

그래핑 계산기¹⁾를 활용한 수학개념 연계지도의 실제 - 연립방정식과 일차함수 단원을 중심으로 -

김 정 희 (부산용호중학교)

서 명 희 (한국카이시스템)

박 용 범 (부경대학교)

정보화 시대의 수학 교육은 수학을 체험해 볼 수 있게 하여(Doing Mathematics) 수학적 힘을 향상시키는 데 초점을 두어야 한다. 이를 위해서는 수학의 기본 지식·추론 능력·문제 해결력·수학적 아이디어의 표현 및 교환 능력 그리고 사고의 유연함·인내·흥미·지적 호기심·창의력을 길러 주는 다양한 교수·학습 방법이 필요하다.

본 연구는 연립방정식과 일차함수 단원에서 그래핑 계산기를 활용하여 다양한 표상을 통한 수학 개념의 연계지도와 수학 학습 태도 개선을 위한 교수·학습 모델을 구안·적용하는 데 주안점을 두고자 한다.

I. 서 론

1. 연구의 필요성

다가오는 21세기는 '정보사회' 또는 '기술(Technology)시대'로 대변된다. 사회 전반에 걸쳐 기술 문명이 하루가 다르게 발전하고 있으며 이제는 이러한 기술적 도움 없이는 생활에 큰 불편을 느낄 정도가 되었다.

이에 교육 현장에서도 학교차원의 멀티미디어 환경 구축에 주력하고 있으며, 교단 선진화를 위한 각종 기자재 활용을 적극 장려하고 있다.

테크놀로지의 발달과 여러 가지 교육용 소프트웨어의 개발은 테크놀로지의 교수학적 가능성을 더욱 높이고 있으며 특히 수학 교육에 극적인 변화를 주는 계기가 되었다. 즉 학생들에게 수학에 대한 흥미를 유발시켜 수학 활동에 적극적인 참여를 유도하고, 계산에 얽매이지 않게 됨으로써 보다 자신감 있는 수학적 개념의 탐구가 가능하게 된 것이다. 아울러 학교 수학과 실제 수학 사이를 자연스럽게 연결해 줄 수 있게 되어 사회적 상호작용의 결과로서의 수학 학습을 촉진하는 데 필요한 지적 자원, 학습 환경, 학습 도구를 창조하고 지원할 수 있게 되었다.

1) Texas Instruments사의 symbolic graphing calculator인 TI-92를 사용하였음.

따라서 정보화 사회에서의 수학교육은 교수·학습 방법에 있어서 그 방향을 달리해야 한다.

중등학교 이후의 수학 개념 형성을 위한 수학적 조작활동은 구체물의 활용보다는 매체의 활용을 통하여 가능하며, 여러 연구자들이 수학교육에 그래핑 계산기와 컴퓨터의 활용을 권장하고 있고 우리나라에서도 2001년부터 시행될 7차 교육과정의 수학과 교수·학습 방법에서 복잡한 계산이나 수학적 문제 해결력의 향상 등을 위해 컴퓨터나 계산기 등을 활용한 과학적 기술과 실제 생활의 문제 해결을 더욱 강조하고 있다.

그럼에도 불구하고 실제로 컴퓨터를 수학교육에 활용하는 교사와 학생 수는 기대에 못 미치고 있는 실정이다. CAI 프로그램과 프리젠테이션을 활용한 다양한 학습 지도 방안에 대한 연구 및 프로그램 개발이 많이 이루어지고는 있지만, 여러 학습 요소의 연계와 학생들의 다양한 사고 과정을 이끌지 못하는 프로그램의 단점으로 수학교육에의 활용에 부정적인 시각을 보이는 경우가 없지 않다. 또한 학교 현장에서 수학 수업에 활용할 수 있는 컴퓨터의 보유수가 절대적으로 부족하여 컴퓨터 활용 수업이 어렵고, 수업에 쉽게 적용할 수 있는 소프트웨어의 부족과 컴퓨터를 활용한 구체적인 수업 방법론에 대한 연구의 미흡은 수학 교육에의 컴퓨터 도입에 큰 장애가 되고 있다.

따라서 가격이 싸고 어디서나 간편하게 휴대하여 사용할 수 있고 학생 개개인의 직접 조작이 가능한 매체의 활용이 절실하며 학생들의 다양한 사고 과정의 유도과 수학적 개념의 연계지도를 위한 교수·학습 모델의 구안·적용이 필요하다.

컴퓨터의 기능을 갖추고 있으면서 가격이 싸고 사용과 휴대가 간편한 그래핑 계산기는 일반 계산 기능과 통계 기능, 그래프 기능, 방정식 해법 기능뿐만 아니라, 역동적인 기하적 표상을 지원하는 기하 소프트웨어인 Cabri Geometry II와 대수적 기능을 지원하는 Derive(대수 소프트웨어)까지 갖추고 있는 계산기이다. 이러한 컴퓨터의 시각적 효과와 기능을 가진 손쉬운 테크놀로지의 적절한 사용으로 학생 스스로의 활동과 조작을 통한 문제 해결력을 향상시켜야 하겠다. 그리고 수학에 대한 흥미와 관심, 자신감과 성취감을 갖게 하는 교수-학습 모델을 적용시켜 수학에 대한 새로운 가치관을 형성하는 데 도움이 되도록 해야겠다.

2. 연구의 목적

본 연구에서는 기존의 CAI 프로그램과 컴퓨터의 단점을 보완한 그래핑 계산기를 활용하여 구성주의 수학교육관에 따라 구체적인 조작 활동을 통한 학생 활동 중심의 학습 환경을 구성하고, 교사-매체-학생의 원활한 상호작용으로 학생들이 수학에 대한 긍정적인 태도를 가질 수 있게 하고자 한다. 이를 위하여

- 첫째, 수학 학습에서 개개인이 직접 그래핑 계산기를 조작하고 활용해 봄으로써 수학을 체험해 볼 수 있게 (Doing Mathematics)하여 적극적인 수업참여를 유도하고,
- 둘째, 계산 시간을 줄여 주고 계산 결과와 풀이 과정을 즉각적으로 확인할 수 있게 하여 자신의

생각이나 학습에 대한 자신감과 추측능력을 기르게 하며, 셋째, 생활 주변의 소재로 과학적 실험학습을 해 봄으로써 학습 동기를 유발시키고, 실생활과 연계된 수학적 모델을 탐구하는 실제적인 지도 방안을 제시코자 한다.

II. 이론적 배경

1. 수학 교수·학습에서의 구성주의

최근의 수학교육의 대표적인 흐름의 하나는 수학 교수·학습의 과정에서 구체적인 조작활동을 통하여 학생 개개인이 가능한 한 스스로 수학 지식을 '구성'할 수 있게 해주어야 한다는 구성주의적 수학교육이론이다. 1960년대부터 인식론의 한 형태로 싹트기 시작한 구성주의는 '지식의 자주적 구성', '지식의 성장 지향성', '지식의 사회적 구성'을 지식 구성의 원리로 보고, 이의 구조적 이해와 구성주의에 입각한 수학 교수·학습론의 연구를 활발히 진행하고 있다. 수학 지식이 구성된다는 것은 수학 지식이 더 이상 주는 자의 정신 세계에서 받는 자의 정신 세계로 전달될 수 있는 '상품'이 아니며, 특히 '학생중심적'이기를 요구하는 새로운 수학 교육에서의 수학지식은 교사의 도움을 받아 학생 스스로 구성하는 것으로서 교사는 학생으로 하여금 스스로 문제를 인식하고 능동적으로 그것을 해결할 수 있도록 안내해 줌으로써, 학생들이 '수학하는(doing mathematics)' 참 맛을 맛볼 수 있게 해주어야 한다는 것이다.

'수학 교수학적 구성주의의 원리'로는 지식 전달자에서 안내자로의 교사역할 변화와 능력과 개성의 차를 고려하는 '학생 중심적 개별화의 원리', 교사의 계획되고 의도적으로 준비된 상호작용에 의한 발문이 필요함을 강조한 '발문 중심적 상호 작용의 원리', 교사와 학생들의 상호 의견 교환과 논의를 거쳐 수학 지식의 합의 영역을 도출해 내기 위한 의미 지향적 활동의 기회가 제공되어야 함을 강조한 '의미 지향적 활동의 원리', 학생의 마음속에서 이루어지는 것으로 수학 지식의 자주적인 구성을 가능하도록 해주는 심리적 매커니즘으로 동화와 조절 등에 의하여 내면화된 자주적 활동을 강조하는 '반영적 추상화의 원리' 등이 있다(박영배, 1996).

또한 지식의 능동적인 구성을 위하여 구성주의적 입장에서 고려해 볼 수 있는 지도의 방침으로는 첫째, 학생들이 문제 의식을 갖고 반영적 추상화를 시도할 수 있게 문제 상황을 조성하여 주어야 하며 둘째, 학생들에게 자치권을 주어 스스로 문제를 책임질 수 있게 하고, 교사는 학생들의 구성활동의 보조역할을 하여야 하고, 셋째, 학생들의 수학적 개념화 과정과 유사한 은유(metaphor)를 주어 사고과정에서 구성활동이 일어나도록 하여야 하며, 넷째, 소그룹 상호작용이나 협조가 원활하게 이루어지도록 학습 상황을 조성해 주고 다섯째, 면접이나 관찰과 같은 과정에 중점을 둔 도구를 평가 도구로 활용하고, 학습 상황 속에서 지식 구성과정을 모니터하고 평가해야 한다(박경미, 1995).

2. 테크놀로지와 수학 교육

수학적 탐구의 추진 방안으로서 수학교사들은 전 학년에 걸친 학생들의 수학적 개념 이해, 문제해결력 향상을 위하여 교육용 컴퓨터 관련 테크놀로지의 활용에 보다 능숙하고 자신감을 갖도록 요구되어 왔다(NCTM, 1989).

컴퓨터와 컴퓨터 관련 테크놀로지는 정제된 수학 교실에서 학생 스스로 가설 설정, 조사, 추측, 증명할 수 있는 생동감 있는 실험실로의 전환을 가능하게 해 준다. Schoaff(1993)는 테크놀로지의 이용에 관해 교사가 적절히 중재자로서의 역할을 할 때 수학적 개념을 학습자 스스로의 지식으로 구성하는데 높은 효과가 나타날 수 있다고 언급하였다. 특히 NCTM(1989)과 Kieran(1993)은 수학학습에서의 컴퓨터 활용의 장점 중 하나는 함수를 배우는 데 있어 그래프(graph), 대수(algebra), 표(table)에 의한 표현들의 동시 변화를 한 눈에 볼 수 있다는 점을 지적하였다(김민경, 1998).

NCTM(1996)은 '손으로 하는 기호 조작 기법과 일정한 문제를 푸는 절차를 습득하는 것이 더 이상 주요 목적이 될 수 없다'고 주장하고 학교 대수의 내용이 바뀌어야 한다고 주장하는 근거를 테크놀로지가 학생들이 그래프를 그리는 도구, 기호-조작 프로그램, 스프레드쉬트, CAS²⁾와 다중연결표상에 자유롭게 접근할 수 있게 되었기 때문으로 들고 있다(장경운, 1998). 김민경(1998)은 특히 그래핑 도구에 대하여는 다음과 같은 방법으로 수학 대수적 내용에 영향을 준다고 언급하였다.

- ① 관계의 시각화의 용이성
- ② 수식에 의한 조작이 아닌 방정식의 정확한 해의 수식과 그래프상의 풀이 가능성
- ③ 한 표현방식에서 다른 표현방식으로 변화 시 그 변화의 효과를 이해하는데 학생으로 하여금 자발적인 탐구의 용이성
- ④ 관계와 수학적 개념 탐구의 격려
- ⑤ 실제상황의 "what if" 모델의 가능성

Kaput(1998)은 새로운 테크놀로지가 두 가지 방향에서 수학교육을 바꾸고 있다고 주장하였다. 하나는 기존의 수학 학습에서 중시되고 있는 여러 가지 표상과 Big-3(함수식-표-그래프)사이의 연결을 넘어서 현상의 창조를 가능하게 하고 있으며, 한편으로는 실제 세계의 역동적인 자료의 입수 가능성이 수학학습을 변화시키며 이것이 새로운 시대의 수학이라 주장하고 있다. 교과서에 나타난 정적인 상황에서가 아니라 물리적 현상에서 직접적으로 실험을 통해 자료를 수집·모델링하며 문제를 해결하고, 한 걸음 더 나아가서 물리적 가상 현실과 모의실험을 창조하는 세계를 다루어야 하며 이미 테크놀로지의 발달이 이를 가능케 하여 칠판-연필-종이에 의존하였던 이전의 교수-학습 방법으로는 불가능하였던 함수에 관한 직관력 있는 대수학습을 가능케 해 주는 것이다.

2) Computer Algebra System

III. 교수·학습 모델의 구안 및 적용

1. 연구의 대상 및 기초 조사 결과

본 연구는 1999년 4월부터 9월까지 본 연구자가 근무하는 중학교의 2학년 수학 수준별 학습에서 상반에 해당하는 5개 학반을 대상으로 진행하였다. 학생들은 모두 연구 전에는 그래핑 계산기나 컴퓨터 프로그램 같은 테크놀로지를 사용해 본 경험이 없으며, 1학년에서 수준별 수업용 학습지를 활용한 소집단 학습에 익숙한 학생들로서 성취도가 비교적 높은 편이다. 학생들의 수학적 태도를 알아보기 위하여 본 연구자가 작성한 설문지 조사를 통해 다음과 같은 결과를 얻었다.

<수학적 태도에 관한 기초 조사 결과표>

N=21

설문영역		설문내용	응답지수(명)	응답률 (%)
1	수학과 교수·학습에 대한 흥미도	아주 재미있다.	0	0
		재미있다.	40	19
		그저 그렇다.	96	44
		재미없다	80	37
2	수학과 교수·학습 내용의 이해 정도	잘 이해한다.	72	33
		보통이다.	110	51
		잘 이해되지 않는다.	34	16
3	수학과 교수·학습방법의 선호도	선생님 설명 중심	36	17
		조별 토의학습 중심	60	28
		개별학습	120	55
4	수학과 교실수업에의 학습 참여도	잘 참여한다.	36	17
		보통이다.	150	69
		잘 참여하지 않는다.	30	14

기초 조사의 결과를 보면, 수학 교과 내용에 대해서는 대체로 잘 이해하고 있음에도 불구하고(보통이상 84%) 수학 학습에 대한 흥미도는 대체로 낮은 편이다. 학업성취도가 대체로 높은 상반 학생들의 37%가 수학을 '재미없다'라고 한 것은 보다 다양하고 창의적인 사고로 문제를 해결하기보다는 주입식, 암기식의 학습 방법에 익숙함을 알 수 있다.

학생들이 원하는 학습 방법으로는 과반수 이상(55%)이 교사 주도의 수업보다는 자신의 능력에 따른 개별 학습을 희망하고 있으며, 조별 토의 학습에 대한 선호도도 대체로 높은(28%)편으로 나타나고 있다. 또 수학과 교실 수업에의 참여도가 '보통이다' 69%, '잘 참여하지 않는다'가 14%를 차지하고 있어 수준별 학습지에 의존하고 있는 현재의 교수·학습 방법에서 제시되는 문제 풀이 방법의 암기와 연습으로 짧은 시간 안에 많은 문제만을 해결하려는 태도를 볼 수 있다.

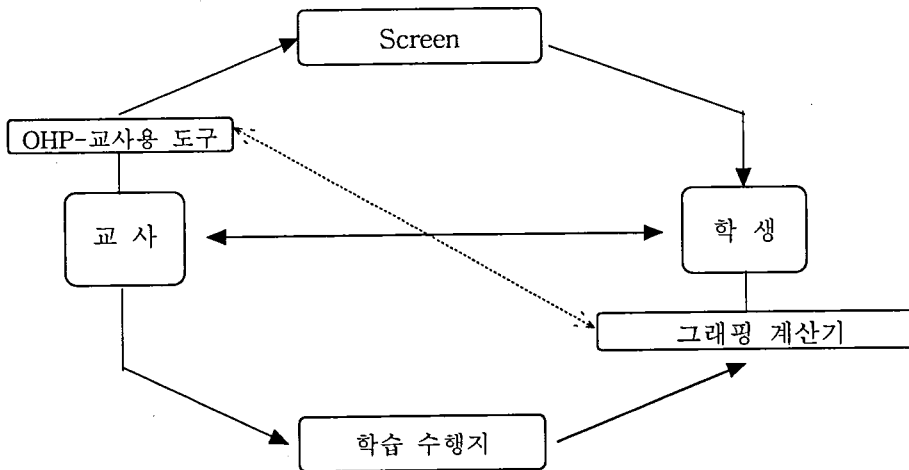
따라서 기존의 교수·학습 방법에서 탈피하여 학생 스스로의 활동과 조작을 통하여 수학적 개념

을 구성하고 문제해결력을 향상시키며, 적극적으로 수학을 대하는 자세를 길러 줄 수 있는 교수·학습 모델의 적용이 필요함을 알 수 있다.

2. 교수·학습 모델 적용의 실제

연구의 필요성에 따라 중학교 2학년 수학의 ‘연립방정식’ 단원과 ‘일차함수’ 단원을 그래핑 계산기의 다양한 표상을 활용하여 학생 스스로 수학적 개념간의 연계성을 인식하게 하고, 적극적으로 수업에 참여할 수 있도록 하기 위하여 세 가지 영역을 선정하여 지도하였다. 1절에서는 그래핑계산기의 활용을 위한 수업모형의 적용 방법을 제시하고, 2절에서는 교수·학습 모형 적용의 실제 - 연립방정식의 탐구, CBR(Calculator-Based Ranger)을 활용한 일차함수의 도입, 일차 함수의 그래프 탐구 - 를 제시하였다.

(1) 그래핑 계산기의 활용을 위한 수업모형의 적용 방법



<그래핑 계산기 활용을 위한 수업모형>

(가) 수업 모형의 적용 방법

- ① 학습 내용을 그래핑 계산기 파일로 만들어 교사용 도구와 OHP, screen을 통해 보여줌으로써 학습 동기를 부여하였다. 발문을 통하여 학생들이 발견하고 인식해야 할 내용을 제시하고, 추상적인 수학 내용을 시각화하여 수학의 역동적인 측면을 강조하였다.
- ② 학습 목표에 따라 교재의 내용을 재구성하고 사고 과정과 개념의 구성 단계를 고려하여 교사-학생-매체 사이에 원활한 상호작용이 이루어질 수 있도록 학습 수행지(IMTs)³⁾를 제작·활용하

3) Interactive Mathematics Texts

였다.

(나) 학습 수행지와 자기 평가지의 제작 및 활용

- ① 학생들의 흥미를 이끌 수 있는 생활 주변의 소재로 체계적인 도입과 발문을 사용함으로써 단원의 학습동기를 유발시키고, 실생활과 연계된 수학적 모델을 탐구하고 개념을 스스로 정립할 수 있도록 사고를 유도하는 체계로 학습 수행지를 제작·활용하였다.
- ② 학생들은 학습 수행지의 내용에 따라 계산기를 활용하여 학습하면서 제기되는 의문점과 자신의 사고 과정에서 발생하는 여러 가지 오류를 수정하고 반성하여 스스로 해결하는 기회를 가짐으로써 학습한 내용이 학생들 자신의 지식이 되도록 하였다.
- ③ 학습 수행지의 수행과정에서 얻어진 학생 자신의 수학적 개념 인식 방법 및 문제해결력을 스스로 점검하고 자기 반성의 기회를 가질 수 있도록 자기 평가지를 제작·배부하여 매 시간마다 작성토록 하였으며, 학생들의 수학 교과에 대한 가치와 태도, 정서적 변화 상태를 관찰하고 교수·학습 방법의 개선을 위한 자료로 활용하였다.

(2) 교수·학습 모형 적용의 실제

(가) ‘연립방정식’의 탐구(부록 참조)

그래핑 계산기를 이용하여 연립 방정식의 풀이 방법을 그래프(graph), 대수(algebra), 표(table)에 의한 표현들의 동시 변화를 한 눈에 볼 수 있도록 제시된 학습 수행지의 절차에 따라 각 상황에서 가장 적절한 방법을 학생들 스스로 발견하고 탐구하여 문제를 해결 할 수 있도록 하였다. 교사는 정보제공과 질문에 대한 답변으로 학습의 안내자·상담자 역할을 수행하였다. 학생들은 한가지 문제 상황을 다양한 표상으로 이해함으로써 가감법이나 대입법 등 계산을 통한 방정식의 해결뿐만 아니라 함수의 다른 표상인 표와 그래프를 이용하여 문제 해결을 시도 해 봄으로써 수학적 개념간의 연계성을 스스로 인식할 수 있었다.

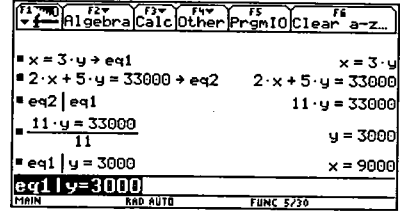
1) 도입단계

도입단계에서는 실생활과 관련된 문제를 제시하여 흥미를 유발시키고 학습 수행지의 유도에 따라 문제 해결을 위한 방정식을 세워 보도록 하였다. 이 때, x , y 를 어떻게 정하는가에 따라 식이 다양하게 나올 수 있음을 인식하도록 한다.

2) 식을 이용한 연립방정식의 풀이

그래핑 계산기의 Home mode 와 Graph mode를 이용하여 학생들은 학습 수행지의 절차에 따라 연립방정식의 해와 그래프의 교점 사이의 관계를 스스로 탐구하고 질문에 답하면서 수학적 개념의 연계성을 인식하도록 한다.

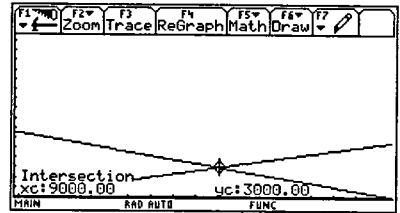
- ① <그림 1>과 같이 Home mode를 실행시킨다.
- ② Home mode에서 두 방정식을 각각 eq1, eq2로 두고 eq1을 eq2에 대입시켰을 때 미지수의 변화 상태를 탐구 하도록 한다.
- ③ '등식의 성질'을 활용하여 방정식을 풀고 문제의 뜻에 맞는 답을 구한다.



<그림 1> 식에 의한 풀이

3) Graph를 이용한 연립방정식의 풀이

- ① eq1과 eq2를 y에 관하여 풀고, Y=Edit를 실행시켜 y1, y2에 입력한다.
- ② <그림 2>와 같이 Graph-Intersection을 활용하여 두 그래프의 교점의 좌표를 구하고, 교점의 좌표와 대입법으로 구해진 x, y의 값이 일치함을 스스로 인식할 수 있도록 유도한다.



<그림 2> 그래프에 의한 풀이

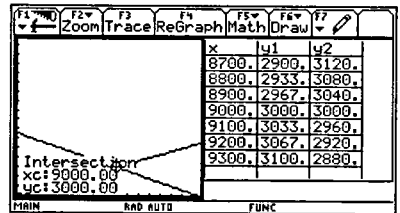
4) Graph와 Table을 이용한 개념간의 연계성 인식

- ① <그림 3>과 같이 Table mode를 실행시켜 y1, y2 값이 같아질 때의 x값을 구한다.
- ② <그림 4>와 같이 Graph mode와 Table mode를 함께 탐구하면서 교점의 좌표와 표에서 구해진 x, y의 값이 일치함을 확인한다.
- ③ 대입법으로 구해진 x, y의 값과 두 그래프의 교점 좌표, 표에서 구해진 x, y의 값이 일치함을 확인하고, 개념간의 연계성을 인식시킨다.
- ④ 정리·평가 및 개념 확립
형성평가 문항을 활용하여 본시 학습 내용을 정리하고 개념을 스스로 확립할 수 있게 한다.

x	y1	y2
8700.0	2900.0	3120.0
8800.0	2933.3	3080.0
8900.0	2966.7	3040.0
9000.0	3000.0	3000.0
9100.0	3033.3	2960.0
9200.0	3066.7	2920.0
9300.0	3100.0	2880.0
9400.0	3133.3	2840.0

x = 9000.

<그림 3> 표에 의한 풀이



<그림 4> 그래프-표의 관찰

(나) CBR을 활용한 일차함수의 도입

일차함수의 도입단계에서 학습 동기를 유발하기 위하여 자료 수집 장치인 CBR을 이용한 수학 실험 수업을 실시하였다. 시간에 따른 거리, 속도, 가속도 등을 측정하여 자료를 수집할 수 있는 도구인 CBR을 활용하여 일정한 속도로 자신이 직접 걸어 보고 수집된 자료들이 그래핑 계산기로 직접 입력되어 실시간으로 나타나는 그래프를 보면서 시간과 거리 사이의 관계를 탐구하고, 함수의 그래

프와 연계하여 걷는 속도가 그래프의 기울기가 됨을 스스로 인식하게 하였다. 학생들 스스로 자신의 움직임을 그래프로 나타내어 해석해 보게 함으로써 함수의 조건을 추론하고 함수의 개념을 경험적으로 이해하며 실생활에서 수학적인 모델을 발견하고 탐구할 수 있다는 사실을 인식하게 하여 수학에 대한 태도와 인식변화에 도움이 되도록 하였다.

<실제 수업에서 활용한 학습 수행지>

사람이 걸었을 때 나타나는 시간과 거리 사이의 관계를 알아보자.

① CBR을 이용하여 자신의 움직임을 나타내어 보자.

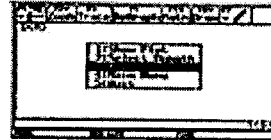
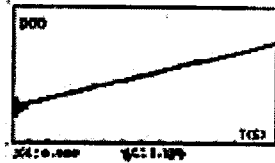
▶ 나타나는 그래프를 오른쪽에 그려보고, 세 이와 같은 그래프가 나타나는지 설명해 보자.

1. 양의 속도로 걷는 경우 나타나는 그래프는 CBR
2. 정지할 때 약 1.04m 당에서 출발하여 3미터
3. 점 (0, 1.73)에서 시작한다.

단, 그래프가 만족스럽지 못하면, (F5)

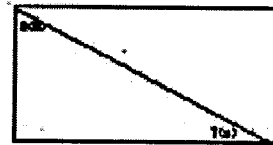
3: Repeat Sample

(F5)



② 오른쪽 그래프와 같은 그래프가 나타나도록 걸어보자. 어떻게 걸었을 때 이와 같은 그래프가 나타나는가?

▶ 한 걸음 CBR을 통해 걸을 수 있는
거리가 약 1.73m 당이 된다.



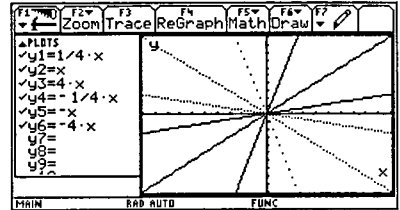
(다) 일차 함수의 그래프 탐구

함수 교육은 패턴을 발견하고 분석하여 추론해 내는 함수적 사고를 육성해 줄 수 있어야 한다. 본 단원에서는 함수에서의 변수의 의미를 생각해 보고 변수의 값의 변화에 따른 그래프의 변화 상태를 직관적으로 관찰하여 학생 스스로 해석하고 개념을 정립할 수 있도록 지도하였다. 또한 함수의 수치·그래프·대수 표현 사이의 연관성을 탐구하게 하여 그래프의 해석과 표상간의 번역, 그래프를 언어로 변환하게 함으로써 함수 원래의 의미인 ‘패턴’을 발견할 수 있게 하였다.

1) 일차함수 $y=ax+b$ 에서 $b=0$ 일 때 a 값의 변화에 따른 일차함수의 그래프에 대한 직관적 관찰
 선행 지식의 재정립을 위하여 학습 수행지의 유도과 교사의 발문을 통하여 일차함수 $y=ax$ 의 그래프

를 관찰해 봄으로써 a 값의 변화에 따른 일차함수의 그래프의 성질을 일반화시킨다.

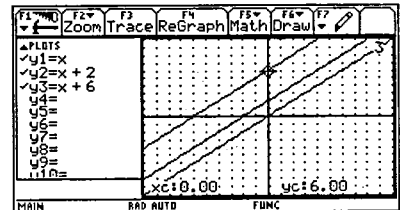
- ① <그림 5>와 같이 screen을 좌-우로 나누어 Y=Editor 와 Graph mode를 실행시킨다.
- ② $a > 0$ 일 때의 그래프를 관찰하기 위하여 식을 입력하고 순서대로 그래프를 나타낸다.
- ③ 나타난 그래프를 보고 관찰된 내용을 대화형 실행 매체에 정리하여 본다.
- ④ $a < 0$ 일 때의 그래프를 관찰하기 위하여 식을 입력하고 style을 Dot로 하여 나타나는 그래프를 관찰하도록 한다.
- ⑤ a 값의 변화에 따른 그래프의 성질을 자신의 생각대로 정리한 후 조별로 토론하고 개념을 형성해 나가도록 한다.



<그림 5> 기울기의 관찰

2) $b \neq 0$ 일 때 b 값의 변화에 따른 평행이동의 관찰
 학생은 학습 수행지의 절차에 따라 <그림 6>와 같이 실행하도록 한다. 이 때 교사는 학습자가 스스로 탐구하고 관찰하여 개념을 정립해 나갈 수 있도록 도와준다.

- ① Graph mode에서 Grid를 설정하여 y_1, y_2, y_3 의 그래프를 차례대로 나타내고, 관찰된 내용을 토론하도록 지도한다.
- ② <그림 7>과 같이 Table-mode에서 각각의 x 값에 대응하는 y 의 값을 비교하여 보고 관찰된 내용을 기술하도록 한다.
- ③ 수학적 개념간의 연결 구조를 확인시키고 학습한 내용을 스스로 정리할 수 있도록 한다.
- ④ 정리·평가 및 개념 확립



<그림 6> 평행이동의 관찰

<예제> 문항을 활용하여 본시 학습 내용을 스스로 확인하고 정리하여 개념을 확립할 수 있게 한다.

x	y1	y2	y3
-3.00	-3.00	-1.00	3.00
-2.00	-2.00	0.00	4.00
-1.00	-1.00	1.00	5.00
0.00	0.00	2.00	6.00
1.00	1.00	3.00	7.00
2.00	2.00	4.00	8.00
3.00	3.00	5.00	9.00

<그림 7> 대응표의 관찰

IV. 연구의 결과

1. 학생들의 수학적 태도 변화

그래핑 계산기를 활용한 수업을 실시한 후 학생들의 수학적 태도에 대한 변화를 비교해 보기 위하여 '일차 함수' 단원의 학습을 마치고, 설문지 조사⁴⁾를 실시한 결과 및 분석은 다음과 같다.

4) 설문지는 수학적 태도에 관한 기초 조사 설문지를 사용하였음.

<수학적 태도에 관한 설문지 조사 비교표>

N=(전: 216명, 후: 200명)

설문영역		설문내용	응답자수(명)		응답률(%)	
			전	후	전	후
1	수학과 교수·학습에 대한 흥미도	아주 재미있다.	0	36	0	18
		재미있다.	40	78	19	39
		그저 그렇다.	96	62	44	31
		재미없다	80	24	37	12
2	수학과 교수·학습 내용의 이해 정도	잘 이해한다.	72	80	33	40
		보통이다.	110	96	51	48
		잘 이해되지 않는다.	34	24	16	12
3	수학과 교실수업에의 학습 참여도	잘 참여한다.	36	86	17	43
		보통이다.	150	110	69	55
		잘 참여하지 않는다.	30	4	14	2

- ① 설문지 조사 결과 수학 교과에 대한 흥미도가 매우 높아진 것으로 나타나('재미있다'이상 전 19%, 후 57%) 기존의 수준별 학습지가 아닌 자신의 사고과정을 직접 기술하고 학습한 결과를 확인·반성할 수 있는 학습 수행지와 그래핑 계산기를 활용한 수업이 학생들의 흥미 유발에 효과가 있었음을 알 수 있다.
- ② 학업 성취도가 대체로 높은 학생들을 대상으로 수업한 결과 수학 교과 학습 내용에 관한 이해 정도가 '보통'이상이 88%로 연구 전의 84%와 큰 차이가 없는 것으로 나타나 계산기의 사용으로 이해력 감소에 대한 우려는 하지 않아도 될 것으로 생각된다.
- ③ 수학과 교실 수업에의 참여도가 '보통'이상이 98%로(연구전 86%) 매우 높아진 것으로 나타나, 생활 주변에서 수학과 관련된 문제를 도입함으로써 수학을 직접 체험할 수 있게 되고 자신의 능력에 맞는 개별 학습이 가능하게 되어 학습자 주도의 적극적인 수업이 이루어졌음을 알 수 있다.

2. 그래핑 계산기를 활용한 수학 학습에 대한 학생들의 태도와 반응의 변화

그래핑 계산기를 활용한 수학 학습에 대한 학생의 태도와 반응의 변화 상태를 알아보기 위하여 학생들에게 자기 평가지와 소감문을 작성토록 하여 결과를 분석하였다. 작성된 자기 평가지와 소감문 예시는 다음과 같다.

♠ 자기 평가지 ♠

2학년 (1) 반 (○) 번 성 명 (노 ○ ○)

♣ 오늘 수업은 ...

(좋았음 : ○ 별로 : △)

날 짜	학 습 주 제	학 습 참여도	학 습 태 도	느 낀 점 및 개선할 점
5월 1일	연립방정식의 뜻과해	○	○	계산기의 기능에 대해 더 알고 싶다
5월 7일	"	○	○	계산기 기능이 놀랍고 점점 흥미로워진다.
5월 10일	CBR로 속도재기	○	△	걷는 속도를 잴 수 있다니, 놀랍다.(너무 떠들었다)
5월 11일	일차방정식의 그래프	○	○	계산기가 재미있고 방정식을 그래프로 풀수 있다는 사실이 놀랍다.
5월 26일	"	○	○	컴퓨터 같은 기능을가진 계산기, 정말 놀라워..
5월 28일	가감법	○	○	정말 열심히 수업했고 정말 재미있었다.
5월 31일	복잡한 연립방정식	○	△	집중해서 수업하니 허리도 아프지만 재미있다.
6월 5일	연립방정식의 활용	○	△	더 많은 문제를 풀어 보고 싶다.
6월 9일	"	○	○	재미있는 문제들이 많아 즐거웠다. very good!
6월 11일	"	○	○	참 재미있는 수학시간이었다.

<학생 소감문>

♥ 1학기 수학 수업을 마치면서 느낀점을 솔직히 써 봅시다.
제 2학년 (2) 반 (○○) 번 성 명 (○ ○ ○)

1학년 때 수업했던 방법보다 계산기를 이용해서 하는 수업이 더 좋은 것 같다. 처음에는 계산기의 모든 기능이 영어로 되어 있고 습관이 되어 있지 않아서 힘들고 별로 도움이 되지 않는 것 같았는데 어느새 선생님의 도움없이도 학습지를 풀 수 있게 되었다.

그리고 계산기로 방정식을 풀 때는 푸는 시간이 좀 걸리고 귀찮았지만, 실수없이 자신감 있게 풀 수 있게 되어 기분이 좋았다. 또 움직임을 느낀다는 CBR도 신기했다. 내가 걸어 가는 속도와 걸어가는 모습이 그래프로 나타나는 것을 보고 우리 반 모두 신기해하고 열심히 수업했다.

1학기동안 이런 수업을 하고 나서 수학에 대한 자신감이 생겼다.
앞으로도 꼭 계산기로 수업을 했으면 좋겠다.

① 계산기를 활용한 수업에서 학생들은 계산기의 기능을 어느 정도 습득하기까지는 어려움을 느끼고 전통적인 수업 방법을 더 선호하는 학생들이 많이 있었다. 그러나 수업이 진행됨에 따라 학생 스스로의 활동과 조작을 통해 수업에 대한 흥미와 참여가 점점 긍정적이고 적극적인 경향으로 변화되고 있음을 알 수 있었다.

② 대수적으로 접근하기 힘든 문제를 그래프로 시각화하여 인식함으로써 하나의 수학적 개념을

여러 형태로 구성하여 종합적인 수학적 개념을 활용하는 ‘문제 해결 능력’을 배양할 수 있는 기회를 경험하였고, 단원간의 연계도 가능하였다. 또한 풀이 결과의 즉각적인 확인으로 수학 개념을 이해하고 분석하는 데 더 많은 자신감을 갖게 됨으로써 ‘기다려지는 수학 시간’이 되었다.

- ③ 과학적 실험 학습을 통해 다양한 경험을 해 봄으로써 수학에 대한 성취감과 자신감을 갖고 ‘실생활에 필요한 수학’이라는 새로운 가치관을 형성할 수 있게 되었으며, 자신들의 미래에 대한 기대감도 가질 수 있게 되었다는 것을 알 수 있었다.

V. 결론

학생들에게 수학 학습에의 적극적인 참여를 유도하고 수학에 대한 긍정적인 태도를 갖게 하여 창의적이고 자율적인 문제 해결 능력을 신장시키기 위한 목적으로 본 연구를 수행한 결과, 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 수업에서 CBR과 그래픽계산기를 이용하여 직접 자신의 의도대로 조작하여 나타나는 변화를 관찰해 봄으로써 교사 의존적인 수동적 학습이 아닌 능동적이고 학생 중심적인 수학 학습이 가능해졌다.

둘째, 실시간으로 나타나는 대수적 연산 결과와 그래프의 변화를 관찰, 탐구하여 그 결과를 즉각적으로 확인하고 반성할 수 있게 함으로써 자신의 생각이나 학습에 대한 자신감을 기를 수 있었다. 아울러 여러 가지 풀이 방법을 생각하고 적용할 수 있는 시간적 여유도 가질 수 있게 되었다.

셋째, 체계적인 발문과 응답의 상호작용을 유도한 학습 수행지를 통하여 교사와 학생, 수업 매체의 원활한 연결이 가능해졌다. 또한 학생들은 자신의 생각을 표현하는 과정에서 나타나는 학습 결과에 대한 자기 반성이 이루어졌으며, 교사는 학생들의 수학에 대한 태도, 정서적 변화 상태를 관찰할 수 있었다.

VI. 연구 과제

교수·학습 방법이 시시각각으로 변화하고 있는 교육의 현장에서 컴퓨터와 테크놀로지를 이용한 체계적이고 실질적인 수학 교육이 필요한 때이다. 따라서 컴퓨터와 테크놀로지의 구체적인 활용방안과 다양한 접근 방식에 대한 연구가 절실하다. 이에 앞으로 해결해야 할 몇 가지 과제를 제시하고자 한다.

첫째, 컴퓨터, 계산기 등의 테크놀로지를 활용하는 수학 교육에 대한 교사의 공감대가 형성되어야 한다. 교사의 역할은 교육의 성공여부에 있어 결정적인 요소이므로 현장 교사들의 인식이 변화

되어야만 수학 교육에 컴퓨터나 계산기 등의 테크놀로지를 도입하는 것이 교육의 방법과 수학 학습의 영역에 큰 변화를 가져 올 수 있다. 따라서 교사의 전문성을 향상시키기 위한 의미있고 효율적인 재교육의 기회가 필요하다.

둘째, 단원간의 연계성과 학습 목표를 고려하여 학생들 스스로가 인식하고 발견하여야 할 내용이 체계적으로 연구되어야 하고 이를 위한 적절한 발문과 학습 수행지가 제공되어야 한다. 그러나 이들의 개발을 위해서는 많은 시간과 노력이 요구되므로 보다 효율적이고 실질적인 공동 개발 연구를 위한 교사들의 활동이 요구된다.

셋째, '연습문제'형의 문제만 많이 그리고 빨리 풀면 수학 교육은 다 된 것이라는 생각으로 행해져 온 기존의 평가 방법과 문제 유형이 개선되지 않으면 다양하고 창의적인 문제 해결력을 기를 수 없다. 따라서 테크놀로지를 활용한 학습 과정과 평가 방법의 일관성에 관한 연구도 함께 이루어져야 하겠다.

넷째, 테크놀로지를 활용한 교수·학습 과정에 거부감을 느껴 수학에 대한 부정적인 태도를 가지게 되는 학생에 대하여 적절한 배려가 있어야 하겠다. 이러한 학생에 대한 분리 교육이 어려운 현실이므로 보다 적극적이고 긍정적인 태도 정립을 위한 교수·학습 방법의 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

- 강옥기 (1998). 그래픽 계산기를 활용하는 수학과 교수-학습 자료 모형 개발 연구, 대한수학교육학회 논문집 8(20), pp.453-474.
- 구광조·오병승·류희찬 (1997). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 경문사
- 권오남·김래영 (1999). 중등 수학교육과정에서의 그래픽 계산기의 활용: 함수를 중심으로, 1991 대한수학교육학회 춘계 수학교육 연구 발표대회 논문집, pp.271-296.
- 권오남·김래영·박지현·정호선 (1999). 수학교육에서 휴대용 테크놀로지의 활용: 그래픽계산기와 CBL과 CBR을 중심으로, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 8, pp.607-622.
- 김민경 (1998). 컴퓨터를 활용한 수학적 교수-학습의 구성주의적 접근, 교육학연구 36(2), pp.183-202.
- 김현주·김부윤·박용범·허만성 (1998). 중등수학교육에서 Symbolic Graphing Calculator를 활용한 수업모형과 ITs 작성, 1998 대한수학교육학회 추계 수학교육 연구 발표대회 논문집, pp.325-347.
- 류희찬 (1998). 컴퓨터를 활용한 수학교육의 이론과 실제, 1998 대한수학교육학회 추계 수학교육 연구 발표대회 논문집, pp.29-43.
- 박경미 (1995). 수학교육에 있어서의 구성주의, 대한수학교육학회 논문집 5(1), pp.217-224.
- 박영배 (1996). 수학 교수·학습의 구성주의적 전개 과정에 관한 연구, 서울대학교대학원 박사학위논문.
- 장경운 (1998). 대수 교육의 컴퓨터 활용 전망, 1998 대한수학교육학회 추계 수학교육 연구 발표대회 논문집, pp.45-64.

허만성 (1998). 중등 수학교과 교수-학습을 위한 CAS Math Engine과 연계한 컴퓨터 응용프로그램 모형설계 및 ITs 작성에 관한 소고, 1998 대한수학교육학회 추계 수학교육 연구 발표대회 논문집, pp.245-267.

황우형 (1997). 그래픽 계산기의 중등수학교육 활용방안, 대한수학교육학회 논문집 7(2), pp.215-254.

Douglas T. Owens(Ed.) (1993). *Research Ideas for the classroom; Middle grades Math*. New York : Macmillian Publishing Company.

James J. Kaput (1998). Mixing New Technology, New Curricula and New Pedagogies to Obtain Exteaordinary Performance from Ordinary People in the Next Century. *ICMI-EARCOME 1 Proceeding Vol 1*. pp.141-156.

NCTM (1996). *Algebra in a technological world: Agenda series, Grade 9-12*. Reston, VA:NCTM

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, NCTM. 구광조 · 오병승 · 류희찬 공역 (1997). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 서울: 경문사.

NCTM (1998). *Principles and Standards for School Mathematics ; Discussion Draft*, NCTM.

(부록) 연립방정식의 풀이 - 학습 수행지

선생님은 다과를 준비하여 반 학생들과 경로당을 방문하려고 계획을 세웠다. 과일을 사기 위해 수박 값과 메론 값을 물었더니 수박 값이 메론 값의 3배였다. 그리고 수박 2덩이와 메론 5개를 사면 33,000원이라고 하였다. 수박 1덩이와 메론 1개의 값은 각각 얼마였을까?

◎ 위의 내용을 식으로 나타내어 보자.

알고자 하는 ()의 값을 x , ()의 값을 y 라고 하면,

① 수박 값이 메론 값의 3배이므로

② 수박 2덩이와 메론 5개의 값이 33,000원이므로

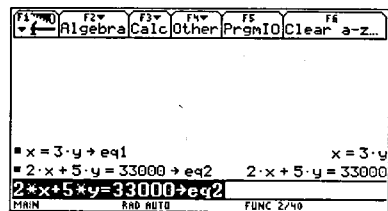
$$2 \times (\quad) + 5 \times (\quad) =$$

1. Home Mode를 이용, 수박과 메론의 값을 알아보면,

가. ①, ②의 식을 입력하고, 각각 eq1, eq2 라 두자.

$x = (\quad) \times y$ STO > eq1

$(\quad) + (\quad) = 33,000$ STO > eq2



나. eq1을 eq2에 대입하여 보자.

eq2 [2nd] [K](= |) eq1 [Enter]

$11y =$

● eq1을 eq2에 대입했을 때, 방정식이 어떻게 달라졌는지 적어보자.

다. $11y=33000$ 을 y 에 관해 풀면,

$\div (\quad)$ [Enter]

$y =$

eq1에 y 값을 대입하면

eq1 [2nd] [K](= |) $y=(\quad)$ [Enter]

$x =$

∴ 수박 1덩이와 메론 1개의 값은 각각 (\quad 원), (\quad 원) 이다.

▶대입법이란?

두 일차방정식에서 한 일차방정식을 (\quad)에 관해 풀고, 그것을 다른 한 (\quad)에 (\quad)하여 해를 구하는 방법

2. 위의 방정식을 그래프로 나타내어 관찰해 보자.

가. 그래프로 나타내기 위해 eq1,eq2를 y 에 관해 풀면,

[F2] 1: Solve eq1 , y)

$y1 =$

[F2] 1: Solve eq2 , y)

$y2 =$

◆[W](Y=)두 식을 각각 $y1, y2$ 에 입력하자.

● x, y 의 범위를 어떻게 정해야 할까?

◆[E](=Window)

$xmin(x\text{축의 최소값}) = (\quad)$, $xmax(x\text{축의 최대값}) = (\quad)$

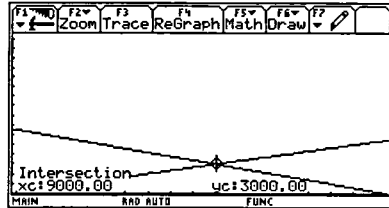
$ymin(y\text{축의 최소값}) = (\quad)$, $ymax(y\text{축의 최대값}) = (\quad)$

- 왜 이렇게 범위를 정했는지 설명해 보자.

◆(R)(Graph)

나. 두 그래프의 교점을 찾아보면,

☞ 5: Intersection



교점의 좌표는 (,)

- 이 교점의 좌표는 무엇을 뜻하는가?

- 대입법으로 구해진 x, y 값과 교점의 좌표는 일치하는가?

3. 대응표에서 y_1 과 y_2 의 값이 같아질 때의 x 값을 찾아보자.

◆(Y)=(TABLE)

x 가 ()일 때, 방정식 $x=3y$ 와 $2x+5y=33000$ 의
 y 값은 ()으로 같아진다.

x	y1	y2
8700.0	2900.0	3120.0
8800.0	2933.3	3080.0
8900.0	2966.7	3040.0
9000.0	3000.0	3000.0
9100.0	3033.3	2960.0
9200.0	3066.7	2920.0
9300.0	3100.0	2880.0
9400.0	3133.3	2840.0

x=9000.

Split Screen을 이용해 그래프의 교점과 대응표를 비교해 보자.

x	y1	y2
8700.0	2900.0	3120.0
8800.0	2933.3	3080.0
8900.0	2966.7	3040.0
9000.0	3000.0	3000.0
9100.0	3033.3	2960.0
9200.0	3066.7	2920.0
9300.0	3100.0	2880.0

Intersection
xc:9000.00
yc:3000.00

형성평가 다음 연립방정식을 대입법으로 풀고 그래프와 표를 이용하여 확인하여라.

$\begin{cases} y=2x-2 \\ 2x+3y=16 \end{cases}$		$\begin{cases} x=5y+6 \\ x=-2+y \end{cases}$	
풀이 과정	Display 결과	풀이 과정	Display 결과
$y=2x-2 \rightarrow \text{eq1}$ $2x+3y=16 \rightarrow \text{eq2}$		$x=5y+6 \rightarrow \text{eq1}$ $x=-2+y \rightarrow \text{eq2}$	
$\text{eq}() \text{eq}()$		$\text{eq1} \text{eq2}$	
	$8x = ()$	$-()$	
	$x =$	$+()$	
		$\div ()$	$y =$
$\text{eq}() x =$	$y =$	$\text{eq1} y = ()$	$x =$