에 수학의 세계 속에서 수학적 문제를 해결하고, 얻을 수 있는 결과를 실세계에 관련시켜서 설명하지 않으

면 안된다. 즉, 해석하는 단계이다. 그리고 그 해석이 실제 문제와 일치시키고 있는지 어떤지 검토할 필요가 제기된다. 만약 불일치가 생기면, 모델의 수정, 또는 새로운 모델에로의 교환과 다시 한 번 수학화하는 단계로부터 시작하지 않으면 안된다. 결국, 문제해결과정은, 몇 번인가 루프(loop), 즉 순환을 그리는 것이 요구되는 것이다(Klaoudatos, 1994). 이런 '수학화', '수학적 처리', '해석, 검토', '모델의 수정'이라고 하는 일련의 활동을 '수학적 모델링'이라고 부른다. 일반적으로 통상의 수업과 비교해 보면, '수학화의 단계', '해석 · 검토의 단계', '수정의 단계'가 강조되고 있다.



수학 커리큐럼에 수학적 모델링을 포함해야 하는 이유로서는, 첫째, 문제해결능력에 관한 것으로서, 탐구적인 또는 창조적인 문제해결능력을 육성한다고 하는 측면으로부터 수학적 모델링 과정을 학교 수학에 포함해 가는 것이 필요하다는 것이다. 둘째, 수학의 본질에 관한 이유로서, 모든 교육 단계에 있어서 학생에게 수학을 가르치는 첫 이유는, 수학은 사회 속의 실천적, 과학적 사업 중에서 유익하다는 것을 들 수 있다. 그러나 경험적으로 수학을 응용하거나 수학적 모델을 만들어 그것을 분석한다고 하는 광범위하게 다루는 경험을 하고 있지 않은 학생에게 있어서 수학의 본질을 이해하는 것은 어렵다. 그 위에 복잡한 상황 가운데 수학을 사용하는 능력을 육성하기 위해서 수학 커리큐럼 속에 모델을 만드는 활동을 포함해 가는 것이 필요하다. 셋째, 비판적 능력에 관련된 것으로, 수학은 사회 속에서 광범위하게 사용되고 있다는 것은 사실이다. 때로는 매우 좋은 목적으로 사용되기도 하고, 때로는 별로 적절하지 않게 사용되기도 한다. 수학의 역할은 우리 사회에 절대적이고 큰 영향을 주고 있다. 그 위에 수학 외의 문제 장면에서 수학의 사용을 이해하거나, 평가하거나 비판적으로 보거나 하는 기회를 제공하는 것은 중요하며, 수학 커리큐럼 속에 모델을 만드는 활동을 포함해 가는 것이 필요하다. 넷째, 수학 학습의 촉진에 관련된 이유로서, 현재의 교과서 등에 있는 정형화된 문제에서는 가르치기 힘든 수학적인 아이디어, 개념, 방법, 이론의 획득, 이해를 도와주는 것이 가능하게 된다. 마지막으로, 수학의 유용성에 관한 이유로서, 최근에는 소수의 학생만이 순수 수학 속의 내용이나 활동에 의해 자극을 받아 동기를 부여받게 된다. 다수의 수학을 생각한 경우, 수학은 그들의 현재와 미래의 생활과의 사이에 관계가 적다. 수학의 활동은 가치 있는 것을 이들 학생에게 확산시키기 위해서, 수학적 모델링

은 수학 커리큐럼 속에 모델을 만드는 활동을 포함해 가는 것이 필요하다는 것이다. 다시 말해서, 문제해결을 모델링으로 접근하면 학생들이 수학의 다양한 응용의 측면으로 볼 수 있게 되고, 모델링 문제에서 배운 전략과 기술은 새로운 상황에 쉽게 전이되며, 모델링 문제를 연습한 학생들은 수학의 힘에 대해 훨씬 더 큰 가치를 느낄 수 있을 것이다.

Ⅳ. 연구 방법

본 논문의 '모델링을 통한 수학 교수·학습 지도를 위한 방안 연구'의 이론적 배경으로서 Klaoudatos (1994)의 '모델링 중심의 교수'라는 그의 견해를 이론적 배경을 삼았다. 그는 모델링과 모델링 과정을 단계(step)과 부분적인 과정(procedure)의 총체라고 보았다. 그래서 일상의 학과(교육)과정에 합칠 수 있는 모델링 과정에 기초가 될 수 있는 교수 모델을 제시하였다. 그는 '개념상의 수학화'와 '응용된 수학화'라는 두 단계로 구성된 De Lange(1987)의 교수학습법에 '추상화와 형식화'라는 특별한 단계를 창안해서 삼 단계로 증가시켰다. 동시에 그는 모델링에서 수학화의 의미를 상세하게 표현했으며 교수 모델을 다음의 단계(즉, 3단계 교수 접근법(three-stage approach))로 창안했다.

ⅰ) 개념상의 모델링에서는 새로운 수학 개념을 소개하기 위해서는 필수적인 요소로 보여 주는 전략을 개발하는 상황을 구성한다. 여기서는 직관과 경험이 중요한 구성 요소가 된다.

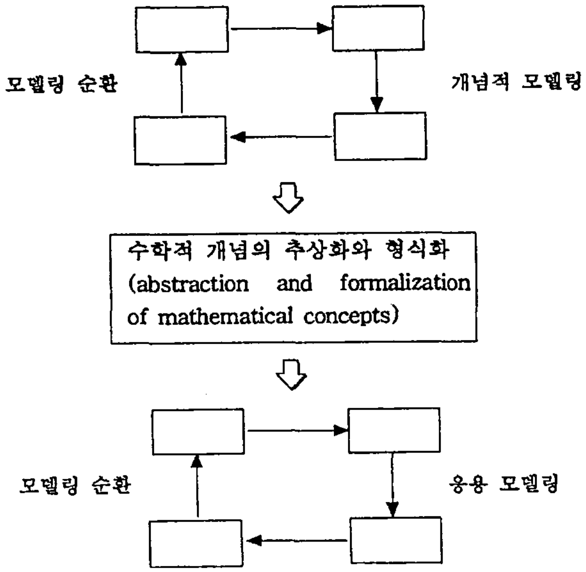
ⅱ) 수학 개념의 추상화와 형식화에서는 수학 개념을 개발하고 수학적으로 상세하게 설명하고 위의 개념들을 통합한다.

ⅲ) 응용된 모델링에서는 모델링 순환의 가능성이 드러나게 되고 그 의미가 강화되고 견고하게 된다. 또한 응용의 의미에 대한 지식의 축적도 하게 된다. 저자는 이러한 교수 모델이 '모델링 중심의 교수'라는 것이다. 이것을 다음과 같이 나타내었다.

이러한 '모델링 중심의 교수'에 대해서 그는 다음과 같이 소개하고 있다.

ⅰ) 모델링 중심의 교수는 새로운 수학 개념의 지도가 가능하다.

ⅱ) 모델링 순환은 아래 3가지 방법으로 이용하는 방법론적 도식이다. 첫째, 모델 순환은 현실세계 → 수학세계, 수학세계 → 현실세계, 즉, 두 세계의 결합에서 자세히 드러났다. 현실세계 → 수학세계의 결합은 수학화 과정과 관련이 있으며, 그는 이 결합을 주결합(main connection)이라 했다. 그러나, 여기서 이론적으로 수학을 배운 학생들 특유의 약점이 있음을 알았다. 수학세계 → 현실세계의 결합은 결과에 대한 해석과정과 관련이 있다. 여기서는 이론적 상황으로 통합되지 않은 교수 방법으로 배운 학생들 일부에서 특유의 약점이 있음을 알았다. 둘째, 순환은 후자(즉, 응용된 모델링 순환)에서 원래의 형태(즉, 개념상의 모델링 순환)의 모든 단계와 과정을 포함할 수 있도록 하는 문제를 선택하기 위한 기준을 준다.



본 논문에서는 Klaoudatos(1994)의 3단계 교수 접근법인 '모델링 중심의 교수'를 교수 모델로 하며, 수학 교수·학습 원리로서는 박영배(1996)의 수학적 구성주의의 4가지 원리를 바탕으로 한 교수·학습 유형 중에서 문제 중심 교수·학습 방법을 채택하여서 고찰하였다. 문제 중심의 교수·학습 방법은, 변화가 풍부하고 학생의 자발적 흥미와 동기를 유발시킬 수 있는 과제, '소집단 활동' 및 토론과 발표를 통한 '공유 활동'으로 구성되는데, 이 과정에서 교사의 의미 지향적 활동인 발문과 적절한 과제 제시, 피이드 백을 위한 조정자로서의 역할을 요구하고 있는데, 구성주의적 관점의 지도에서는 학생 스스로의 구성 활동과 학생 상호작용의 여건을 조성해 주는 기능을 하므로 협상을 통한 지도라 할 수 있다(이기열·이병수, 1999). 본 논문의 연구에 따른, 구성주의 관점에서의 수학적 모델링을 통한 학습지도 전개의 한 예시로서 고등학교 2학년 단원에 있는 공간도형의 성질을 중심으로 2차시(연속) 학습 지도안을 구안하여 보았으며, 그 가능성을 알아보기 위해서 실제 수업에 적용하여 보았다. 평면도형과 달리 공간도형의 성질은 공간 지각 능력과 추상적인 사고가 필요하기 때문에 학생들이 구체적인 조작 활동을 통해서, 공간도형(특히, 그 중에서 정다면체) 성질에 관한 지식을 자주적으로 '구성'해 나가도록 하는 수업 전개안과 필요한 학습교재를 마련해 보고자 노력했다. 학생 스스로 자신들의 활동과 반성을 통하여 수학 지식을 자주적으로 구성하도록 하는, 수학 교수·학습 환경을 주고자 하는데 초점을 두었다.

V. 수학 교수·학습 지도 예시

학생이 스스로 자신들의 조작적 활동을 통해서 얻은 구체적 경험 속에서 공간도형(여기서는 정다면체)의 성질들을 탐구해 보며, 스스로의 활동과 그 과정을 반성해 보고 음미해 보면서, 재구성해 갈 수 있다는 것이다. 또 활동해 보는 과정 속에서, 관련된 성질과 보조 정리를 효율적으로 이용하면 해결할 수 있도록 설계하고자 한다. 다음의 소재는 적극적인 동기와 문제 해결의 의지를 바탕으로 하여 '의미 있는 활동'을 통해서 그 과정을 반성해 봄으로써, 학생 스스로가 문제를 해결해 나갈 수 있도록 할 수 있는 구성주의적 교수·학습을 위한 하나의 자료가 될 수 있음의 가능성을 보이고자 제시한다.

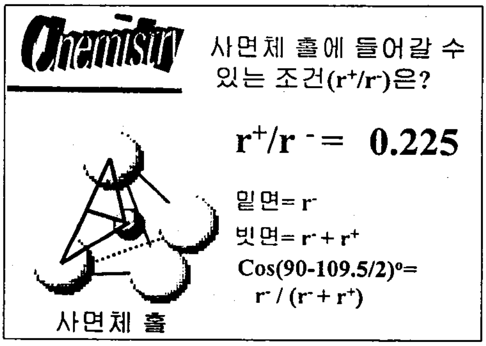
교수·학습 목표

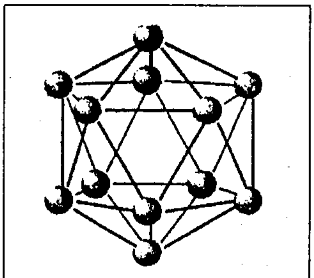
(1) 정다면체의 정의를 알고, 각 정다면체의 성질을 파악할 수 있다.
(2) 정다면체의 이면각을 이용해서 입체의 부피를 구할 수 있다.
(3) 실생활이나 자연과학 분야에서 정다면체의 활용되는 곳을 조사해 보고, 그 내용을 수학적으로 분석할 수 있다.

먼저, 정다면체의 정의를 알고, 정다면체의 성질을 탐구해서 모형을 직접 만들어 보고, 학생 스스로 정다면체를 구체적인 경험 속에서 가질 수 있도록 조작의 활동 시간을 제공한다.

(A)현실의 문제 상황

학생들을 4-6명씩 소집단으로 조직해서 6인용 원탁에 앉아 있으며, 수업 시작 전에 TV로 화학 수업에 사용되었던 화학 물질 결정체의 파워포인트 자료가 비추고 있다. 일부 원탁 위에는 정6면체, 나머지에는 정4면체 주사위가 각각 한 개씩 놓여져 있으며, 수업 시작 전까지 주사위 놀이를 하도록 한다.(소집단 발표 1 개당 득점1을 부여함을 공표)




〔B_{12}의 모형〕

교사 : 각 소집단 별로 책상 위에 있는 각 종류의 주사위를 한 번씩 던져서 주사위 놀이를 해보자. (원탁에 앉아 있는 소집단별로 모두 주사위를 던지게 하고 나오는 수를 비교해 보라고 하며, 경우의 수를 발표하게 한다. 동일한 경우도 있을 수 있고, 정4면체 주사위와 정6면체의 경우수에는 차이 있음을 발견하고 그것에 대한 토의 내용을 발표하게 하며, 경우의수를 일정한 규칙에 따라 예상이 가능할 수 있게 하려면 모든 면이 같은 모양과 크기를 가지는 입체(즉, 정다면체)이어야 함을 교사와 학생의 응답 속에 서 학생들이 l알게 한다. 또 다른 형의 주사위는 만들 수 없는지, 또는, 무한히 많이 만들 수 있는지? 예상되는 정다면체를 생각해서 소집단 활동 시간을 준다.)

학생 : 중학교에서 정다면체는 5개뿐이라고 배웠습니다.(학생들의 발표를 유도하면서 5개의 정다면체의 종류가 어떤 것인지를 기억 속에서 되살리게 하며, 적극적인 발표하도록 허용한다. 교사는 학생들 발표 중 하나를 정리하면서, 과연 그 5개는 정4면체, 정6면체, 정8면체, 정12면체, 정20면체인가? 왜 그렇게 5개뿐일까? 반문한다.)

교사 : 정다면체가 5개뿐임을 중학교에서 배웠지만, 그 모형을 만들고 이면각을 구하자.
(만약 학생들의 활동, 조사한 것을 먼저 발표를 하게 한다. OHP화면으로 모형을 보여주며, 정다면체에 얽힌 수학사적인 에피소드를 학생에게 설명하며 주목시킨다.)

정다면체에 얽힌 에피소드

정다면체는 면들이 합동인 정다각형이고 다면각들이 모두 합동인 다면체이다. 정다각형은모두 위수에 대해서 존재하지만 정다면체는 오직 5개뿐인 것으로 알려져 있다. 정다면체는 각각 그것이 갖고 있는 면의 수에 따라 이름이 붙여진다. 즉, 정4면체, 정6면체, 정8면체, 정12면체, 정20면체. 플라톤(Plato, B.C. 427-347)은 5개의 정다면체 모두를 설명하면서 티마에우스(Timaeus)에서 3각형, 4각형, 5각형을 그의 면으로 어떻게 짜 맞춤으로써 그러한 입체를 만들 수 있는가를 보였다. 플라톤의 '티마에우스'는 피타고라스 학파의 티마에우스를 말하고 있는 것으로서 아마도 플라톤이 이탈리아를 방문했을 때 만난 것 같다. 플라톤의 작품 속에서 티마에우스는 쉽게 만들어질 수 있는 4개의 입체, 즉, 정4면체, 정8면체, 정20면체, 정6면체를 엠페도클레스(Empedocles, B.C. 493?-433? -피타고라스의 제자이며 자기가 신이라는 것을 보여 주기 위해 Etna 화산구에 몸을 던졌다는 전설이 전해져 옴)가 모든 만물의 근원으로 주장한 4원소, 즉, 불, 공기, 물, 흙과 신비스럽게 결합시켰다. 5번째 입체인 정12면체를 설명하기 어려움은 그것을 에워싸인 '우주'와 결합시킴으로써 처리했다. 한편, 천문학의 거장이며 수학자이기도 한 케플러(Kepler, 1571-1630)는 티마에우스의 그와 같은 결합에 대하여 그럴듯한 설명을 덧붙였다. 그는 정다면체 중에서 정4면체가 면에 비해서 가장 작은 부피를 가지고 있으며, 정20면체가 가장 큰 부피를 가지고 있다고 생각했다. 이러한 부피와 면의 관계는 각각 건조함과 축축함의 질을 나타내는데 불이 4원소 중에서 가장 건조하고 물이 가장 축축하므로 정4면체는 불을 표현해야 하고, 정20면체는 물을 표현해야 한다. 정6면체는 한 개의 정4각형면 위에 4개의 정4각형면이 세워져 있으

므로 가장 안정성이 있다라고 했다. 따라서 정6면체는 흙과 결합된다라고 했다. 또 정8면체는 그 마주보는 꼭지점을 집게 손가락과 엄지 손가락에 갖다 끼고 가볍게 잡을 수 있고 또 쉽게 회전될 수 있으므로 그것은 공기의 불안정성을 지니고 있다라고 했다. 마지막으로 정12면체는 12개의 면을 가지고 있고 1주기가 12궁(宮)을 가지고 있으므로 그것은 우주와 결합된다라고 했다. 정4면체, 정6면체, 정8면체는 실제로 각각 황산나트륨(Na_2SO_4), 소금($NaCl$), 크롬명반 등의 결정에서 발견되고 있다. 나머지 2개는 결정 형태로는 나타나고 있지는 않지만 레디오알리아라고 불리는 미시적인 바다 동물의 해골에서 발견되었다. 또, 1885년에 기원전 500년경으로 추정되는 에트루리아 기원의 작은 정12면체가 파두아 근처의 몬테로파(Monte Loffa)에서 발굴되기도 했다.

(B)현실의 문제 상황에 대한 모델

교사 : 그리이스 시대 수학사에 나오는 에피소드처럼 정다면체는 과연 5개뿐인가? 과연 여러분들도 그렇게 생각하나? 5개뿐이라는 주장, 그 사실을 참이라는 것을 어떻게 보여 줄 것인가?(학생들에게 5개뿐이라면 어떤 모양일까? 그 성질은 어떨까? 무엇을 보여 주어야 할까? 등의 정다면체의 정의를 다시 한 번 설명한다. 소집단별로 주어진 정4면체와 정6면체 주사위를 이용하여, 정다면체의 성질을 관찰하며, 토론 활동하는 중에 교사는 소집단 활동에 참여하며 궤간순시를 한다.)

학생 : 정다면체는 합동인 면으로 둘러싸이므로 한 꼭지점에 만날 수 있는 다각형과 그 개수는 많지 않을 것이다. 이것을 고려하면 어떨까?

(교사는 다시 학생 모두에게 정4면체와 정6면체를 이용해서 각 꼭지점에 모인 다각형과 그 개수를 확인시키고, 다른 정다면체에 대해서 생각하도록 한 다음 그 결과를 소집단에서 검증을 가진 후 발표하도록 한다. 각 소집단별로 발표하게 한다.)

교사 : 한 꼭지점에 만날 수 있는 다각형의 종류와 그 개수를 고려한다면, 그 모인 각들의 크기의 합이 360도 보다 적음을 생각해야 한다. 그 외 또 다른 생각은 없는가?

(교사는 모형을 이용해서 한 꼭지점에 만나는 다각형과 그 개수를 이용한 방법을 정리 한 후, 오일러 정리를 설명하고, 그것을 이용한 방법을 설명한다.)

정다면체는 5개뿐!(1)

먼저 한 꼭지점에서 만날 수 있는 다각형과 그 개수를 고려하여 정다면체가 5종류뿐임을 알아보자. 볼록다면체는 적어도 3면을 포함하므로 그 면각의 합은 360°보다 작다. 즉, 합동인 정다각형이 한 꼭지점에서 만날 수 있는 면의 수는,

정3각형은 한 각이 60°이므로 3, 4, 5면, 즉, 3가지,

정4각형은 한 각이 90°이므로 3면, 즉, 1가지,

정5각형은 한 각이 108°이므로 3면, 즉, 1가지,

정6각형 이상은 한 각이 120° 이상이므로 3면 이상 만날 수 없다.
그러므로, 정다면체는 5가지 뿐임을 알 수 있다.

정다면체는 5개뿐 !(2)

그러므로, 정다각형은 5개뿐이다. 임의의 볼록 정다면체에 관한 가장 흥미로운 정리 중의 하나는 $v-e+f=2$(여기서 v: 꼭지점의 수, e: 모서리의 수, f: 면의 수)라는 사실이다. 이것은 어쩌면 아르키메데스(Archimedes, B.C. 287?-212)가 알고 있었을런지도 모른다. 1635년경에 데카르트(Descartes, 1596-1650)가 매우 근사적으로 그 정리를 서술했으며 오일러(Euler)가 1752년에 독립적으로 그것을 발표했다. 그래서 흔히 이 결과를 오일러-데카르트 공식이라고 말하기도 한다. 정다면체는 5개뿐임을 오일러의 볼록 다면체에서 성립하는 오일러 공식을 이용해서 설명해 보자. 정다면체의 정의에서 모든 면은 합동인 정다각형(즉, 정 p각형, $p \geq 3$인 자연수)으로 구성되어진다. 즉, 모든 면은 각각 p개의 모서리로 구성되고, 모든 꼭지점에서는 각각 q개(단, p, $q \geq 3$인 자연수)의 모서리가 모인다라고 하고, 꼭지점의 수 v, 모서리의 수 e, 면의 수 f라고 하자. 그러면, 모서리의 수는 $fp=2e$, $vq=2e$가 되므로, $f=\frac{2e}{p}$ …① $v=\frac{2e}{q}$ …②. 오일러의 공식에 대입해 보면 $\frac{2e}{q}-e+\frac{2e}{p}=2$. e가 자연수이므로 양변을 e로 나누어서 정리하면, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}$(단, p, q, e는 자연수). 이것을 풀면, (p,q) =(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3) 뿐임을 알 수 있다. 즉, 다섯 개 뿐이다.

(C)수학적 모델

교사 : 정다면체를 제작하기 위해서 전개도를 어떻게 설계하면 되겠는가?(개인과 소집단별 활동한 후 소집단별 결과를 발표하게 한다. 개인별 독특한 발상이나 생각도 발표할 수 있게 칭찬과 보상(수학자 이름으로 부르기 등)을 부여한다.)

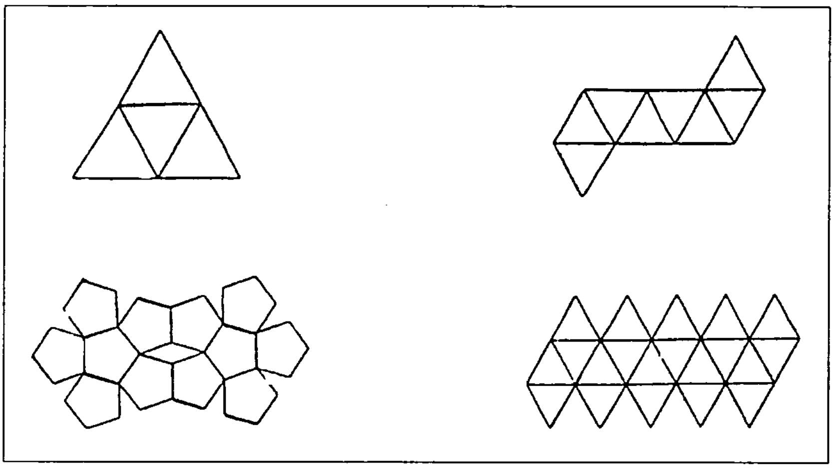
오일러 공식에서 찾아낸 다음 사실을 고려해서 생각해 보고, 모형을 만들어 보자.

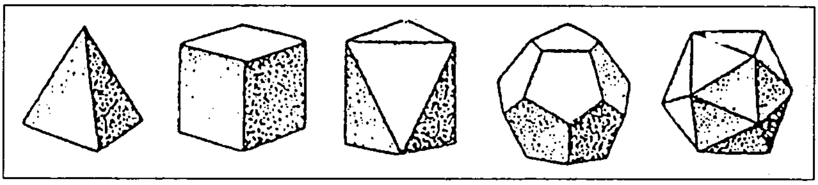
1) 정4면체는 정3각형이 4개로써 구성이 되고 각 꼭지점에 3개의 모서리가 모인다.
2) 정6면체는 정4각형이 6개로써 구성이 되고 각 꼭지점에 3개의 모서리가 모인다.
3) 정8면체는 정3각형이 8개로써 구성이 되고 각 꼭지점에 4개의 모서리가 모인다.
4) 정20면체는 정3각형이 20개로써 구성이 되고 각 꼭지점에 5개의 모서리가 모인다.
5) 정12면체는 정5각형이 12로써 구성이 되고 각 꼭지점에 3개의 모서리가 모인다.

(학생들은 소집단별 활동과 의견 교환을 가진 후, 실제 모형 만들기에 용이한 도면을 구안해서 그리고, 준비된 재료를 이용하여 제작한다. 교사는 소집단을 궤간순시하며, 동시에 시행착오를 겪는 소집단과 토의를 가지며 오류를 분석하게 조언한다.)

(D) 수학적 결과

교사 : 정다면체를 만들고 그 특성을 관찰하자.





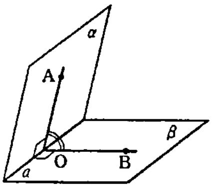
(A) 현실의 문제 상황(응용)

교사 : 정다면체는 5개뿐임을 알게 되었다. 볼록정다면체는 화학 수업시간에서도 학습한 것처럼 물질의 결정체의 구조로 본 적도 있고, 통계학에서 표본 추출을 할 때 사용되는 정12면체 주사위도 본 적이 있다. 그렇다면, 이런 정다면체 형태의 물질의 구조 분석은 어떻게 하며, 분자구조를 어떻게 했을까? 또, 부피는 구할 수 있을까?

(학습 과제지를 배부하고, 만든 모형을 이용해서 탐구 활동하게 하며 교사는 발문과 함께 궤간순시와 소집단별 활동에 참여해서 수행 과정에 조언을 하며, 학생들의 의견을 듣고 조언을 한다. 활동이 마무리 될 무렵, OHP로 화학 수업의 결정체 자료와 이면각의 정의를 다시 비추고, 필요한 수학 공식을 학생과 발문, 응답으로 정리한다.)

이면각

두 평면이 만날 때, 그 교선을 공유하는 두 반평면이 이루는 도형을 이면각(二面角)이라고 한다. 이



면각의 변 위의 한 점 O를 지나 각 면 위에서 변에 수직인 직선 OA, OB를 그을 때, $\angle AOB$의 크기를 이면각의 크기라고 한다.

(B)현실 문제 상황에 대한 모델

교사 : 정다면체 모양의 화학 물질에서 원자가 위치하는 것을 살펴보면 정다면체의 성질에 따라 정해지고 있음을 알 수 있다. 특히, 화학 수업에서 NaCl의 결정을 학습했던 것을 정리해 보자. (학생을 지명해서 화학 수업의 관련 내용을 발표하게 한 후)
그렇다면 이런 성질을 수학적으로 정리하고 이해할 수 있다면 다른 물질의 결정이나 구조 분석하는 데에 막강한 힘을 가지지 않겠나? 먼저, 선행학습에서 배웠던 정4면체, 정8면체의 이면각을 구하고 부피를 구해보자.(배부된 학습과제지로 각자 형성평가를 하고, 소집단별 점검(반성적 사고)후, 교사에게 제출하도록 한다.)

정4면체의 이면각과 부피

먼저, 정4면체의 이면각을 구해보자.

A에서 밑면 $\triangle BCD$에 내린 수선의 발을 H라 하면, H는 $\triangle BCD$의 무게중심 임을 알 수 있다. 또, M을 BC의 중점, 이면각을 θ라 할 때, $AM\perp BC$, $DM\perp BC$이므로 $\theta = \angle AMD$가 된다.

$AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$이고, $MH = \frac{1}{3}\times DM = \frac{1}{3}\times AM$.

그러므로, $\cos\theta = \frac{MH}{AM} = \frac{MH}{DM} = \frac{1}{3}$됨을 알 수 있다. 다음으로 부피를 구하면, $\triangle ABH$에서

$AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $MH = \frac{1}{3}\times DM = \frac{1}{3}\times AM = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$이다.

그러므로, $AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{6})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

구하는 부피를 V라 하면,

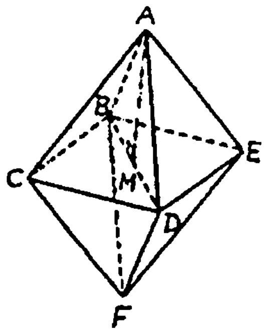
$V = \frac{1}{3}\times(\triangle BCD)\times AH = \frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{12}$임을 알 수 있다.

정8면체의 이면각과 부피

먼저, 정8면체의 이면각을 구해보자.

BC의 중점을 N이라면, $\triangle ABC$에서

$AN = FN = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이고, $MN = \dfrac{1}{2}$ 이 된다.



그러므로, 이면각을 θ라 두면, $\theta = \angle ANF$이 되고,

$\angle ANM = \dfrac{\theta}{2}$, $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{MN}{AN} = \dfrac{1}{2}/\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 = 2\times(\dfrac{1}{\sqrt{3}})^2 - 1 = -\dfrac{1}{3}$. 다음으로 부피를 구하면,

$\triangle ABD$에서 $\angle ABD = 45^\circ$. 즉, $AM = 1 \cdot \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

정사각뿔 $A-CDEB$의 부피 $= \dfrac{1}{3}\times(\square BCDE)\times AM = \dfrac{1}{3}\times 1^2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

$$\therefore\ V = 2\times\frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(C) 수학적 모델-추상화와 형식화

교사 : 정12면체와 정20면체의 구조와 부피를 구하는 방법을 생각해 보자. 모형을 이용해서, 먼저 이해가 되어야 하는 요소가 무엇일까?(각자 생각을 소집단 활동 안에서 반성적 사고와 개념적 오류를 분석하고, 수정하면서 정리하도록 한다. 교사는 도움을 청하는 소집단의 활동에 참여해서 조언과 안내를 한다. 모형과 화학 수업의 결정 그림을 보면서 학생들의 '의미있는 학습'이 되도록 교사의 안내와 발문을 통한 동기 유발을 계속하면서, 개인의 탐구와 소집단 토론 활동을 계속하게 한다.)

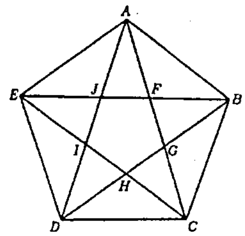
학생 : 정12면체는 정5각형으로 둘러싸여 있어 먼저 정5각형의 성질을 알아야 한다.(정5각형의 성질에 대한 학생과 소집단별 학습 정보를 정리하도록 하며 발표하도록 한다.)

<u>정5각형과 황금분할</u>

피타고라스 학파의 상징은 정5각형의 5개의 대각선으로 형성된 별모양(pentagram)의 문양이었다고 전해지고 있다. 별모양의 5개의 변은 각각은 그것과 교차하는 다른 2개의 변을 황금 분할(golden section)로 나뉘어 진다고 한다. 여기서 좀더 자세히 살펴보도록 하자.

길이가 1인 선분 AB를 길이가 긴 부분이 짧은 부분과 전체 선분의 비례 중항이 되도록 두 부분을 점 C로 나누어 보자. 이 때, $AC = x$라면, $BC = 1-x$이 되고 $AC : BC = AB : AC$이 성립한다. 즉, $x : 1-x = 1 : x$이 성립한다. 그러므로, $x^2 = 1-x$, $x^2 + x - 1 = 0$. 즉, $x > 0$에서 $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$가 구해진다. 이 때, 사람들은 AB가 '황금 분할'로 나누어졌다라고 말하며, AB/AC, 또는 AC/AB

로 나타내어지는 수 x, 또는 그의 역수인 $\frac{1}{x}$를 황금비(golden ratio)라고 부른다. 즉, 그 값은 $\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 1.618$이 되며, 자연계와 그 이외의 여러 자연 현상 속에서 발견되고 있다. 대부분의 사람들 눈에 가장 기분 좋게 보이는 직사각형은 길이에 대한 폭의 비가 황금 비 x일 때라는 것이 심리학적인 실험 결과가 있었다. 황금 직사각형(golden rectangle)이라고 불리는 이 직사각형은 예술상의 기법에서 매우 중요하게 이용되어지고 있다. 그림에서 $\angle DAE = \angle EAD = \frac{1}{5}\pi = \angle AEJ$이므로,



$\triangle ADE$와 $\triangle AEJ$는 닮은 꼴이 된다. $AJ = g$라 두면, 닮음 성질에 의해서 $DE = DJ = 1$이 되어서 $AD = 1+g$이다.

닮음 비의 관계에서 $AD : AE = AJ : AE$가 성립한다.

즉, $1+g : 1 = 1 : g$. $g^2+g-1=0$, $g = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = AJ = EJ$이 된다.

한편, $\triangle DEJ$에서, $\angle DEJ = \frac{2}{5}\pi$이므로, $\cos\frac{2}{5}\pi = \frac{\frac{1}{2}EJ}{DE} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$가 된다.

(D) 수학적 결과-응용

교사 : 정5각형의 성질과 정12면체의 성질을 어떻게 관련시켜야 하나? 여기서 부피를 구하기 위해서 무엇을 고려해야 하나? 정4면체와 정8면체에서 수행했던 사고 과정을 생각해 보자. 각 소집단별 탐구한 결과를 발표하자.(오류 발표도 다른 소집단의 발표와 검증과 토의를 가지면서 반성적 사고를 통한 의미있는 학습이 되게 한다.)

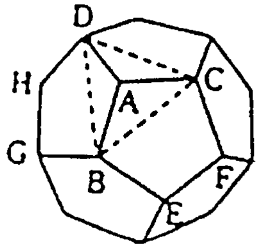
학생 : 정12면체는 정5각뿔이 12개 모여있는 입체라고 본다면 그 높이를 구해야 한다. 그런데, 정다면체는 외접(내접)하는 구를 생각한다면 정5각뿔 입체의 부피를 구할 수 있지 않을까?(내접하는 구와 정12면체 사이의 관계를 생각한다면? 하고 안내한다.)

학생 : 먼저, 정5각형의 중심에서 접하므로 이면각을 구해야 합니다.(모두들 모형을 가지고 이면각을 구하는 방법을 탐구한다. 대각선을 이용한다등 많은 발표가 이루워진다.)

<u>**정12면체의 이면각**</u>

먼저 이면각의 크기를 구해보자. 삼각뿔 $A-BCD$에서 $AB=AC=AD=1$이다.

한편, 정5각형 $ABGHD$에서 $\angle BAD = \frac{3}{5}\pi$이므로,



cos 제2법칙에서 $BD = \sqrt{1+1-2\times1\times1\times\cos\frac{3}{5}\pi}$

$$= \sqrt{2+2\cos\frac{2}{5}\pi}$$

$$= \sqrt{2+2\times\frac{-1+\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

그러므로, $BC=CD=DB=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$가 됨을 알 수 있다.

한편, 삼각뿔 $A-BCD$에서 AB의 연장선 위에 C, D에서 내린 수선 발을 A'이라면,

$$A'C=A'D=AC\sin(\pi-\frac{3}{5}\pi)=AC\ \sin\frac{2}{5}\pi=\sqrt{1-\cos^2\frac{2}{5}\pi}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

이면각을 θ라면, $\theta=\angle DA'C$이므로, $\triangle DA'C$에서 cos 제2법칙을 사용하면,

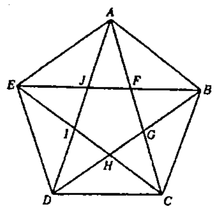
$$\cos\theta=\frac{A'C^2+A'D^2-CD^2}{2A'C\cdot A'D}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$ 된다.

교사 : 이면각을 구하는 방법은 다양한 방법이 있다. 또, 다른 방법은 다음 시간 보고서로 제출한다. 다음으로 부피를 구해 보자. 정12면체에 내접하는 구를 생각하자. 정12면체를 둘러싸고 있는 12개의 정5각형 중 어느 한 개의 무게중심을 O라 하고, O에서 한 변에 내린 수선의 발을 H라 하자. 이 때, 내접하는 구와 정12면체와의 접점은 모두 12개의 정5각형의 무게중심이 됨을 알 수 있다. 부피를 구할려면 정5각뿔의 부피를 구한다고 했다. 부피를 구하는데 이면각이 왜 필요한가?

학생 : 정5각뿔은 정5각형 면적과 내접하는 구의 중심에서 정5각형 무게중심까지가 높이가 된다. 이면각을 이용해서 삼각비로 구할 수 있지 않을까?(모형으로 설명하게 한다.)

교사 : 모형을 이용해서 이것을 다시 정리하면서, 각자 탐구하고 소집단별 결과를 논의해서 발표하자.(교사는 도움을 요청하는 소집단의 활동에 참여하여 협상과 안내를 한다.)

정12면체의 부피



$$OH=\frac{1}{2}\cdot\tan\frac{3}{10}\pi=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{1}{5}\pi}=\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{1+\cos\frac{2}{5}\pi}{1-\cos\frac{2}{5}\pi}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}.$$

한편, 내접하는 구의 반지름을 r, 이면각을 θ라 하면, $r = OH \cdot \tan\frac{\theta}{2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}}$$

위의 식을 계산하면, $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$. 즉, 정5각뿔의 높이값이 된다.

여기서 한 개의 정5각형의 면적을 구하자. 먼저, 정5각형의 한 변 길이는 1이고, $OH = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ 이므로, 한 개의 정5각형의 면적은

$$S = 5\times\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$ 된다.

구하는 정12면체의 부피

$$V = 12\times\left(\frac{1}{3}\times S\times r\right) = 12\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{5}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\right)$$

$V = \frac{15+7\sqrt{5}}{4}$ 가 됨을 알 수 있다.

교사 : 학습한 것을 정리해서 그것을 나머지 정20면체에 대해서도 확장할 수 있다.

학생 : 정12면체의 이면각과 그것을 이용하여 부피도 구했다. 특히, 정5각형의 성질이 많이 이용되었다. 모형을 조사해 보니 정20면체의 한 꼭지점을 중심으로 살펴보면, 그 점에 대해서 5각뿔이 됨을 알 수 있다. 정5각형에 대해서 학습했던 것을 이용해서 이면각과 부피도 구할 수 있겠다.(형성평가 과제지를 배부하고 나서, 모두들 모형을 가지고 각자 스스로 핵심 내용을 재음미한 뒤, 이면각과 부피를 구하도록 한다.)

정20면체의 이면각과 부피

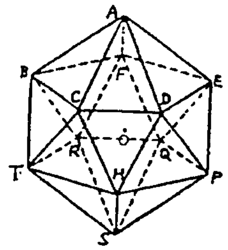
먼저 이면각의 크기를 구해보자. 오각뿔 C-$ABGHD$에서 A와 G에서 BC에 내린 수선의 발을 M이라면, $AB=BC=AC=GB=GC=1$이므로, $AM=GM=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

정5각형 $ABGHD$에서 $AG=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$이고, 이면각을 θ라 하면,

θ $=\angle AMG$이므로, $\triangle AMG$에서 cos 제2법칙을 사용하면,

$\cos\theta = \frac{AM^2+MG^2-AG^2}{2AM\cdot MG} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. 다음으로 정20면체의 부피를 구해보자. 정20면체를 덮고 있는 20개의 정3각형 중에서 이웃하는 2개의 정3각형의 무게중심을 각각 O, O'이라 하고, 정20면체

에 내접하는 구의 반지름을 r이라고 하자. 이 때, 내접하는 구와 정20면체와의 접점은 모두 20개의 정3각형의 무게중심이 됨을 알 수 있다. 여기서 이웃하는 정3각형의 꼭지점 A, B에서 교선에 내린 수선의 발을 H라 하면,



$$OH = OH' = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

한편 이면각을 θ라면, $\angle AHB = \angle OHO' = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ 이 된다.

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = -\frac{\sqrt{5}}{3},\ \text{그러므로},\ \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{6}.$$

즉, $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$, $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 이므로,

$r = OH\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}$. 즉, 정3각뿔의 높이가 된다.

구하는 정20면체의 부피를 V라 하면,

$V = 20 \times (\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times r) = 20 \times \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}$가 된다.

교사 : 정다면체의 성질을 조사하여 보았고, 부피는 이면각을 이용해서 구했다. 화학 시간에서 배운 물질이나 분자의 결정 구조는 이렇게 고찰된 것이며, 앞으로 여러분의 연구에서도 오늘의 아이디어가 적극 도입이 되어 더 많은 물질의 구조가 밝혀지기를 기대한다. 정다면체가 아닌 물질에 대해서도.

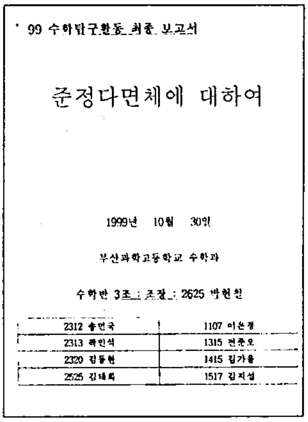
학생 : 정다면체에서 끝을 잘라 가면 어떻게 되는가? 궁금하다. 모형에서 똑같이 자르면 두 종류 이상의 정다각형으로 둘러싸인 입체가 만들어지는 데, 여기도 흥미가 있을 것 같다.

교사 : 좋은 관찰력과 높은 창의력이다.(Archimedean solid라고 부르는 준정다면체를 소개하고 축구공을 예로 들며 설명한다. 즉, 축구공은 정5각형 12개와 정6각형 20개로 둘러싸인 준정다면체이며 정20면체를 꼭지점을 잘라 만들 수 있음을 모형을 들고 학생들과 함께 조작해 시연한다. 참고 문헌이 적으므로 인터넷 사이트를 소개하여 탐구 조사해서 정다면체와 같은 성질과 다른 특징을 조사하도록 다음 시간의 연구과제로 제시하고 수업을 마친다.)

* 준정다면체는 '탐구활동' 과제로 채택, 인터넷, 참고 문헌 조사, 실제 모형 제작과 조작 활동으로 얻은 결과를 가지고 탐구발표대회[2]에서 발표되었고, 수학 부문에서 수상했다.

2) 부산과학고등학교에서 학생 탐구발표대회로 매년 개최하고 있음.

<u>수학 탐구발표대회 자료</u>


' 99 수학탐구활동_최종_보고서

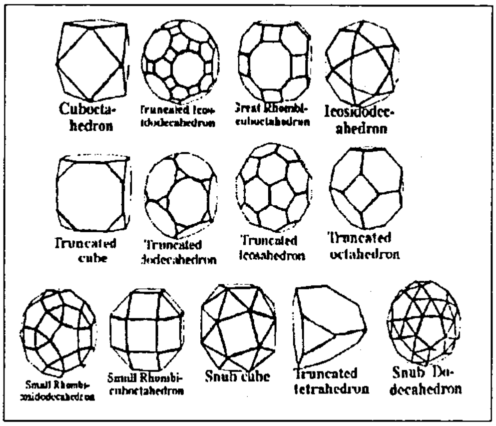
준정다면체에 대하여

1999년 10월 30일

부산과학고등학교 수학과

수학반 3조 : 조장 : 2625 박현찬

2312 송민국	1107 이은정
2313 곽민석	1315 전준오
2320 김동현	1415 김가을
2525 김태희	1517 김지성



Ⅵ. 마치는 말

여러 선행 연구(권기석 · 박배훈, 1997; 김수미, 1993)에 의하면, 수학적 모델링을 수학 교수 · 학습에의 활용은 수학에 대한 학생들의 흥미 유발, 실생활 속에서 수학의 활용 가능성 인식 등, 수학 개념 이해에 대한 효과가 있었음을 얻었다. 그러나, 많은 학생들이 수학적 문제 해결을 위해 생각하며 추론하기를 싫어하고 암기된 지시과 절차에 따라 문제를 해결하려고 한다. 수리 능력 중에서 가장 중요한 것은 '수리 문제를 즐겨 풀어보는 마음' 즉, '수리적 흥미'라고 본다. 학생들에게 의미있는 수학 교육이 이루어지기 위해서는 실제 상황과 수학을 연결하는 모델링을 강조할 필요가 있다(정두영, 1998). 모델링 활동에서는 학생들 스스로가 일상 생활과 관련이 있고, 장차 발생할 수 있는 흥미로운 문제 상황을 탐구하고 해결하는 활동이 강조되어야 한다. 수학적 모델링 상황은 학생들 스스로의 활동(조작)과 반성을 통한 지식의 자주적 구성이라는 구성주의 관점에서의 수학교육의 유익한 자원이 될 수 있다고 본다. 특히, 본시의 학습 현장에서 모델링을 적용, 활용함으로서 탐구적이고 창조적인 문제 해결 능력을 기를 수 있음을 보았으며, 수학적 사실들이 실제 상황과 관련되어 다루어지면 논제나 명제로 주어질 때보다 학생들의 동기화가 훨씬 빠름을 보았다. 추상화되고 형식화된 수학적 체계에 의미를 부여하여 학습자의 이해를 돕고자 하는 여러 시도 중에서, 수학과 일상 생활과의 관련성을 통해서 일상의 문제를 수학적 모델링 활동을 통한 교수 · 학습 지도 방안을, 구체적인 조작 활동으로 지식의 '자주적 구성'이라는 구성주의적 관점에서 시도하여 보았다. 많은 학생들이 학습 주제에 높은 흥미를 가지며, 인접 과목의 학습과 연관을 시켜 가면서 지식의 '자주적 구성'에 많은 성과(탐구대회 등)를 보였다.

참 고 문 헌

권기석·박배훈 (1997). 고등학교에서 수학적 모델링의 활용에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **36(2)**, pp.149-159.

김수미 (1993). 중등학교에서의 수학적 모델링에 관한 고찰, 서울대학교대학원 석사학위 논문.

박영배 (1996). 수학 교수·학습의 구성주의적 전개과정에 관한 연구, 서울대학교대학원 박사학위 논문.

이기열·이병수 (1999). 수학적 모델링을 통한 학습지도, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **9**, pp.187-201.

정두영 (1998). A note on mathematical modeling with an example, Proceeding of ICMI-EARCOME 1 1·2, pp.241-246.

조완영·권성룡 (1998). 열린수학교육과 모델링, 대한수학교육학회 논문집 **8(2)**, pp.663-677.

Blum, W. & Berry, J.S. (1989). *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*, Chichester, Ellis Horwood Limited.

Burghes, D.N. (1986). *Mathematical modelling are we heading in the right direction? In J.S. Berry, (ed.), Mathematical Modelling Methodology, Models and Micros*, Chichester, Ellis Horwood Limited, pp.11-20.

De Lange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*, Utrecht: OW & OC.

Klaoudatos, N. (1994). Modelling-orientated teaching (a theoretical development for teaching mathematics through the modelling process), *Int. J. Math. Ed. Sci. Technol.* **25(1)**, pp. 69-79.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Reston, VA.