

GPS 관측치 위치계산을 위한 부동점 알고리즘

Fixed Point Algorithm for GPS Measurement Solution

임 삼 성*

Samsung Lim*

요 약

GPS에 의한 관측치는 시각오차, 전리층과 대류층 지연오차, 다중경로 오차와 같은 다양한 오차를 내포하고 있어서 GPS 관측치 위치계산시 일반적으로 최소자승해를 구하게 된다. GPS 관측치는 비선형 방정식을 만족하므로 최소자승해를 구하기 위해서는 비선형 Newton 알고리즘을 이용할 수도 있으나 대개 간편성과 효율성 때문에 선형화 알고리즘을 적용하게 된다. 본 연구에서는 비선형 Newton 알고리즘이나 선형화 알고리즘을 대체할 수 있는 부동점 알고리즘을 개발하여 그 유용성을 증명하였다. 비선형 Newton 알고리즘이나 선형화 알고리즘은 수렴속도가 빠른 장점을 가지고 있으나 초기값이 해와 근사하여야 한다는 단점이 있다. 반면 부동점 알고리즘은 수렴속도는 다소 느리나 초기값이 대단히 부정확하여도 수렴가능한 장점이 있으므로 두 알고리즘을 적절히 혼용하는 것이 좋을 것이다.

Abstract

A GPS measurement solution, in general, is obtained as a least squares solution since the measurement includes errors such as clock errors, ionospheric and tropospheric delays, multipath effect etc. Because of the nonlinearity of the measurement equation, we utilize the nonlinear Newton algorithm to obtain a least squares solution, or mostly, use its linearized algorithm which is more convenient and effective. In this study we developed a fixed point algorithm and proved its availability to replace the nonlinear Newton algorithm and the linearized algorithm. A nonlinear Newton algorithm and a linearized algorithm have the advantage of fast convergence, while their initial values have to be near the unknown solution. On the contrary, the fixed point algorithm provides more reliable but slower convergence even if the initial values are quite far from the solution. Therefore, two types of algorithms may be combined to achieve better performance.

I. 서 론

GPS에 의한 관측치는 의사관측치 (pseudorange measurement)와 반송파 위상관측치 (carrier beat phase measurement)로 나누어진다. 각각의 관측치

는 또한 두 주파수 L1과 L2에 의한 관측치로 구별할 수 있다. GPS 관측치는 수신기 시각오차, 위성 시각오차, 전리층과 대류층 지연오차, 다중경로 오차와 같은 다양한 오차를 내포하고 있다. 따라서 GPS 관측치를 이용하여 위치를 계산하는 방법에는 절대오차의 최고값을 최소로 하는 최소최고해 (mi-

* 인하대학교 지리정보공학과 (Dept. of Geoinformatic Eng. Inha Univ.)

· 논문번호 : 2000-1-5

· 접수일자 : 2000년 6월 14일

nimax solution) 방법, 절대오차의 합을 최소로 하는 최소절대편차 (minimum of absolute deviation) 방법, 오차의 제곱의 합을 최소로 하는 최소자승해 (least squares solution) 방법 등이 있다.

최소최고해는 그 복잡성 때문에 적용이 쉽지 않고 최소절대편차는 존재하지 않을 수도 있다. 반면 최소자승해는 비편향 추정치로서 그 통계학적 중요성 때문에 가장 많이 사용되고 있다. 일반적으로 GPS 위치 해는 최소자승해를 의미한다. GPS 관측치 오차의 제곱의 합은 비선형 방정식이므로 최소자승해를 구하기 위해서는 비선형 함수의 해를 구하는 알고리즘을 사용하여야 한다. 비선형 함수의 해를 구하는 방법에는 Newton 알고리즘을 이용하는 방법, 준 Newton 알고리즘 (Quasi-Newton algorithm)을 이용하는 방법, 최대경사법 (steepest descent method)을 이용하는 방법, 부동점 (fixed point) 알고리즘을 이용하는 방법 등이 있다.

GPS 위치 해를 구하기 위한 비선형 Newton 알고리즘은 비선형 미분 방정식을 유도하여야 하므로 복잡하기 때문에 먼저 비선형 방정식을 선형화 한 다음 Newton 알고리즘을 적용하는 방법인 선형화 알고리즘을 사용하는 것이 일반적인 관례이다. 선형화 알고리즘은 Newton 알고리즘이나 준 Newton 알고리즘보다 훨씬 단순하고 효과적이며 비선형 Newton 알고리즘이나 준 Newton 알고리즘에 의한 해와 일치된 결과를 보여 준다. 선형화 알고리즘은 또한 매우 빠르게 해에 수렴하는 장점이 있으나 해와 근사한 초기치가 필요하다.

일반적으로 부동점 알고리즘은 해와 매우 차이가 나는 초기치를 사용하더라도 해에 수렴한다. 부동점 알고리즘은 대개 Newton 알고리즘보다 상대적으로 수렴속도가 늦고 준 Newton 알고리즘과 유사한 수렴속도를 보인다. 부동점 알고리즘을 구하기 위해서는 본래의 방정식을 변형함으로써 부동점 이론을 만족하는 방정식을 얻어야 한다. GPS 관측치 방정식은 비선형이기 때문에 부동점 이론의 조건을 만족하도록 변형하기가 매우 어려우며 변형된 방정식이 부동점 이론의 조건을 만족함을 증명하기도 어렵다. 본 연구에서는 GPS 관측치 방정식의 변형을 통하여 부동점 이론의 조건을 만족하는 방정식을 구하고

이를 바탕으로 부동점 알고리즘을 개발하여 부동점 알고리즘의 장점을 GPS 위치 해 추정에 적용하고자 한다.

II. 부동점 알고리즘

GPS 의사관측치 방정식과 반송파 위상관측치 방정식은 매우 유사하다. 의사관측식과 위상관측식은 각각 아래의 수식 (1)과 (2)에 나타낸 바와 같다.

$$\tilde{\rho}_i = \rho_i + \tau_R - \tau_i + \iota_i + \chi_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (1)$$

$$\Phi_i = \rho_i + \tau_R - \tau_i + \lambda N_i - \iota_i + \chi_i + \eta_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

여기에서 식 (1)과 (2)의 모든 항의 단위는 거리로 표현된다. m 은 동시에 수신한 총 위성의 개수를 나타내며, $\tilde{\rho}_i$ 와 Φ_i 는 각각 i 번째 위성으로부터의 의사관측치와 위상관측치를 나타낸다. ρ_i 는 i 번째 위성의 위치벡터 r_i 로부터 수신기의 위치벡터 r_R 까지의 실제 거리로서 $\|r_i - r_R\|$ 으로 표현된다. τ_R 과 τ_i 는 각각 수신기의 시각오차와 i 번째 위성의 시각오차를 나타내며, ι_i 와 χ_i 는 각각 i 번째 위성의 전리층 지연효과와 대류층 효과에 의한 오차를 나타내고, ε_i 와 η_i 는 각각 i 번째 위성으로부터의 의사관측치와 위상관측치에 포함된 나머지 오차들을 나타내는데 여기에는 다중경로 오차, 수신기 하드웨어 오차, 신호간섭에 의한 오차 등이 포함된다. 위상관측치에는 i 번째 위성의 위상파 모호정수치 (integer ambiguity) N_i 가 있으며 거리로 환산하기 위해 파장 λ 를 곱하여야 한다.

식 (1)과 (2)는 벡터로 표현하면 보다 간편하므로 이를 아래의 식 (3)과 (4)에 나타내었다.

$$\tilde{\rho} = \rho + \mathbf{1}\tau_R - \tau + \iota + \chi + \varepsilon \quad (3)$$

$$\Phi = \rho + \mathbf{1}\tau_R - \tau + \lambda N - \iota + \chi + \eta \quad (4)$$

식 (1), (2)와 각각 비교하여 첨자 i 에 해당하는 값을 순차적으로 쌓은 열벡터로 이해하기로 한다. 단, τ_R 은 스칼라이기 때문에 여기에서 예외이며, 따라서 각 요소가 1인 $m \times 1$ 열벡터 $\mathbf{1}$ 을 곱하였다.

전리층 지연효과는 이중주파수 관측치나 DGPS를 통하여 제거할 수 있고 모형 (modeling)을 이용하여 값을 예측할 수 있다. 대류층 효과 역시 DGPS나 모형을 이용하여 해결한다. 위상관측치의 경우 모호정수치는 서로 다른 시간간격의 관측치를 이용하여 상쇄하거나 지수함수를 이용하여 제거할 수 있지만, 보다 정확한 해를 위해서는 공칭 정수치를 구한 다음 검색공간을 설정하여 잔차를 최소화하는 값을 얻어야 한다. 결과적으로 수식 (3)과 (4)에서 미지수를 열벡터 r_R 과 τ_R 으로 정하고 선형화 알고리즘 또는 부동점 알고리즘을 적용하여 해를 구하게 되는 것이다.

선형화 알고리즘은 비선형인 거리 방정식 ρ_i 를 1차 항까지 Taylor 급수로 전개함으로써 얻어진다. 부동점 알고리즘은 식 (3)과 (4)를 변형하여 얻을 수 있으므로 이론적으로는 무수히 많은 부동점 알고리즘이 존재할 수 있다. 본 연구에서는 거리 방정식 ρ_i 를 제공하여 비선형 요소를 완화하고 부동점 이론의 조건을 만족하도록 변형함으로써 부동점 알고리즘을 구현하고자 한다. 식 (3)과 (4)는 매우 유사하므로 부동점 알고리즘의 구현은 식 (3)을 이용하기로 한다. 식 (4)의 이용은 이와 유사한 절차를 통하여 충분히 구현할 수 있다.

수식 (1)에서 거리 방정식 ρ_i 를 우변에 위치하고 나머지 모든 항을 좌변으로 옮겨 양변을 제공한 다음 정리하면 다음과 같다.

$$S r_R - p \tau_R = d + \mathbf{1} \xi_R + (P - \tau_R D) \epsilon - \delta \quad (5)$$

여기에서 행렬 S 는 각 위성의 위치벡터의 전치 벡터를 행으로 취하는 $m \times 3$ 행렬이고, 열벡터 p 는 의사관측치와 위성시각오차, 전리층 및 대류층 지연효과를 합한 $m \times 1$ 열벡터이다. 우변의 열벡터 a 는 행렬 $(SS^T - pp^T)/2$ 의 대각선 원소만으로 구성된 $m \times 1$ 열벡터이고, ξ_R 은 미지의 스칼라로

서 $(r_R^T r_R - \tau_R^2)/2$ 이다. 행렬 P 는 열벡터 p 를 대각선 원소로 취하는 $m \times m$ 대각행렬이고, 행렬 I 는 $m \times m$ 단위행렬이며, 열벡터 δ 는 행렬 $(\epsilon \epsilon^T)/2$ 의 대각선 원소만으로 구성된 열벡터이다. 이제 최소자승해는 식 (5)의 오차의 제곱의 합을 최소로 하는 r_R 과 τ_R 이어야 한다. 즉, 다음의 식 (6)을 최소로 하는 값이다.

$$J(r_R, \tau_R) = \frac{1}{2} \epsilon^T \epsilon \quad (6)$$

따라서 r_R 과 τ_R 는 식 (6)의 미분방정식의 근이어야 한다. 식 (5)를 식 (6)에 대입하여 미분하는 과정에서 고차항의 오차인 δ 를 무시하면 각각의 미분방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial r_R} &= (S - \mathbf{1} r_R^T)^T (P - \tau_R D)^{-2} \\ &\cdot (S r_R - p \tau_R - d - \mathbf{1} \xi_R) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \tau_R} &= \epsilon^T (P - \tau_R D)^{-1} \epsilon - (p - \mathbf{1} \tau_R)^T \\ &\cdot (P - \tau_R D)^{-2} (S r_R - p \tau_R - d - \mathbf{1} \xi_R) \end{aligned} \quad (8)$$

여기에서 구하고자 하는 위치벡터 r_R 과 시각오차 τ_R 는 비편향의 추정치이어야 하므로 오차의 총합은 영이어야 한다. 즉, $\mathbf{1}^T \epsilon = 0$ 을 만족하여야 한다. 그런데, 식 (8)에서 $(p - \mathbf{1} \tau_R)^T (P - \tau_R D)^{-2} (S r_R - p \tau_R - d - \mathbf{1} \xi_R)$ 은 바로 $\mathbf{1}^T \epsilon$ 임을 알 수 있다. 따라서 식 (8)의 고차 오차항인 $\epsilon^T (P - \tau_R D)^{-1} \cdot \epsilon$ 은 무시하여야 한다. 이제 미지수 위치벡터 r_R 과 시각오차 τ_R 는 다음의 식 (9)과 (10)을 동시에 만족하는 근이다.

$$\begin{aligned} (S - \mathbf{1} r_R^T)^T (P - \tau_R D)^{-2} \cdot \\ (S r_R - p \tau_R - d - \mathbf{1} \xi_R) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} -(p - \mathbf{1} \tau_R)^T (P - \tau_R D)^{-2} \cdot \\ (S r_R - p \tau_R - d - \mathbf{1} \xi_R) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

식 (9)와 (10)은 부동점 이론의 조건을 만족하는 부동점 함수로 간단히 변형할 수 있다. 이론적으로 무수히 많은 변형이 가능하나, 본 연구에서는 세 가지의 경우를 보이고자 한다. 우선 식 (9)와 (10)을 좀더 간단히 표현하기 위해 다음과 같이 몇 가지 행렬을 도입한다.

$$W = (P - \tau_R I)^{-2} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} H &= [S, \quad -p \\ H_1 &= [S - 1r_R^T, \quad -p + 1\tau_R \\ H_2 &= [S - 1r_R^T/2, \quad -p + 1\tau_R/2 \end{aligned} \tag{12}$$

여기에서 식 (12)의 행렬 H, H_1, H_2 는 모두 $m \times 4$ 행렬이다. 이제 새로운 행렬을 이용하여 식 (9)와 (10)을 묶어서 하나의 수식으로 표현할 수 있으며 다음과 같이 여러 가지 방법으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} r_R \\ \tau_R \end{bmatrix} = (H_1^T W H)^{-1} H_1^T W (d + 1\xi_R) \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} r_R \\ \tau_R \end{bmatrix} = (H_1^T W H_1)^{-1} H_1^T W (d - 1\xi_R) \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} r_R \\ \tau_R \end{bmatrix} = (H_1^T W H_2)^{-1} H_1^T W d \tag{15}$$

식 (13), (14), (15)의 세 경우는 모두 동치이며 부동점 이론의 조건을 만족한다. 컴퓨터의 메모리와 연산횟수를 줄이기 위해서는 식 (14)를 이용하는 것이 좋을 것이다. 부동점 알고리즘은 매우 간단하여 r_R 과 τ_R 의 초기값이 주어지면 수식의 우변을 구함으로써 좌변의 새로운 r_R 과 τ_R 의 값을 얻게 된다. 새로운 값이 알고리즘의 정지조건을 만족하지 않으면 다시 우변을 구함으로써 이 과정을 반복한다.

III. 부동점 알고리즘과 선형 알고리즘의 비교

선형 알고리즘은 거리 방정식을 Taylor 급수로 전개하여 얻었으므로 각 위성의 위치벡터와 수신기

의 공칭 위치벡터의 차감 거리벡터를 계산하고 차감 거리벡터의 크기를 구하여야 하며 차감 거리벡터의 단위벡터까지 계산하여야 한다. 이에 반하여 본 연구의 부동점 알고리즘은 각 위성의 위치벡터와 수신기의 공칭 위치벡터를 크기를 구하지 않고 그대로 이용하게 된다. 더구나 부동점 알고리즘에서는 r_R 과 τ_R 의 값이 자동으로 갱신되는데 반해, 선형 알고리즘에서는 갱신될 값과 현재 값의 차이를 얻는 방법이므로 이 차이를 r_R 과 τ_R 에 더하여야 갱신이 된다. 따라서 부동점 알고리즘의 연산횟수가 상대적으로 적게 된다.

두 알고리즘을 비교하기 위해 인하대학교 상시관측소에서 간단한 1주파수 수신기를 이용하여 S/A가 제거된 시점의 전후 각 1시간씩을 10초 간격으로 관측한 자료를 처리하였다. 상시관측소의 정확한 위치를 알고 있으므로 자료 처리한 위치벡터의 오차벡터를 그림 1에 나타내었다. 그림 1은 일반적인 선형 알고리즘을 이용한 최소자승해의 오차를 나타낸다. 그림 1에서 보이듯이 S/A가 2000년 5월 2일 04시 6분 UT경에 제거되었음을 알 수 있다. 그림 2에는 선형 알고리즘과 부동점 알고리즘의 차이를 나타내었다. 그림 2에서 보여 주는 정량치는 선형 알고리즘 해에서 부동점 알고리즘 해를 차감한 좌표값이다. 부동점 알고리즘은 식 (13), (14), (15) 모두 동치

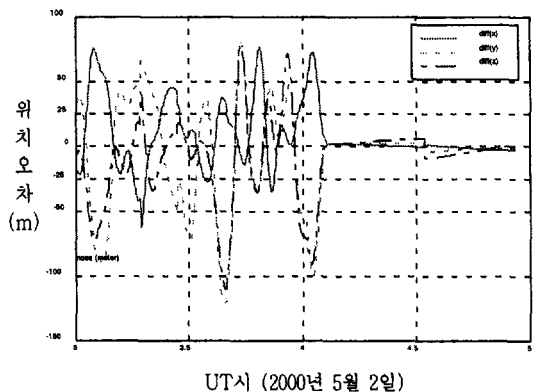


그림 1. S/A 추이: 선형화 알고리즘에 의한 최소자승해 위치 오차

Fig. 1. S/A transition: position error of linearized least squares solution.

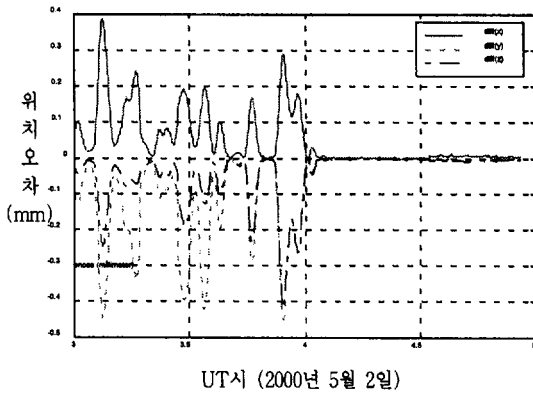


그림 2. 선형화 알고리즘과 부동점 알고리즘의 위치 비교
 Fig. 2. Position differences between linearized algorithm and fixed point method.

이므로 식 (14)를 이용하였다. 그림 2에서 보이듯이, 선형 알고리즘과 부동점 알고리즘의 차이는 0.5 밀리미터 미만이므로 동일한 결과를 얻었다고 말할 수 있다. 흥미로운 사실은 두 알고리즘의 차이는 S/A가 제거된 이후 더욱 일치함을 보여 준다. 이는 부동점 알고리즘에서 무시한 고차항 오차 δ 가 훨씬 작아졌기 때문이다.

IV. 결 론

선형화 알고리즘과 부동점 알고리즘의 결과 차이는 S/A 적용시 0.5mm 미만이며 S/A 제거 후 0.01mm 수준이다. 따라서 두 알고리즘은 일치된 결

과를 보여 주나, 각각 장단점을 가지고 있다. 선형 알고리즘은 부동점 알고리즘보다 다소 빠른 수렴속도를 보이는 반면 초기값이 결과값과 유사하여야 하고 연산횟수가 부동점 알고리즘보다 상대적으로 많다. 지표면에서 GPS 수신기를 사용하는 경우 지구 중심의 원점을 초기값으로 사용하여도 충분히 수렴하나 우주공간에서 사용하는 경우 수렴여부를 장담할 수 없다. 부동점 알고리즘은 선형 알고리즘보다 0 회 내지 2회 더 반복하여야 하나 연산횟수가 적고 알고리즘 구현이 매우 간단하여 결과적으로 계산속도는 유사하다. 부동점 알고리즘은 초기값이 훨씬 부정확하더라도 수렴하는 장점이 있다. 이론상으로 무수히 많은 부동점 알고리즘을 제시할 수 있으나, 본 연구에서는 세 가지 경우를 구현하였으며 이들은 모두 동치이다.

참 고 문 헌

[1] Bitón, I., Koifman, M., and Bar-Itzhack, I. Y., "Improved Direct Solution of the Global Positioning System Equation", *Journal of Guidance: Control and Dynamics*, vol. 21, no. 1, January-February, 1998.

[2] Lim., S., "Alternative Algorithms for Least Square Solution of Pseudo-range Measurements", *ION 55th Annual Meeting*, 28-30 June, 1999, Cambridge, MA.

임 삼 성(林三成)



1988년 : 서울대학교 수학과(이학사)
 1990년 : 서울대학교 수학과(이학석사)
 1995년 : 미국 텍사스 주립대학교 (공학박사)
 1992년 9월~1995년 12월 : Center for Space Research 연구원

1996년 1월~1997년 2월 : SMI 선임연구원
 1997년 3월~현재 : 인하대학교 공과대학 지리정보공학과 조교수

관심분야 : 위성측지, GPS, GIS, 인공위성 궤도 및 자세 제어, 컴포넌트 프로그래밍